١٠




حكومەتی هەرێمی كوردستان- عێراق
وەزارەتی پەروەردە - بەڕێوەبەرایەتی گشتی پرۆگرام و چاپەمەنییەكان

# بیركاری بۆ هەمووان

## كتێبی خوێندكار
## پۆلی دەیەمی زانستی

چاپی هەشتەم
٢٠١٥ ز / ٢٧١٥ كوردی / ١٤٣٦ ك

سەرپەرشتی هونەری چاپ

عوسمان پیرداود کواز

ئاری محسن احمد

# ناوەڕۆکی کتێبەکە

# ناوەڕۆکی کتێبەکە

## 1 ژمارەکان و کردارەکان NUMBERS AND OPERATIONS 2





## 2 نەخشەکان FUNCTIONS 50





## 3 بڕەکان و نەخشە دووجاکان
## QUADRATIC EXPRESSIONS AND FUNCTIONS 102





## 4 بڕەکان و نەخشە ڕادەدارەکان
## POLYNOMIAL EXPRESSIONS AND FUNCTIONS 144











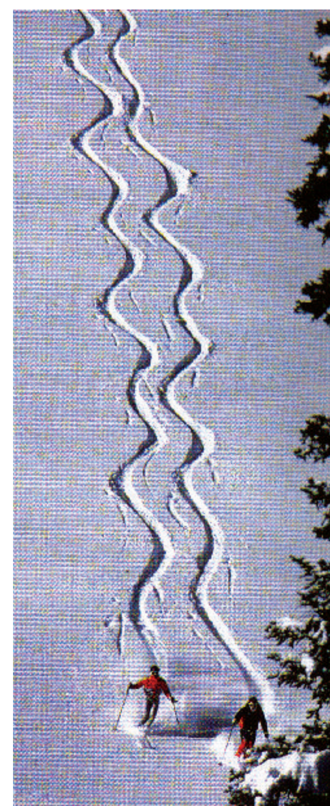
## 7 ئەندازە GEOMETRY 268





## 8 سێگۆشەزانی TRIGONOMETRY 322





# بەشی یەکەم

# ژمارەکان و کردارەکان

# Numbers and Operations

1. کردارەکان لەسەر ژمارەکان.
2. هاوکێشەکان.
3. لاسەنگەکان.
4. هێزەکان و ڕەگەکان.
5. شیکارکردنی سیستمی هاوکێشە هێڵییەکان بەلەجیاتیدانان.
6. شیکارکردنی سیستمی هاوکێشە هێڵییەکان بەلابردن.
7. برە ڕەگییەکان.

پرۆژەی بەش

پێداچوونەوە

تاقیکردنەوەی بەش

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

بەشی

1

# ژمارەكان و كردارەكان

## Numbers and Operations

شێوازە جیاوازەكان بە درێژایی چاخەكان سەرنجی مرۆڤایەتیان وا لە وولاتە جیاجیاكاندا ڕاكێشاوە كە هەندێكیان گەیشتوونەتە ئەو بڕوایەی كە جوانییەكی بێ وێنەیان هەیە. لەمانە شارستانییەتی كۆنەكان وەك شارستانیەتی وولاتی نێوان دوو ڕووبار و ڕۆژهەڵاتی ناوەڕاست و باشووری ئەفریقا و ڕۆژئاوای ئەمریكا، شێوازی وایان ناسیوە كە جێگای بەسەر ژیانیانەوە جێ هێشتووە و زۆر و لە جێماوە هونەریانە كاریانكردۆتە سەر كە جێگەی ستایشی شێوازە جوانەكانن.

لە جیهانی تەكنەلۆژیای هاوچەرخدا شێوازەكان ڕێساكانی زۆر لە دۆزینەوەكانی زانستی و بیركاری ئامادە دەكات. زاناكان شێوازەكان بۆ لێكۆڵینەوە سروشت و تێگەیشتن و خەملاندنی نەزانراوەكانی تیایدا بەكاردەهێنن. هەروەها زانا بیركارییەكان بەدوای شێوازە ڕێگەكان دەگەڕێن لەكاتی لێكۆڵینەوەیان بۆ ژمارەكان. دەكرێ شێوازەكان وەك ئامرازێكی كارا بۆ شیكاری پرسیارەكان بەكاربێت.

### وانەكان



جیۆلۆجییەکان ئامڕازی چاودێریکردنی بوومەلەرزە بەکاردەهێنن بۆتۆماری شێوازی هێزەکانیان.

## سەبارەت بە پرۆژەی بەشەکە

شێوازەکان یاریدەدەرت دەبێت بۆ دۆزینەوەی شیکار لە پێدراوەکانی پرسیارەکە. جەبر ئامرازی ئاسانکاریت بۆ دەکات بۆ گشتاندن و خەملاندن بەپشت بەستن بە شێوازەکان. لە پرۆژەی ئەم بەشەدا بە شێوازە بیرکارییەکان ئاشنا دەبیت لە لاکێشە زێڕینەکان و کۆمەڵێك لە شێوە بازنەییەکان. پاش تەواوبوونی ئەم پرۆژەیە لەتواناتدا دەبێت. شیکردنەوەی شێوازەکان لە پێدراوەکاندا بەبەکارهێنانی خشتەکان و خاڵە ڕوونکراوەییەکان.



# وانەی 1

# کردارەکان لەسەر ژمارەکان
## Operations With Numbers



**بۆچی**

لە ژیانی رۆژانەماندا ژمارە جۆراوجۆرەکان بەکاردەهێنین وەک 32 پلە بۆ دەربرینی گەرمی کەش وەهاوا، هەروەها ژمارەی دەیی وەک 41,25 هەزار دینار بەهای کەلوپەلێک بێت.

**ئامانجەکان**

- کۆمەڵە جیاوازەکانی ژمارەکان و پەیوەندی نێوانیان جیادەکاتەوە.
- سیفەتەکانی کردارەکان لەسەر ژمارە راستییەکان و بەکارهێنانیان دەناسێت.
- بەهای بڕێکی ژمارەیی بەبەکارهێنانی ریزبەندی کردارەکان هەژمێر دەکات.

لە پۆلەکانی ڕابردوودا جۆری جیاوازت لە ژمارەکان ناسیوە.

**Sets of Number** کۆمەڵەی ژمارەکان

ژمارە سروشتییەکان **Natural Numbers** 0; 1; 2; 3; 4; ...

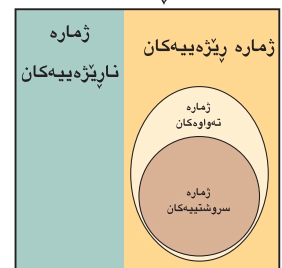
ژمارە تەواوەکان **Integers** ...; −3; −2; −1; 0; 1; 2; 3; ...

ژمارە ڕێژەییەکان **Rational Numbers** $\frac{a}{b}$ کاتێک $a$ ، $b$ ژمارەی تەواو بن، $b \neq 0$ .

ژمارە ناڕێژەییەکان **Irrational Numbers** ئەو ژمارانەن کە بەشی لای راستی فاریزەکە ناکۆتا و نادووبارە بوو دەبێت.

ژمارە راستییەکان **Real Numbers** هەموو ژمارە ڕێژەیی و ناڕێژەییەکان

ژمارە راستییەکان




هێڵکاری ڤن (Venn) کە لە بەرامبەردا هاتووە پەیوەندی نێوان کۆمەڵە جۆراوجۆرەکانی ژمارەکان دیاریدەکات. بۆ جیاکردنەوەی ژمارە ڕێژەییەکان و ناڕێژەییەکان، لە بیرت بێ کە ژمارە ڕێژەییەکان بەشی دەیییەکەی کە کەوتۆتە لای راستی فارزەکە دوا هاتووە یان دووبارەبووە. ئەگەر ژمارەی ڕێژەیی دووبارەبوو بێت دەتوانیت ئەم نموونەیەی خوارەوە بنووسیت: $3.2\overline{16} = 3.2161616...$

**نموونە 1**

ئەم ژمارانەی خوارەوە پۆلێن بکە لەگەڵ باسکردن.

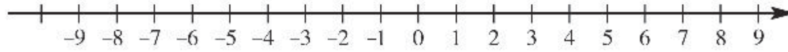
−2.77    178.131313...    15.121221222...

**شیکار**

ژمارەی یەکەم ڕێژەییە چونکە بەشی لای راستی فارزەکە دوا هاتووە، ژمارەی دووەمیش ڕێژەییە چونکە بەشی لای راستی فارزەکە دووبارەبووە، بەڵام ژمارەی سێیەم ناڕێژەییە چونکە بەشی لای راستی فارزەکە دوانە هاتووە و دووبارەبوو نیە.

## Number Line — هێڵی ژمارەکان

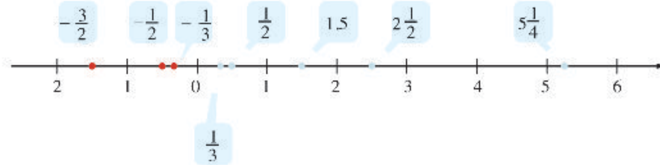
کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان سیفەتێکی گرنگی هەیە. دەتوانیت هەر ژمارەیەکی ڕاستی بنوێنیت بە خاڵێك لەسەر هێڵێکی ڕاستی ئاڕاستەکراو کە پێی دەوترێت **تەوەری ژمارەکان** و هەروەها هەر خاڵێکی سەر ئەم تەوەرەیە تەنها یەك ژمارەی ڕاستی دەنوێنێت.




**نموونە 2**

لەسەر تەوەری ژمارەکان ئەم ژمارانە بنوێنە $5\frac{1}{4}$، $-\frac{1}{3}$، $2\frac{1}{2}$، $\frac{1}{2}$، $-\frac{1}{2}$، 1,5، $\frac{1}{3}$، $-\frac{3}{2}$.

**شیکار**



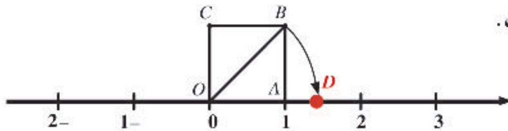

**نموونە 3**

چۆن $\sqrt{2}$ لەسەر تەوەری ژمارەکان دەنوێنیت؟

**شیکار**

ژمارەی $\sqrt{2}$ تیرەی چوارگۆشەیەك دەنوێنێت کە درێژی لاکەی 1 یەکەی درێژی بێت.

لەم تێبینییەوە دەتوانیت بەم کارەی دێت هەڵسێت.




1. چوارگۆشەی $A\ B\ C\ O$ بکێشە

2. وێنەی خاڵی $B$ بکێشە بە خولانەوەیەك ( چەقەکەی خاڵی بنەڕەت $O$ ) بێت کە خاڵی $B$ دەگوازێتەوە بۆ خاڵی $D$ لەسەر تەوەری ژمارەکان.خاڵی $D$ ژمارەی $\sqrt{2}$ دەنوێنێت.

**هەوڵبدە** ئایا دەتوانیت ژمارەی $\sqrt{5}$ لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنیت؟ باسیبکە.

## Operations With Real Numbers — کردارەکان لەسەر ژمارە ڕاستییەکان

سیفەتەکانی کۆکردنەوە و لێکدان یارمەتیت دەدات لەسەر جێبەجێکردنی کردارە ژمێرییەکان بەخێرایی و بە ئاسانی. ئەم سیفەتانەش لەم خشتەی خوارەوە ڕوون کراوەتەوە.

**سیفەتەکانی هەردوو کرداری کۆکردنەوە و لێکدانی ژمارە ڕاستییەکان**

| سیفەت | کۆکردنەوە | لێکدان |
|---|---|---|
| ئاڵوگۆڕ | $a+b=b+a$ | $a\times b=b\times a$ |
| یەکتربەستن | $a+(b+c)=(a+b)+c$ | $a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$ |
| دانەی بێ لایەنی سفر ویەك لە کرداری کۆکردنەوەی ولێکدان یەك لەدوای یەك | $a+0=a$ | $a\times 1=a$ |
| پێچەوانە و هەڵگەراوە «دژەکۆکردنەوە و دژە لێکدان» | $a+(-a)=0$ | $b\times\frac{1}{b}=1;\ b\neq 0$ |
| بەشینەوەی لێکدان بەسەر کۆکردندا | $a(b+c)=ab+ac$ | |

نموونە 4

ئەم برە جەبریە $(a+2)\ (b+3)$ بکەرەوە.

شیکار

$(a+2)(b+3) = a(b+3)+2(b+3)$ سیفەتی بەشینەوە بەکاربهێنە

$= ab+3a+2b+6$ سیفەتی بەشینەوە بەکاربهێنە

هەوڵبدە برِی جەبری $(a+b)\ (c-d)$ بکەرەوە و هۆی هەر هەنگاوێك دەربخە.

نموونە 5

جێبەجێکردن
بازرگانی

کاتێك بازرگانێك داشکاندن بە برِی $25\%$ لە نرخی کاڵایەك دەخاتەروو و نرخە تازەکەی دەبێتە $t = c - 0.25c$.

کە $t$ نرخە تازەکەیە، و $c$ نرخی بنەرِتییە، روونیبکەوە کە $t = 0.75c$

شیکار $t = c - 0.25c = 1\times c - 0.25\times c = (1-0.25)c = 0.75c$

هەوڵبدە روونیبکەوە کە نرخی تازەی کاڵایەك، نرخە بنەرِتیەکەی $c$ بێت پاش بەرزکردنەوەی نرخەکەی بە رێژەی $r\,\%$ دەبێتە $t = \left(1+\frac{r}{100}\right)c$ .

## Order of Operation ریزبەندی کردارەکان

بۆ ئەژمێرکردنی بەهای برِێکی ژمارەیی پێویستە کرداره ژمێرەییەکان جێبەجێبکەیت بەپێی ئەم ریزبەندیەی لای خوارەوە.

1. برەکان ئەژمێربکە لەناو هێماکانی کۆبووەکاندا (رموز التجميع)، وەك کەوانە و کەرتەکان بەپێی هەنگاوەکانی 2 تا 4.
2. هێزەکان ئەژمێر بکە.
3. لێکبدەو دابەشبکە یەك لەدوای یەك لە چەپەوە دەستپێبکە.
4. کۆ بکەوە و لێکدەربکە یەك لەدوای یەك لە چەپەوە دەستپێبکە.

نموونە 6

بەهای برِی $\frac{2^2(12+8)}{5}$ ئەژمێربکە بەبەکارهێنانی ریزبەندی کردارەکان.

شیکار

$\frac{2^2(12+8)}{5} = \frac{2^2\times 20}{5}$ برِی ناو کەوانەکە هەژمێربکە.

$= \frac{4\times 20}{5}$ تواناکان ئەژمێر بکە

$= \frac{80}{5}$ لێکدانبکە

$= 16$ دابەشبکە.

هەوڵبدە بەهای $\frac{18-2\times 5}{15+3(-3)}$ هەژمێر بکە بەبەکارهێنانی ریزبەندی کردارەکان.

بیرکردنەوەی رەخنەگرانە

مامۆستا داوای لە ڤالا و لانا و سەروین کرد ئەم برەیە $\frac{8-3}{5-2}$ هەژماربکەن بەبەکارهێنانی بژمێر. هەریەکەیان بە رێگایەکی جیاواز بژمێریان بەکارهێنا.

ڤالا: 8 - 3 ÷ 5 - 2

لانا: ( 8 - 3 ) ÷ 5 - 2

سەروین: ( 8 - 3 ) ÷ ( 5 - 2 )

تۆش بژمێر بەکاربهێنە و وەڵامەکەت بەراورد بکە لەگەڵ وەڵامەکانیان.

کامیان رەچاوی ریزبەندی کردارەکانی کردووە.

# راهێنان

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 ئەم وشانەی خوارەوە چی دەگەیەنێت بۆتۆ ڕوونیبکەرەوە: **ئاڵوگۆڕ**، **یەکتربەستن**، **بەشینەوە** بەپێی هەردوو کرداری کۆکردنەوە و لێکدان بە هێنانەوەی نموونە باسیان بکە.

## ڕاهێنانی ئاراستەکراو

2 پۆلینی ئەم دوو ژمارەیە $\frac{2}{3}$ و $-2.131331333...$ بکە بە هەموو ئەو ڕێگایانەی لە توانادایە.

هەر یەك لەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە بە دەربڕینی هۆی هەر هەنگاوێك.

3 $2(a+b)$ 4 $-3a+3a$ 5 $\frac{3(8+2)}{2}$

6 $\frac{7-1}{5-2}$ 7 $\frac{1}{4}(4\times5)$ 8 $-5(4y^2)$

9 **بازرگانی** ئەگەر هێمای گۆڕاوی $a$ بۆقیستی ساڵانەی دڵنیایی لەسەر ئۆتۆمبیل بێت و هێمای گۆڕاوی $m$ بۆقیستی مانگانە بێت، ئەوا ڕێسای $m=\frac{a}{12}+\frac{0.06a}{12}$ چۆنیەتی هەژمێرکردنی قیستی مانگانە دیاردەکات کە پێویستە بدرێت. ڕوونیبکەوە کە دەتوانیت ئەم یاسایە بەم شێوەیە $m=\frac{1.06a}{12}$ دیاریبکەیت. هۆی هەر هەنگاوێك بڵێ.

**جێبەجێکردن**



شارەزاکە زیانەکانی ئوتومبیلەکە هەڵدەسەنگێنێ کە خۆی کێشاوە بە ئوتومبیلێکی تر.

هەژماری ئەم بڕانە بکە بەبەکارهێنانی ڕیزبەندی کردارەکان.

10 $5^2+8\div4-2$ 11 $(7-3^2)^2$

12 $\frac{5\times6\div3\times7}{12}$ 13 $2\left[14-3(6-1)^2\right]$

## ڕاهێنانی جێبەجێکردن

ئەم ژمارانە پۆلینبکە.

14 $\sqrt{3}$ 15 $\frac{2}{5}$ 16 $1.0\overline{63}$ 17 $\pi$

18 $\frac{\sqrt{36}}{2}$ 19 $\frac{9}{3}$ 20 $\frac{15}{2}$ 21 $5.121121112...$

ئەم ژمارانە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

22 $\frac{13}{2}$ 23 $3.\overline{6}$ 24 $1.5$ 25 $\sqrt{10}$

هەر بڕێك بە بەکارهێنانی ڕیزبەندی کردارەکان هەژماربکە.

26 $16\div2\times6-1$ 27 $6\div3-(10-3)^2$

28 $30-3\times2+6\div3$ 29 $5\times(2-3)^2$

سیفەتی بەکارهێنراو بۆ هەر یەکە لەمانە دیاربکە.

30 $a(3b)=(3b)a$ 31 $(25x)y=25(xy)$

32 $(5+3)+2=5+(3+2)$ 33 $a+2-x=2-x+a$

34 $\frac{1}{a}\times a=1\ ;\ a\neq0$ 35 $\frac{3}{x}\times\frac{x}{3}=1\ ;\ x\neq0$

36 $-7+7=0$

37 $2x+(-2x)=0$

38 $1(3x)=3x$

39 $63=1\times 63$

40 $a(x^2+x)=ax^2+ax$

41 $2(3-x)=6-2x$

**بەهای ئەم بڕانە بەبەکارهێنانی بڕمێری زانستی هەژمار بکە.**

42 $3\times 2^2+3$

43 $6\div 3\times 2$

44 $2^2(2+3)+5$

45 $6\div(3-1)\times 5$

46 $-3\times 25+16$

47 $2^{(3-1)}+(3-1)$

48 $(2^2+1)+4\div 2$

49 $\frac{8-2}{3}+(2+1)$

50 $2\times 4+\frac{14}{5+2}$

**بەرەنگاری**

51 دەکرێ ژمارەیەك ڕێژەیی و ناڕێژەیی بێت لەهەمان کاتدا؟

**بەستنەوە**

52 ئایا دەتوانیت ژمارەی $\pi$ لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنیت؟ ڕوونیبکەوە.

53 **ئامار** ڕۆژان دەیەوێت ناوەندی ئەم ژمارانە 8 ، 10 ، 14 ، 16 ئەژمێربکات کە لە بڕمێرەکەیدا دایناوە بەم شێوەیە: $\boxed{8}\ \boxed{+}\ \boxed{10}\ \boxed{+}\ \boxed{14}\ \boxed{+}\ \boxed{16}\ \boxed{\div}\ \boxed{4}\ \boxed{=}$ و لە ئەنجامدا 36 ی دەستکەوت. ئایا ڕۆژان ڕاستی کردووە؟ پێویست بوو لە بڕمێرەکەیدا چی دابنێ باسبکە؟

54 **دەروازەیەك لەسەر شارستانییەتی میزۆپۆتامیا (عێراق)** بابلییەکان ژمارە ڕێژەییەکانیان بۆ نزیککردنەوە لە ژمارە ناڕێژەییەکان بەکارهێناوە. و زانیویانە کە تیرەی چوارگۆشە دەکاتە $\sqrt{2}$ لێکبدرێت لە درێژی لایەکی، و ژمارەی 1.4142 یان بەکارهێناوە وەك بەهای $\sqrt{2}$ بەکارهێناوە و وایان داناوە کە ژمارەی 1.4142 نزیکە لە $\sqrt{2}$ بۆ کاری پێداویستیە هەژمارکردنەکانیان.



أ بڕمێر بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای $\sqrt{2}$ .

ب ئایا ئەم بەهایەی دەستتکەوتووە دەکاتە 1.4142 ؟

ج ئەو بەهایەی دەستتکەوتووە لە بڕمێرەکەوە لەسەرکاغەز بینووسە، پاشان سەرلەنوێ بیخە ناو بڕمێرەکە و هەژماری دووجاکەی بکە. ئایا ژمارەی 2 دەردەچێت؟ ڕوونیبکەوە.

**جێبەجێکردن**

55 یەکێك لە دەزگاکان مانگانە 2000 دینار بۆ هەر فەرمانبەرێك دەدات بە سیستمی دڵنیایی تەندروستی. ئەمەش نیوەی ئەو بڕە دەنوێنێت کە فەرمانبەرەکان بۆ هەمان مەبەست مانگانە دەیدەن، بڕی پارەی دراو لە ساڵێکدا بۆ دڵنیایی تەندروستی ئەو فەرمانبەرە چەندە لەلایەن فەرمانبەرەکەوە؟

**دەروازەیەك لەسەر مێژوو**

دۆڵی میزۆپۆتامیا دەکەوێتە نێوان هەردوو ڕووباری دیجلە و فوراتەوە، لەو شوێنەی کە هەردوو ڕووبارەکە سەرچاوە دەگرن تا یەك دەگرنەوە و دەڕژێنە ناو دەریای کەنداوی عەرەبی. بەو شوێنانە وتراوە میزۆپۆتامیا کە لەم دواییدا عەرەبەکان ئەو دۆڵەیان ناونا (*وادي الرافدَيْن*) واتە دۆڵی هەردوو ڕووبارکە.

## ڕوانین بۆ دواوە

**هەژماری ئەم بڕانە بکە و وەڵامەکان بە سادەترین شێوە ئەگەر کرا بنووسە.**

56 $\frac{4}{7}\times\frac{1}{2}$

57 $\frac{6}{11}\times\frac{2}{3}$

58 $21\div\frac{7}{8}$

59 $10\div\frac{5}{6}$

**ئەم هاوکێشانە شیکاربکە.**

60 $3(x-5)=4$

61 $\frac{x}{3}+9=2$

62 $3x-5=x+12$

63 $\frac{1}{5}x-4=3(x-5)$

## ڕوانین بۆ پێشەوە

64 شیکارکردنی هاوکێشەکان وا دەکات کە پێویستی بەبەکارهێنانی هەموو جۆرە ژمارەکان بێت. شیکاری هاوکێشەی $x+7=5$ ژمارەیەکی سالبە سەرەڕای ئەوەی هاوکێشەکە تەنها ژمارەی موجەبی تێدایە، و شیکاری $2x=5$ ژمارەیەکی ڕێژەییە سەرەڕای ئەوەی هاوکێشەکە تەنها ژمارەی تەواوی تێدایە.

أ نموونەیەکی نوێ بۆ هاوکێشەیەك بهێنەرەوە جگە لە ژمارەی ناسالب ژمارەیەکی تری تێدانەبێت و بەڵام شیکارەکەی ژمارەی سالب بێت.

ب نموونەیەکی نوێ بۆ هاوکێشەیەك بهێنەرەوە کە جگە لە ژمارەی تەواو ژمارەیەکی تری تیانەبێ و بەڵام شیکارەکەی ژمارەی ناتەواو بێت.

# وانەی 2

# هاوكێشەكان Equations



**بۆچی**

دەتوانین شیكاری زۆر لە پرسیارەكانی ژیانی ڕۆژانە بەبەكارهێنانی هاوكێشەكان ئەنجام بدەین كە لە تەرازوو دەچێت. و هاوتایی وا دەكات كرداری یەكسانی لەگەڵ هەردوو تای تەرازووەكە ئەنجام بدەین. (یان هەر لایەكی هاوكێشەكە)

**ئامانجەكان**

- سیفەتەكانی یەكسانی دەناسێت و بەكاریاندێنێت
- هاوكێشە هێڵییەكان دەنووسێت و بە جەبری و بەڕوونكردنەوەیی شیكاریان دەكات
- هاوكێشە زۆر گۆڕاوەكان شیكاردەكات بە هەژماركردنی یەكێكیان بەپێی ئەوانی تر.

**هاوكێشە Equation** بریتییە لە یەكسانبوونی نێوان دوو بڕ گۆڕاوێك یان زیاتری تێدایە پێی دەوترێت **نەزانراو Unknown** .

$12x = 10$ هاوكێشەیەكی یەك گۆڕاوە كە ئەویش $x$ ە.

$2x + 3y = 12$ هاوكێشەیەكی دوو گۆڕاوە كە بریتین لە $x$ و $y$ .

هەر ژمارەیەك پاسادانی هاوكێشەكە بكات بەلەجیاتیدانان (واتە بیگۆڕێت بۆ یەكسانبوونێكی ڕاست پاش دانانی ژمارەكە لەجیاتی نەزانراوەكە) پێی دەوترێت **ڕەگی Root** هاوكێشەكە.

ژمارەی $\frac{5}{6}$ بۆ نموونە ڕەگە بۆ هاوكێشەی $12x = 10$ چونكە بەدانانی ئەو ژمارەیە لەجیاتی نەزانراوەكە وادەكات یەكسانەكە تەواوبێت: $12 \times \frac{5}{6} = 10$

شیكاركردنی هاوكێشە بریتییە لە دۆزینەوەی كۆمەڵە ژمارەیەك كە ڕەگەكانی هاوكێشەكەن، ئەو كۆمەڵەیە پێی دەوترێت **كۆمەڵە شیكاری هاوكێشەكە Solution Set of equation** . دەشێت ئەو كۆمەڵەیە تەنها یەك دانەی تێدابێت و هەروەها دەشێت لەیەك دانە زیاتری تێدابێ و یانیش دەكرێ ناكۆتا دانەی تێدابێ. و دەشێت كۆمەڵەی شیكار هیچ دانەیەكی تێدانەبێت، واتە كۆمەڵەكە **بەتاڵ Empty Set** $\varnothing$ بێت.

**سیفەتەكانی یەكسانبوون** لە نێوان ژمارە ڕاستییەكان و سیفەتی لە جیاتیدانان بەكاربهێنە لە كاتی شیكاركردنی هاوكێشەكان.

| سیفەتی یەكسانبوون | Properties of Equality |
|---|---|
| سیفەتی وێنەدانەوە | $a = a$ |
| سیفەتی هاوجێبوون | ئەگەر $a = b$ ئەوا $b = a$ |
| سیفەتی تێپەڕبوون | ئەگەر $a = b$ وە $b = c$ ئەوا $a = c$ |
| سیفەتی كۆكردنەوە | ئەگەر $a = b$ ئەوا $a + c = b + c$ |
| سیفەتی لێدەركردن | ئەگەر $a = b$ ئەوا $a - c = b - c$ |
| سیفەتی لێكدان | ئەگەر $a = b$ ئەوا $ac = bc$ |
| سیفەتی دابەشكردن | ئەگەر $a = b$ ئەوا $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ كاتێك $c \neq 0$ |
| سیفەتی لەجیاتیدانان | ئەگەر $a = b$ بە لەجیاتیدانانی $b$ لە $a$ . لە هەر دەستەواژەیەكی بیركاری دروستدا هەر بە دروستی دەمێنێتەوە. |

شیكاركردنی هاوكێشەكان بە سادەكردنی بڕەكان و كۆكردنەوەی ژمارەكان دەستپێدەكات.

## نموونە 1

**جێبەجێکردن**
**پلەکانی گەرما**

دوو جۆرە پێوەر هەیە بۆپێوانی پلەکانی گەرمی: پێوەری سەدی ( Celsius ) و پێوەری فەهرەنهایت ( Fahrenheit ) و پەیوەندی نێوان هەردوو پێوەرەکە برتییە لە $F=\frac{9}{5}C+32$ هێمای $F$ پلەی گەرمییە بە فەهرەنهایت و $C$ هێمای پلەی گەرمییە بە پلەی سەدی. لە ڕاگەیاندنی کەش و هەوادا هاتووە کە پلەی گەرمی ئەمڕۆ 86 پلەیە لەسەر پێوەری فەهرەنهایتی. پلەی گەرمییەکە بە پێوەری سەدی چەندە؟

**شیکار**

| | |
|---|---|
| $F=\frac{9}{5}C+32$ | ڕێساکە |
| $86=\frac{9}{5}c+32$ | بە دانانی 86 لەجیاتی $F$ |
| $86-32=\frac{9}{5}C+32-32$ | بە دەرکردنی 32 لە هەردوولای هاوکێشەکەبەبەکارهێنانی سیفەتی لێدەرکردن |
| $54=\frac{9}{5}C$ | سادەکردن |
| $\frac{5}{9}\times 54=\frac{5}{9}\times\frac{9}{5}C$ | بە لێکدانی هەردوولای هاوکێشەکە لە $\frac{5}{9}$ بەبەکارهێنانی سیفەتی لێکدان |
| $30=C$ | سادەبکە |
| $C=30$ | سیفەتی هاوجێبوون بەکاربهێنە |

## نموونە 2

هاوکێشەی $2x+7=5x-9$ شیکاربکە.

**شیکار**

| | |
|---|---|
| $2x+7=5x-9$ | هاوکێشەکە |
| $2x+7-7=5x-9-7$ | بە دەرکردنی 7 لە هەردوولا بەبەکارهێنانی سیفەتی لێدەرکردن |
| $2x=5x-16$ | سادە بکە |
| $2x-5x=5x-16-5x$ | بە دەرکردنی $5x$ لە هەردوولا بەبەکارهێنانی سیفەتی لێدەرکردن |
| $-3x=-16$ | سادە بکە |
| $\frac{-3x}{-3}=\frac{-16}{-3}$ | بە دابەشکردنی هەردوولا بەسەر $-3$ دا بەبەکارهێنانی سیفەتی دابەش |
| $x=\frac{16}{3}$ | سادە بکە |

ساغبکەوە: $2\times\frac{16}{3}+7\overset{?}{=}5\times\frac{16}{3}-9$

$\frac{32+21}{3}\overset{?}{=}\frac{80-27}{3}$

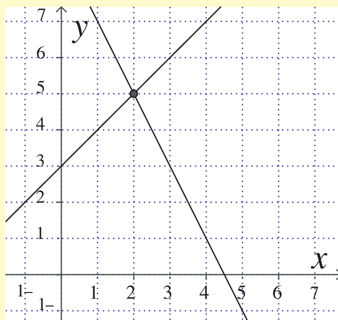
$\frac{53}{3}\overset{?}{=}\frac{53}{3}$ ڕاستە

کەواتە $x=\frac{16}{3}$ ڕەگی هاوکێشەکەیە

**هەوڵبدە** شیکاری هاوکێشەی $3x+12=-5x+24$ بکە و ساغکردنەوەی شیکارەکەش بکە بەلەجیاتیدانان.

## چالاكی

## دۆزینەوەی شیكاری هاوكێشەكان بە ڕوونكردنەوەیی
## Exploring Graphic Solution Method

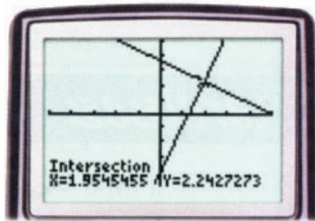


1. ئەو دوو بڕە یەكسانە كامانەن كە ئەم هاوكێشەیان لێپێكدێت $x+3=9-2x$ ؟
2. لەهەمان ڕووتەختی پۆتانەكاندا وێنەی هەردوو ڕاستە هێڵی $y=x+3$ و $y=9-2x$ بكێشە.
3. بەهای پۆتانی سینی بۆ خاڵی یەكتربڕینی هەردوو ڕاستەهێڵەكە چەندە؟
4. بە لەجیاتیدانان پاسادانی بەهایەكە بكە، ئایا دەبێتە شیكاری هاوكێشەكە؟
5. ڕوونیبكەوە چۆن هاوكێشەی $2x+1=2-x$ بە ڕوونكردنەوەیی شیكاردەكەیت.

خاڵی چاودێری ✓

### نموونە 3

هاوكێشەی $y = 0.72x + 3.65$ ، $y = 3.24x - 4.09$ بە ڕوونكردنەوەیی شیكاربكە.




**شیكار**

وێنەی ڕاستەهێڵی $y = 3.24x - 4.09$ و ڕاستەهێڵی $y = 0.72x + 3.65$ بكێشە بە بەكارهێنانی بژمێری ڕوونكردنەوەیی یان كاغەزی ڕوونكردنەوەیی و خاڵی یەكتربڕینی هەردوو ڕاستەهێڵەكە دیاربكە، پۆتانی سینی خاڵی یەكتربڕینەكە زۆر نزیكە لە ژمارە 3 و لەوانەیە 3.07 بێت. كەواتە شیكارەكە بە نزیكەیی دەكاتە 3.07 .

**هەوڵبدە** هاوكێشەی $2.24x - 6.24 = 4.26x - 8.76$ بە ڕوونكردنەوەیی شیكار بكە.

## هاوكێشە پیتییەكان — Literal Equations

هاوكێشەی پیتی ئەو هاوكێشەیە كە دوو گۆڕاو یان زیاتری تێدایە. ئەو هاوكێشانە یاساكانی هەژمێركردنی ڕووبەر و قەبارەكان دەگرێتەوە.

### نموونە 4

پزیشكەكان یاسایەك بەكاردەهێنن بۆدەستنیشانكردنی بڕی ئەو دەرمانەی كە دەدرێتە منداڵەكان بەپێی ئەوەی دەدرێتە گەورەكان، ئەم یاسایەش بریتییە لە $c=\frac{a}{a+12}\times d$ كە $c$ بڕی ئەو دەرمانەیە كە بە منداڵێك دەدرێت، $a$ تەمەنی منداڵەكە بێت، $d$ بڕی ئەو دەرمانەیە كە دەدرێتە گەورەیەك. شیكاری ئەم هاوكێشەیە بكە بەپێی گۆڕاوی $d$ (واتە ئەم گۆڕاوە بەپێی گۆڕاوەكانی تر بدۆزەوە).

| | |
|---|---|
| $c=\frac{a}{a+12}\times d$ | هاوكێشەكە |
| $c(a+12)=(a+12)\frac{a}{a+12}\times d$ | سیفەتی لێكدان بەكاربهێنە |
| $c(a+12)=ad$ | سادەبكە |
| $\frac{c(a+12)}{a}=\frac{ad}{a}$ | سیفەتی بەشینەوە بەكاربهێنە |
| $d=\frac{c(a+12)}{a}$ | سادەبكە |

جێبەجێكردن
پزیشكی



بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە

هاوکێشەی نموونە ٤ بەپێی گۆڕاوی $a$ شیکار بکە.

خاڵی چاودێری ✓

دوو هاوکێشە هاوتا **Equivalent** دەبن ئەگەر هەمان شیکاریان هەبێت. لەجیاتیدانان بەکاربهێنە بۆ ئەوەی ساغبکەیتەوە دوو هاوکێشەی $86 = \frac{9}{5}x + 32$ ، و $\frac{9}{5}x = 54$ هاوتان.

# ڕاهێنـــــــــان

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

سیفەتی بەکارهێنراو بۆ شیکاری ئەم هاوکێشانە دیاربکە.

**1** $52 = -2.7x - 3$ **2** $x + 2.2 = \frac{x}{5}$ **3** $3x - 5 = 2x - 2$

**4** باسبکە چۆن هاوکێشەیەکی هاوتای $4x - 7 = 4$ دەستدەکەوێت.

**5** باسبکە چۆن هاوکێشەی $\frac{9(x-3)}{7} = \frac{2(x+3)}{7}$ شیکاردەکەیت بە ڕوونکردنەوەیی.

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئەم هاوکێشانە شیکار بکەو شیکارەکانیش پاسادانبکە.

**6** $4x + 12 = 20$ **7** $\frac{x}{5} + 3 = 4$

**8** $-\frac{5}{2}x + \frac{5}{2} = 2 - 3x$ **9** $7 - 6x = 2x - 9$

**10** هاوکێشەی $Ax + By = C$ شیکاربکە، کاتێك $B \neq 0$ بۆ هەژمێرکردنی $y$ بەپێی گۆڕاوەکانی ترەوە.

## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ئەم هاوکێشانە شیکاربکە.

**11** $2x - 5 = 1$ **12** $-2x - 7 = 9$

**13** $5x - 3 = 12$ **14** $20 = 6x - 10$

**15** $4 - 5x = 19$ **16** $3x + 1 = \frac{1}{2}$

**17** $4x + 80 = -6x$ **18** $7x = -2x + 5$

**19** $5x + 3 = 2x + 18$ **20** $4x - 3 = x + 7$

**21** $\frac{1}{5}x + 3 = 2$ **22** $\frac{1}{4}x - \frac{5}{2} = -2$

**23** $\frac{1}{2}x + 2 = 0$ **24** $\frac{1}{3}x = -x + 4$

**25** $x - 5 = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ **26** $-\frac{1}{3}x + 1 = \frac{3}{2}x - 1$

**27** $\frac{2}{3}x + 9 = \frac{1}{2}x + 4$ **28** $\frac{1}{4}x - 3 = 6x$

**29** $\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}x-1$ **30** $\frac{2}{5}x+\frac{6}{5}=x-3$

**ئەم هاوکێشانە شیکار بکە و شیکارەکە بۆ نزیکترین بەش لەسەد نزیکبکەوە.**

**31** $0.24x+1.1=2.56x-1.5$

**32** $1.05x-4.28=+2.65x+4.1$

**33** $0.67x-8.75=-0.48x+3.99$

**34** $5.9(0.33x-1.33)=-1.03x-5.72$

**شیکاری ئەم هاوکێشانە بکە بە هەژمارکردنی نەزانراوی دانراو لە نێوان دوو کەوانەی بەرامبەردا بەپێی نەزانراوەکانی تر.**

**35** $\frac{1}{2}bh=A$ $(b)$

**36** $P=2l+2w$ $(w)$

**37** $\frac{1}{R}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$ $(r_2)$

**38** $A=\frac{1}{2}h(b_1+b_2)$ $(b_2)$

**39** $A=\frac{1}{2}h(b_1-b_2)$ $(h)$

**40** $Y=\frac{u+1}{u+2}$ $(u)$

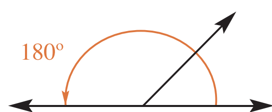
**41** $ax+b=cx+d$ $(x)$

**42** $ax+b=cx+d$ $(d)$

**43** ئەگەر $y=4x+7$ هەبێت، لەجیاتیدانان بەکاربهێنە بۆئەوەی هاوکێشەی $-2x+y=19$ شیکاربکەی.

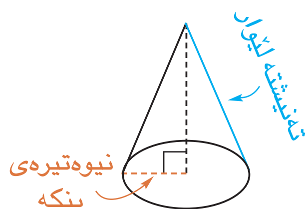
**بەستنەوە**

**44** **ئەندازە** پێوانەی یەکێك لە دوو گۆشەی یەکتر پڕکەر دەکاتە دوو ئەوەندەی گۆشەکەی تر کە $45^{o}$ ی بۆ زیادکرابێت. هاوکێشەیەك بنووسە و بەکاریبهێنە بۆ دۆزینەوەی پێوانەی هەردوو گۆشەکە.




**بەرەنگاری**

**45** **ئەندازە** یاسای $A=\pi rs+\pi r^2$ ڕێدەدات بۆ هەژمێرکردنی ڕووبەری قووچەك کاتێ، $A$ هێمای ڕووبەری قوچەکەکە بێت، $r$ نیوەتیرەی بنکەکەی بێت و $s$ درێژی تەنیشتە لێوارەکەی بێت، یاساکە بنووسە بە هەژمێرکردنی تەنیشتە لێوارەکەی $s$ بەپێی ڕووبەر $A$ و نیوەتیوەی بنکەکەی $r$ .



## ڕوانینێك بۆ دواوه

ئەم بڕانە هەژمێر بکە بەبەکارهێنانی ڕیزبەندی کردارەکان.

46 $3(2-(5-3)-7)+2$

47 $-(-5^2)^3$

## ڕوانینێك بۆ پێشەوه

ئەم دەستەواژە بیرکاریانە چی دەگەیەنێت باسبکە.

48 $y > -5$

49 $-3 < x < 3$

50 $-1 \le y \le 1$

51 $x \ge -3$

# لاسەنگەکان Inequalities

**بۆچی**

دەتوانین زۆر لە پێداویستییەکانی ژیانی ڕۆژانە بەبەکارهێنانی لاسنگەکان ئەنجام بدەین. نموونەش بۆ ئەمە ڕێژەی چەوری کە پێویستە مرۆڤ لە خواردنیدا زیاد نەکات بۆ ئەوەی تووشی سەرئێشە نەبێت.



**ئامانجەکان**

- لاسەنگەی هێڵی بە یەك گۆڕاو دەنووسێت و بە جەبری وبە ڕوونکردنەوەیی شیکاری دەکات.
- لاسەنگە هێڵیە ئاوێتەکان بە یەك گۆڕاودا بە جەبری وبە ڕوونکردنەوەیی شیکاردەکات.

**جێبەجێکردن**
خواردن

یەك لە لێکۆڵینەوەکان دەریخستووە کە ئەو کەسانەی بڕی چەوری لە خواردنەکانیاندا کەمدەکەنەوە بۆ کەمتر لە 20% لە بەهای ئەو گەرمۆکە گەرمیەی دەیخۆن کەمتر تووشی سەرئێشان دەبن، ئەگەرهێمای $c$ بۆ گەرمۆکەی گەرمی خواردنی تاکێك دابنرێت، پێویستە ژمارەی گەرمۆکەی چەوری $F$ زیاتر نەبێت لە 20% ی $c$ ئەمە بەڕێگای ڕستەی بیرکاری $F \le 0.2c$ دەردەبڕدرێن.

نموونەی ئەم جۆرە ڕستەیە پێیدەوترێت لاسەنگە **Inequality**.

بە شێوەیەکی گشتی هەر ڕستەیەکی بیرکاری ئەم هێمایانەی $(\le;\ \ge;\ <;\ >)$ تێدابێت بریتییە لە لاسەنگە.

بۆ شیکاری لاسەنگەکان، سیفەتەکانی لاسەنگە لە نێوان ژمارە ڕاستییەکاندا بەکاربهێنە.

**سیفەتەکانی لاسەنگە Properties of inequality**

| | |
|---|---|
| سیفەتی کۆکردنەوە **Addition Property** | ئەگەر $a \le b$ ، ئەوا $a+c \le b+c$ |
| سیفەتی لێدەرکردن **Substraction Property** | ئەگەر $a \le b$ ، ئەوا $a-c \le b-c$ |
| سیفەتی لێکدان **Multiplications Property** | ئەگەر $a \le b$ ، ئەوا $ac \le bc$ کاتێك $c>0$ |
| | ، ئەوا $ac \ge bc$ کاتێك $c<0$ |
| سیفەتی دابەشکردن **Division Property** | ئەگەر $a \le b$ ، ئەوا $\frac{a}{c} \le \frac{b}{c}$ کاتێك $c>0$ |
| | ، ئەوا $\frac{a}{c} \ge \frac{b}{c}$ کاتێك $c<0$ |

ئەم سیفەتانەی سەرەوە بە ڕاستی دەمێننەوە بە بەکارهێنانی هێماکانی تری لاسەنگە.

کۆمەڵەی شیکاری **Solution Set** لاسەنگە بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانی کە بە لەجیاتیدانانی لە لاسەنگەکەدا لاسەنگەکە ڕاست دەبێت.

بۆ نموونە دوو ژمارە ڕاستی $\frac{1}{2}$ ، $-1$ دوو شیکارن بۆ لاسەنگەی $6x+1<13$ ، چونکە بە لەجیاتیدانانی هەر یەکێك لەو دوو ژمارەیە لەجیاتی نەزانراوی $x$ دوو لاسەنگەی ژمارەیی ڕاستمان دەداتێ.

$$6x+1<13 \quad\quad 6x+1<13$$
$$6\left(\frac{1}{2}\right)+1\overset{?}{<}13 \quad\quad 6(-1)+1\overset{?}{<}13$$
$$3+1\overset{?}{<}13 \quad\quad -6+1\overset{?}{<}13$$
$$4\overset{?}{<}13 \text{ ڕاستە} \quad\quad -5\overset{?}{<}13 \text{ ڕاستە}$$

**خاڵی چاودێری** ✔ ئایا دەتوانیت هەندێ شیکاری تر بۆ لاسەنگەکەی پێشوو بدۆزیتەوە؟ بەلەجیاتی دانان ساغبکەوە.

## نموونە 1

لاسەنگەی $4x-5\geq 13$ شیکاربکە .

**شیکار**

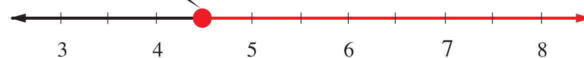
| | |
|---|---|
| $4x-5\geq 13$ | لاسەنگەکەیە |
| $4x-5+5\geq 13+5$ | سیفەتی کۆکردنەوە بەکاربهێنە |
| $4x\geq 18$ | سادەکردن |
| $x\geq \frac{18}{4}=4.5$ | سیفەتی دابەشکردن بەکاربهێنە |

کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگەکەی پێشوو بریتییە لە کۆمەڵەی ئەو ژمارە ڕاستیانەی بچووکترنین لە 4.5 .

**هەوڵبدە** لاسەنگەی $-4<7-3x$ شیکاربکە.

دەتوانی کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگەی یەك گۆڕاو لەسەر تەوەرەی ژمارەکان بنوێنی. ئەم وێنەی خوارەوە کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگەی $4x-5\geq 13$ دەنوێنێت.

بازنە بچووکە پڕەکە نیشانەی ئەوەیە کە 4.5 سەر بە کۆمەڵەی شیکارەکەیە.



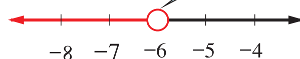

## نموونە 2

لاسەنگەی $4-3x>16-x$ شیکاربکە و کۆمەڵەی شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

**شیکار**

| | |
|---|---|
| $4-3x>16-x$ | لاسەنگەکەیە |
| $4-3x+x>16-x+x$ | سیفەتی کۆکردنەوە بەکاربهێنە |
| $4-2x>16$ | سادەکردن |
| $4-2x-4>16-4$ | سیفەتی دەرکردن بەکاربهێنە |
| $-2x>12$ | سادەکردن |
| $\frac{-2x}{-2}<\frac{12}{-2}$ | سیفەتی دابەشکردن بەسەر ژمارەیەکی سالب بەکاربهێنە |
| $x<-6$ | سادەکردن |

بازنە بەتاڵەکە نیشانەی ئەوەیە کە $-6$ سەر بە کۆمەڵەی شیکار نییە .




**هەوڵبدە** لاسەنگەی $5-7b>8-4b$ شیکاربکە.

نموونە 3

جێبەجێکردن

ئەزموونەکان

نمرەی کۆتایی خوێندکار دیاریدەکرێت بە دوو نمرەی تاقیکردنەوە بە ڕێژەی دووسێیەك و ئەرکی ماڵەوە بە ڕێژەی سێیەك لە یەکێك لە خوێندگاکاندا. نمرەی سالار لە تاقیکردنەوەی مێژوودا 90 لە 100 بوو. **کەمترین نمرەی ئەرکی ماڵەوکە پێویستە سالار وەریبگرێت چەندە بۆ ئەوەی نمرەی کۆتایی لە 93 لە 100 کەمتر نەبێت؟**

**شیکار**

دەتوانیت پێدراوەکانی پرسیارەکە بەم شێوەیەی خوارەوە بنووسیت.

$$\text{نمرەی کۆتایی} = \frac{2}{3}\left(\text{نمرەکانی تاقیکردنەوە}\right) + \frac{1}{3}\left(\text{نمرەکانی ئەرکی ماڵەوە}\right)$$

یان $f = \frac{2}{3}(90) + \frac{1}{3}h$ کە $f$ نمرەی کۆتاییە، $h$ نمرەی ئەرکی ماڵەوەیە بۆ ئەوەی $f$ لە 93 کەمتر نەبێت پێویستە $h$ شیکاری لاسەنگەی $93 \le \frac{2}{3}(90) + \frac{1}{3}h$ پێکبێنێت.

شیکاری ئەم لاسەنگەیە:

| | |
|---|---|
| $93 \le \frac{1}{3}h + 60$ | سادەبکە |
| $93 - 60 \le \frac{1}{3}h + 60 - 60$ | سیفەتی لێدەرکردن بەکاربهێنە |
| $33 \le \frac{1}{3}h$ | سادەبکە |
| $3 \times 33 \le 3 \times \frac{1}{3}h$ | سیفەتی لێکدان بەکاربهێنە |
| $99 \le h$ | سادەبکە |

کەواتە، پێویستە نمرەی ئەرکی ماڵەوە لە 99 کەمتر نەبێت بۆ ئەوەی نمرەی کۆتایی لە 93 کەمتر نەبێت.

## چالاکی

### دۆزینەوەی شیکاری لاسەنگەکان بە ڕوونکردنەوەیی
### Exploring Inequalities Grayphically

1. لاسەنگەی $2x - 3 < 3$ شیکاربکە.
2. وێنەی دوو ڕاستەهێڵی $y = 2x - 3$ و $y = 3$ لە هەمان ڕووتەختی پۆتان بکێشە.
3. بەهاکانی گۆڕاوی $x$ دیاریکە کەوا دەکات ئەو خاڵەی سەر بە ڕاستەهێڵی $y = 3$ بەرزتر بێت لەو خاڵەی کە دەکەوێتە سەر ڕاستەهێڵی $y = 2x - 3$ .
4. ڕوونیبکەرەوە چۆن وەڵامی پرسیارەکەی پێشوو یارمەتیت دەدات بۆ شیکاری لاسەنگەکە.
5. لاسەنگەی $3x + 2 > 5$ بە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکە. هەنگاوەکان ڕوونبکەوە کە پێیان دەگەیتە شیکار.

ئایا ڕێگاکەی پێشوو بۆ شیکاری لاسەنگەی $2x - 3 > x + 4$ ؟ و هەروەها بۆ لاسەنگەی $4 \ge 3x + 1$ دەشێت؟ ئەمە ڕوونبیکەوە.

خاڵی چاودێری ✓

سەرنجێکی ڕەخنەگرانە

## لاسەنگە ئاوێتەکان Compound Inequalities

ژوان ئەنجامی پشکنینی ڕێژەیی شەکری لە خوێنەکەی خوێدا خوێندەوە، لەسەری نوسرابوو کە ئەم هێندە ( $s$ ) پێویستە کەمتر نەبێت لە 750 ملیگرام لە لیترێکدا و زیاتر نەبێت لە 1100 ملیگرام لە لیترێکدا. کەواتە پێویستە $s$ پاسادانی هەردوو مەرجی $s \ge 750$ و $s \le 1100$ بکات. واتە دەبێت شیکاری هاوبەش بۆ هەردوو لاسەنگەی $x \ge 750$ و $x \le 1100$ بێت.

کاتێك دوو لاسەنگە بە ئامرازی بەیەکبەستن «و»بەیەکتر دەبەسترێنەوە یا ∧ **لاسەنگەیەکی ئاوێتەمان Compound Inequality** دەستدەکەوێت.

بۆ شیکارکردنی لاسەنگەیەکی ئاوێتە بە ئامرازی «∧» بەیەکبەستراون، دەستبکە بە شیکارکردنی هەریەکە لە دوو لاسەنگەکە بەجیا و شیکارە هاوبەشەکەیان وەربگرە. واتە کۆمەڵەی شیکاری دوو لاسەنگەی ئاوێتە بە ئامرازی بەکتربەستنی «و» بریتییە لە کۆمەڵەی یەکتربڕینی هەردوو کۆمەڵەی شیکاری دوو لاسەنگەکە هەریەکیان بەجیا.

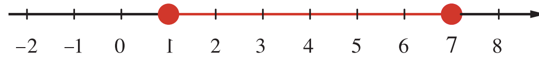
**نموونە 4**

**شیکاری $(3x-4\le 17)$ وە $(2x+1\ge 3)$ بکە و کۆمەڵە شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.**

**شیکار**

| | | |
|---|---|---|
| $3x-4\le 17$ | و | $2x+1\ge 3$ |
| $3x\le 21$ | و | $2x\ge 2$ |
| $x\le 7$ | و | $x\ge 1$ |

کۆمەڵەی شیکاری ئەم لاسەنگە ئاوێتەیە بریتییە لە کۆمەڵەی بەهاکانی $x$ کە پاسادانی $1\le x\le 7$ دەکات. و لەسەر تەوەری ژمارەکان بەم شێوەیە دەنوێنرێت.




بەشێوەیەکی گشتی دەتوانی $(x>a)\wedge(x<b)$ بە شێوەی $a<x<b$ دەربڕێت.

**هەوڵبدە**

شیکاری $(x-5>-12)\wedge(-2x+5\ge 3)$ بکە و کۆمەڵەی شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە. جۆرێکی تری لاسەنگە ئاوێتەکان کە بە ئامرازی «یان» دوو لاسەنگەکە دەبەسترێنەوە.

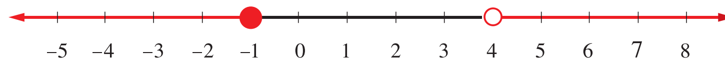
کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەی ئاوێتە کە بە ئامرازی« ∨» بەستراونەتەوە بریتییە لە یەکگرتنی هەردوو کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەکان هەریەکەیان بەجیا.

**نموونە 5**

**شیکاری $(3x+2\le -1)$ یان $(5x+1>21)$ بکە و کۆمەڵەی شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.**

**شیکار**

| | | |
|---|---|---|
| $3x+2\le -1$ | یان | $5x+1>21$ |
| $3x\le -3$ | یان | $5x>20$ |
| $x\le -1$ | یان | $x>4$ |




**هەوڵبدە**

شیکاری $(7x+1>36)\ \vee\ (2x\le 5)$ و کۆمەڵەی شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

# ڕاهێنان

## بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

**1** هەنگاوەکانی نواندنی کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگەی $7x-7>0$ لەسەر تەوەری ژمارەکان ڕوونبکەوە.

2 کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەی $7x-7>0$ و کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەی $7x-7\geq 0$ بەچی جیاوازن؟ کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگەی $7x-7>0$ و کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەی $7x-7<0$ بەچی جیاوازن.

3 ئایا هەردوو لاسەنگەی $x<16$ و $-x>-16$ هاوتان؟ ڕوونیبکەوە.

4 چۆن دەستەواژەی « $x$ ژمارەیەکی سالب نییە» بەبەکارهێنانی ئامرازەکانی لاسەنگە دەنووسیت.

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

5 لاسەنگەی $3x+1<13$ شیکاربکە و کۆمەڵە شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

6 لاسەنگەی $a+4<4a-11$ شیکاربکە و کۆمەڵە شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

جێبەجێکردنەکان

7 ئەزموونەکان نمرەی کۆتایی خوێندکار لە یەکێك لە خوێندگاکاندا بەیەکگرتنی نمرەی ئەزموونەکان بە ڕێژەی $\frac{3}{4}$ و نمرەی کۆششی ڕۆژانە بە ڕێژەی $\frac{1}{4}$ دیاردەکرێت. ئەگەر نمرەی کارزان لە کۆششی ڕۆژانەدا 92 لە 100 بێت ئەوا بەکەمترین نمرەی کارزان پێویستە وەریبگرێت لە ئەزموونەکاندا بۆ ئەوەی نمرەی کۆتایی لە 80لە 100 کەمتر نەبێت چەندە؟

8 شیکاری لاسەنگە ئاوێتەی$(2x+3<15)\wedge(3x-7\geq -13)$ بکە و کۆمەڵەی شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

9 شیکاری لاسەنگە ئاوێتەی$(4x-6<14)\vee(2x+4\leq -10)$ بکە و کۆمەڵە شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

**لاسەنگەیەك بنووسە بگونجێت لەگەڵ ئەو شیکارەی لەسەر تەوەری ژمارەکان نوێنراوە.**

10 11



12 13



**ئەم لاسەنگانە شیکاربکە و کۆمەڵە شیکارەکان لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.**

14 $5x<10$

15 $-5x>10$

16 $-5x<-10$

17 $a+4<10$

18 $\frac{1}{2}a-1\geq -15$

19 $\frac{1}{5}b-2\leq 28$

20 $-x+8<41$

21 $-5x-15\leq 60$

22 $\frac{y}{2}\leq 10$

23 $-\frac{y}{32}<2$

24 $-6(b+4)<12$

25 $6-(4a-3)\geq 8$

26 $4y-12>7y-15$

27 $3(4y-5)<8y+3$

28 $-4x-3<-6x-17$

29 $-5(3x+2)\geq 4(x-1)$

**شیکاری ئەم لاسەنگە ئاوێتانە بکە و کۆمەڵە شیکارەکان لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.**

30 $(x>-4)$ و $(x<2)$

31 $(x>-4)$ و $(x>2)$

32 $(x>-4)$ یان $(x>2)$

33 $(x>-4)$ یان $(x<2)$

34 $x > 2$ و $x < -4$ 35 $x < 2$ و $x < -4$

36 $x < 2$ یان $x < -4$ 37 $x > 2$ یان $x < -4$

شیکاری ئەم لاسەنگە ئاویتانە بکە، کۆمەڵەی شیکارەکان لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

38 $n - 3 > 12$ و $n + 4 < 16$

39 $y + 4 > 7$ و $y - 2 < 4$

40 $x - 2 < 2$ یان $x + 7 > 4$

41 $x - 1 > 3$ یان $x + 8 < 5$

42 $2(x+6) > -4$ و $-9x \geq -81$

43 $4(y-3) \leq -8$ و $-5y < 40$

شیکاری ئەم لاسەنگە ئاویتانە بکە، کۆمەڵەی شیکارەکان لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

44 $-4x \leq -20$ یان $20 - 3x \geq 11$

45 $5 - 4x \geq 17$ یان $14 - 3x \leq 2$

46 $8x \leq 3x - 15$ یان $2x > 7x - 10$

47 $\frac{1}{2}(16 - 4x) \geq 0$ یان $2x - 7 < 5x + 8$

48 شیکاری لاسەنگەی $-2a \leq 3x + a < 10$ بکە بە هەژماری بەهای نەزانراوی $x$ بەپێی گۆڕاوەکانی تر.

بەرەنگاری

جێبەجێکردنەکان




49 **کاری خێرخوازی** یەکێك لە دامەزراوە خێرخوازەکان بڕیاریدا کە ڕاکێشانێکی خێرخوازی ئەنجامبدات لەسەر ئوتومبیلێك کە یەکێك لە کۆمپانیاکان بەخشیبووی. پێشبینی دامەزراوە خێرخوازەکە 1250 بلیت بە لایەنی کەمەوە بفرۆشێتەوە بە هیوای دەستکەوتنی 210 000 000 دینار.

کەمترین نرخ بۆ بلیتێك چەندە ئەگەر بزانیت تێچوونی ڕاگەیاندن 15 000 000 دینار بێت.

50 تێچووی بەرهەمهێنانی کاڵایەکی دیاریکراو بریتییە لە $C = 40x + 868$ و داهاتی فرۆشتن بریتییە لە $R = 54x$ ، هێمای $x$ بریتییە لە ژمارەی یەکەکانی بەرهەمهێنراو، $C$ هێمای تێچوونی بەرهەمی ئەم یەکانەیە.

أ لاسەنگەیەك بنووسە دەستکەوتی قازانج دەرببڕێت.

ب بەلایەنی کەمەوە دامەزراوەکە پێویستە چەند یەکە بفرۆشێت بۆ ئەوەی زەرەر نەکات؟

ج لاسەنگەکەی پێشوو بکە بە ڕوونکرنەوەیی شیکاربکە.

## ڕوانینێك بۆدواوە

شیکاری ئەم هاوکێشە پیتیانە بکە بە هەژمێرکردنی نەزانراوی ناو دوو کەوانەکە بەپێی نەزانراوەکانی تر.

51 $A = p + prt$ $(t)$

52 $SA = 2ab + 2ac + 2bc$ $(a)$

## ڕوانینێك بۆ پێشەوە

53 دوو ژمارە دیاربکە کە بەهای ڕووتی هەریەکەیان بکاتە 4.

وانەی 4

# هێزەکان و ڕەگەکان

## Powers and Radicals

**ئامانجەکان**

- بەهای بڕێك هەژمێردەکات کە هێزی تێدابێت.
- ئەو برانەی هێزیان تێدایە سادەدەکات بەبەکارهێنانی یاساکانی هێز.

**بۆچی**

زۆرجار هێزەکان لە جێبەجێکردنە جیاوازەکاندا دەبینین. وەك چۆن لەفیزیادا، لەو چەقە هێزەی تووشی سواربووەیەك دەبێت لەسەر چەرخێکی خێرا لە شاری یاری. دەکرێت ئەمە دەربێڕین بەبەکارهێنانی هێزەکان.

**جێبەجێکردنەکان**

فیزیا

لەو یاریانەی کە زیاتر خەڵك پێی خۆشە لە شاری یاریدا، ئەو چەرخەیە کە دەسوڕێتەوە بە خێراییەکی زۆر بە دەوری تەوەرەیەکدا، کە دەبێتە هۆی دروستبوونی چەقەهێز. دەکرێت ئەو هێزە دەربڕێت بەم ڕێسایەی خوارەوە.

$$A = 4\pi^2 rT^{-2}$$

$A$ هێمای چەقەهێز بێت

$r$ نیوەتیرەی چەرخەکە بێت.

$T$ کاتی پێویست بێت بۆ تەواوکردنی خولێکی تەواو

پێشتر مامەڵەت کردووە لەگەڵ هێمای $a^n$ و پێی دەوترێت **هێزی ژمارەی** ***a*** **Power** بە توانی $n$، واتە ***a*** **بنچینەیە** **Base**، و $n$ **توانە** **Exponent** و $a^n$ دەخوێنرێتەوە $a$ توان $n$ .

### هێزی ژمارەیەکی ڕاستی Power of a Real Number

ئەگەر $a$ ژمارەیەکی ڕاستی بێت ئەوا :

$a^n = \overbrace{a\times a\times \ldots \times a}^{n \text{ جار}}$ ( $n$ جار) کاتێك $n$ ژمارەیەکی تەواوی مووجەب بێت.

$a^n = 1$ کاتێك $n = 0$ کەواتە $a^0 = 1;\ a \neq 0$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ کاتێك $n$ ژمارەیەکی تەواوی موجەب بێت و $a \neq 0$.

ناکرێت ژمارەی $a$ بکاتە سفر لە بڕی $a^0$ چونکە $0^0$ پێناسە نەکراوە. نموونەی 1 بۆمان ڕووندەکاتەوە کە چۆن پێناسەی $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ بەکاردێت.

نموونە 1

بە گەڕانەوە بۆنموونەی چەقەهێز، هەژمێری تاودانی ئەو هێزە بکە، کە سواربوویەك لە چەرخێکدا دەسوڕێتەوە نیوەتیرەکەی 6m بێت بە خێرایی یەك خول لە دوو چرکەدا.

شیکار

بەهای بڕی $A = 4\pi^2 rT^{-2}$ هەژمێر بکە کاتێك $r = 6$ ، $T = 2$ ، ئەمەت دەستدەکەوێت.

$$A = 4\pi^2 rT^{-2} = 4\pi^2(6)(2)^{-2} = \frac{24\pi^2}{2^2} = \frac{24\pi^2}{4} = 6\pi^2 \approx 59.2$$

هەوڵبدە

هەژماری تاودانی ئەو هێزە بکە کە سواربوویەك بۆ یەك خول لە 5 چرکەدا دەسوڕێتەوە لە چەرخێکدا نیوەتیرەکەی 6 مەترە.

## چالاکی

## Exploring Properties of Exponents دۆزینەوەی سیفەتەکانی هێز

1. دووبارە $a^3 \times a^5$ بنووسە وە بە شێوەی هێز بە ڕێگای هەڵوەشاندنەوەی هەریەك لە هەردوو هێزەکە و دووبارە کۆکردنەوەی کۆڵکەکان. ئەو کردارە کامەیە کە دەتوانیت بیکەیت لەسەر هەردوو توانەکە بۆ ئەوەی هەمان ئەنجامت دەستبکەوێت؟
2. دووبارە بڕی $(a^3)^5$ بە شێوەی هێز بنووسەوە بە ڕێگای هەڵوەشاندنی هەردوو هێزەکە و دووبارە کۆکردنەوەی کۆڵکەکان. ئەو کردارە کامەیە کە دەتوانیت بیکەیت لەسەر هەردوو توانەکە بۆ ئەوەی هەمان ئەنجامت دەستکەوێت؟
3. چۆن بڕی $(a^3 \times a^7)^2$ بە سادەترین شێوە دەنووسیت بە شێوەی هێز، بێ هەڵوەشاندنەوەی هێزەکان. ئەمە ڕوونبکەوە.

خاڵی چاودێری ✓

ئەو چالاکییەی سەرەوە یارمەتیت دەدات بۆ بەدەستهێنانی ئەم سیفەتانەی خوارەوە بۆ هێزەکان کاتێك $a \neq 0$ ، $b \neq 0$

**Properties Exponents $b \neq 0$ ، $a \neq 0$ سیفەتەکانی هێز**

| | | |
|---|---|---|
| لێکدانی هێزەکان | Product of Powers | $a^m \times a^n = a^{m+n}$ |
| دابەشبوونی هێزەکان | Divide of Powers | $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ |
| هێزی هێزەکان | Power of a Power | $(a^m)^n = a^{mn}$ |
| هێزی ئەنجامی لێکدان | Power of a Product | $(ab)^n = a^n \times b^n$ |
| هێزی ئەنجامی دابەشکردن | Power of a Quotient | $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ ، $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ |

لەم وانەیەدا وای دادەنێین هەموو ژمارە بەکارهێنراوەکان بۆ بنچینەی هێزی توان سالب بریتیە لە ژمارەی جیاواز لە «سفر».

نموونە 2

بڕی $3x^2y^{-2}(-2x^3y^{-4})$ سادەبکە. ئەنجام بەبەکارهێنانی هێزەکانی توانی موجەب بنووسە.

شیکار

$3x^2y^{-2}(-2x^3y^{-4})$ بڕەکەیە

$= 3(-2)x^2x^3y^{-2}y^{-4}=$ سیفەتی ئاڵوگۆڕ لە لێکدان بەکاربهێنە

$= -6x^{3+2}y^{-2+(-4)}$ سیفەتی لێکدانی هێزەکان بەکاربهێنە

$= -6\frac{x^5}{y^6}$ سادەکردن و بەکارهێنانی $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

هەوڵبدە

بڕی $2z(3x^2)(5z^{-3})$ سادەبکە پاشان ئەنجامەکە بە بەکارهێنانی هێزەکانی توان موجەب بنووسە.

**شیکارکردنی پرسیارەکان** **بەدوای شێوازێکدا بگەڕێ** سەرنج بدە لەوەی لە هێزی ژمارەی سالب ڕوودەدات.

$$(-2)^2 = (-2)(-2) = 4$$
$$(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$$
$$(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$$
$$(-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$$

تێبینی بکە هێزی ژمارەی سالب بریتییە لە ژمارەیەکی موجەب کاتێک توانەکە جووت بێت و دەکاتە ژمارەیەکی سالب کاتێک توانەکە تاک بێت.

پێویستە ئاگاداری ئەوە بیت کە بنچینەی سالب و توانی سالب تێکەڵ نەکەیت.

| توانی جووت | توانی تاک |
|---|---|
| $(-2x)^{-2}$ | $(-2x)^{-3}$ |
| $= \frac{1}{(-2x)^2}$ | $= \frac{1}{(-2x)^3}$ |
| $= \frac{1}{(-2)^2 x^2}$ | $= \frac{1}{(-2)^3 x^3}$ |
| $= \frac{1}{4x^2}$ | $= \frac{1}{-8x^3} = -\frac{1}{8x^3}$ |

**نموونە 3** بڕی $\left(\frac{-y^7}{2x^{12}y^3}\right)^4$ سادەبکە. ئەنجامەکە بە توانی موجەب بنووسە.

**شیکار**

$\left(\frac{-y^7}{2x^{12}y^3}\right)^4 = \frac{(-y^7)^4}{(2x^{12}y^3)^4}$ سیفەتی هێزەکانی ئەنجامی بەشکردن بەکاربهێنە

$= \frac{y^{28}}{16x^{48}y^{12}}$ سیفەتی هێزی هێز بەکاربهێنە

$= \frac{y^{28-12}}{16x^{48}}$ سیفەتی دابەشبوونی هێز بەکاربهێنە

$= \frac{y^{16}}{16x^{48}}$ سادەبکە

**هەوڵبدە** بڕی $\left(\frac{-3x^2y^5}{2y^2x^7}\right)^3$ سادەبکە و ئەنجامەکە بە توانی موجەب بنووسە..

**بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** هەریەکە لە $a$ ، $b$ ، $c$ بدۆزەوە کاتێک $x^{-3}y^4 = (x^{-2}y^3z^2)(y^az^bx^c)$.

## ڕەگەکان Radicals

دەتوانیت ئەو هێزانەی توانەکانیان ڕێژەیین بە شێوەیەکی تر بنووسیت کە ڕەگەکان لەخۆبگرێت.

بڕی $a^{\frac{1}{3}}$ دەکاتە $\sqrt[3]{a}$ چونکە $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a^{\frac{1}{3}\times 3} = a^1 = a$ . ئەم پەیوەندییە ڕاست دەبێت بۆ هەموو هێزێک کە توانی ڕێژەیی هەبێت.

واتە دەتوانیت بڕی $a^{\frac{2}{3}}$ بە چەند شێوەیەک وەک لە خوارەوە دێت بنووسیت.

$$a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}\times 2} = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{a}\right)^2$$

## ئەو هێزانەی کە توانی ڕێژەییان هەیە Powers With Rational Exponents

ئەگەر $a$ ژمارەیەکی ڕاستی موجەب بێت ئەوا :

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ کاتێك $n$ ژمارەیەکی تەواوی موجەبە و گەورەترە لە 1 .

$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ کە $m$ ، $n$ دوو ژمارەی تەواوین و $n$ موجەب بێت.

ئەم نموونەیەی خوارەوە پێناسەکەی سەرەوە ڕووندەکاتەوە.

**نموونە 4** هەژمێری بەهای هەریەکە لەم دوو بڕەیە $16^{\frac{1}{4}}$ و $27^{\frac{4}{3}}$ بکە.

شیکار

$$16^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2^{4\times\frac{1}{4}} = 2^1 = 2$$

$$27^{\frac{4}{3}} = (3^3)^{\frac{4}{3}} = 3^{3\times\frac{4}{3}} = 3^4 = 81$$

وەڵامەکەت بەبەکارهێنانی بژمێر پاسەدانبکە.

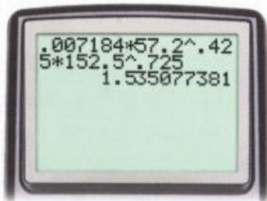
**هەوڵبدە** هەژماری بەهای هەریەکە لەم دوو بڕەیە $36^{\frac{3}{2}}$ و $64^{\frac{1}{3}}$ بکە.

**جێبەجێکردنەکان — پزیشکی**

پزیشکەکان بۆ خەمڵاندنی ڕووبەری گشتی مرۆڤ ڕێسایەك بەکاردەهێنن بە پشتبەستن بە درێژی و کێش، ئەوەش بۆ هەژمێری بڕی هەندێك دەرمان کە دەیدرێتێ و ڕێساکە ئەمەیە $S = 0.007184 \times W^{0.425} \times H^{0.725}$ کە $S$ ڕووبەری گشتییە بە مەتر دووجا، $W$ کێشە بە کیلۆگرام و $H$ درێژییە بە سانتیمەتر.

**نموونە 5** هەژمێری ڕووبەری گشتی مرۆڤێك بکە کێشەکەی **57.2kg** و درێژییەکەی **152.5cm** بێت. وەڵامەکەت بنووسە بۆ نزیکترین بەشی دەیی لە مەتر دووجا.

شیکار




$$S = 0.007184 \times W^{0.425} \times H^{0.725}$$
$$= 0.007184 \times (57.2)^{0.425} \times (152.5)^{0.725}$$
$$\approx 1.54$$

بەم پێیە ڕووبەری گشتی ئەو مرۆڤە بە نزیکەیی دەکاتە $1.5m^2$ .

**هەوڵبدە** هەژماری ڕووبەری گشتی مرۆڤێك بکە کە کێشەکەی 62.3kg و درێژی 180cm بێت. وەڵامەکە بنووسە بۆنزیکترین بەشی دەیی لە مەتر دووجادا.

# ڕاهێنان

## بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1 ڕوونیبکەوە بۆچی ئەم دوو بڕە یەکسان نین $a^5 \times a^3$ و $(a^5)^3$.

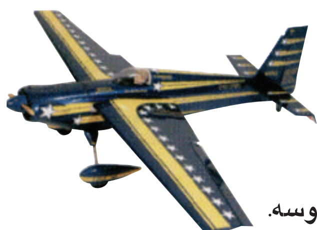
2 ڕوونیبکەوە بۆچی ئەم دوو بڕە یەکسان نین $ab^3$ و $(ab)^3$

3 ڕوونیبکەوە چۆن هەژمێری $5^{-2}$ دەکەیت.

4 ڕوونیبکەوە چۆن $4^{\frac{3}{2}}$ هەژمار دەکەیت بەبەکارهێنانی پێناسەی هێزەکان کە توانی ڕێژەییان هەیە.

## ڕاهێنانی ئاراستەکراو

جێبەجێکردنەکان



5 **فیزیا** هەژمێری تاودانی چەقەهێزی نموونەی (سامپل) فڕۆکەیەك بکە کە دەسوڕێتەوە بە خێرایی یەك خول لە چرکە و نیوێکدا بە دەوری تەوەرەیەکدا کە 3m لێوەی دوورە.

ئەمانە سادەبکە. وەڵامەکان تەنها بەبەکارهێنانی توانی موجەب بنووسە.

6 $a^4 \times a^2$

7 $\frac{x^9}{x^3}$

8 $(y^3)^6$

9 $(a^3b^7)^4$

10 $(y^5y^{-2})^4$

11 $\left(\frac{-2x^3y}{5x^7}\right)^2$

12 $\left(\frac{a^3b^{-1}}{a^{-2}b^2}\right)^{-2}$

13 $\left(\frac{1}{x^{-1}y^3z^0}\right)^{-1}$

هەژماری ئەم بڕانە بکە.

14 $(100)^{\frac{1}{2}}$

15 $(9)^{\frac{3}{2}}$

16 $(27)^{\frac{1}{3}}$

17 $(64)^{\frac{2}{3}}$

18 **پزیشکی** بەبەکارهێنانی بژمێر هەژمێری ڕووبەری کەسێك بکە کێشەکەی 53.64kg و درێژییەکەی 167.64cm بێت، وەڵامەکەت نزیکبکەوە بۆنزیکترین بەش لە سەد.

## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ئەمانە هەژمار بکە.

19 $3^0$

20 $9^0$

21 $(5a)^0$

22 $(2^52^3)^0$

23 $6^{-1}$

24 $4^{-2}$

25 $\left(\frac{3}{5}\right)^4$

26 $\left(\frac{4}{5}\right)^2$

27 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$

28 $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$

29 $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$

30 $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$

31 $(49)^{\frac{1}{2}}$

32 $(27)^{\frac{2}{3}}$

33 $(64)^{\frac{4}{3}}$

34 $(25)^{\frac{3}{2}}$

35 $(36)^{\frac{6}{4}}$

36 $8^{\frac{2}{6}}$

37 $-(64)^{\frac{2}{3}}$

38 $(81)^{-\frac{3}{2}}$

ئەم بڕانە سادەبکە. وەڵامەکان تەنها بە توانی موجەب بنووسە.

39 $y^5y^2$

40 $-2b^3b^5$

41 $\frac{m^9}{m^5}$

42 $\frac{bb^4}{b^2}$

43 $\frac{x^2y^{-5}}{x^4}$

44 $\frac{x^5m^2}{xm^{-4}}$

45 $\left(\frac{-2y^2}{x^3}\right)^7$

46 $\left(\frac{2b^4}{d^2}\right)^3$

47 $\left(\frac{3x^4}{y^{-2}}\right)^{-1}$

48 $\left(\frac{15xy^3}{3y^2}\right)^{-1}$

49 $\left(\frac{2x^{-3}}{(2x)^3}\right)^{-1}$

50 $\left(\frac{-7y^{-2}}{x^5}\right)^6$

51 $-2y^3(5xy^4)$

52 $(6x^5)(3x^5)(x^0)$

**53** $(-5m^4m^5)^2$

**54** $(-3x^2y^7)^3$

**55** $\left(\frac{-2b^5y^{-1}}{m^3}\right)^3$

**56** $\left(\frac{3b^2y^3}{b^{-1}}\right)^{-5}$

**57** $\left(\frac{5b^2x^{-2}}{x^{-3}}\right)^{-1}$

**58** $\left(\frac{x^{-2}y}{b^{-1}}\right)^5$

**59** $\left(\frac{4b^2y^{-3}}{b^{-1}y^2}\right)^2$

**60** $\left(\frac{15b^2x^{-2}}{-3bx^{-3}}\right)^{-2}$

**61** $(2x^4y)^3$

**62** $(3xb^{12})^3$

**63** $(x^{-3}y^{-1})(x^{-3}y^0)^2$

**64** $(x^{-3}y^2)(-2x^3y^7)^{-3}$

**65** $\left[\frac{(x^3y^5)^2}{x^5y^2}\right]^{-1}(x^{-3}y^0)^2$

**بۆ هەژمارکردنی بەهای ئەم برانە بژمێر بەکاربهێنە.**

**66** $12^{6.05}+8.8^{3.24}$

**67** $3.3^{2.7}-5^{1.9}+0.63^{0.95}$

**68** $0.005^{21.53}+9.05^{0.034}$

**69** $71.33^{0.44}+478.2^{0.4}$

**70** $11.7^6+29.3^{1.23}-6^{-2.2}$

**71** $89^{3.5}-5.25^{9.25}+324^{0.05}$

**بەرەنگاری**

**72** روونیبکەوە $y^{a-b}=\frac{1}{y^{b-a}}$ ، کە $y\neq 0$

**73** روونیبکەوە $\frac{x^{-1}-y^{-1}}{x-y}=-\frac{1}{xy}$

**بەستنەوە**

**74** ئەندازە ڕێسای $h=\frac{3}{\pi}Vr^{-2}$ کە $h$ بەرزی قووچەکێکمان بەپێی قەبارەکەی $V$ و نیوەتیرەی بنکەکەی $r$ دەداتێ.

أ هەژماری بەرزی قوچەکێك بکە قەبارەکەی $200cm^3$ و نیوەتیرەی بنەکەکەی 4cm . وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەش لە دە بنووسە.

ب ڕێساکەی سەرەوە بنووسە بەبەکارهێنانی تەنها توانی موجەب.

**جێبەجێکردنەکان**

**75** ئەندازەی بیناسازی هاوکێشەی $F=5\times10^{-3}r^4l^{-2}$ ئەویەری باری ئەستوونی بینایەکمان بە تەن دەداتێ کاتێك $F$ ئەویەری بار بێت بەتەن و $l$ بەرزی ئەستوونە کەبێت بە مەتر و $r$ نیوەتیرەی بنکەی ئەستوونەکە بێت بە سانتیمەتر.

أ هەژمێری ئەویەری باری ئەستوونێك بکە بەرزیەکەی 2m و نیوەتیرەی بنکەکەی 50cm .

ب ڕێساکەی پێشو بەبەکارهێنانی توانی موجەب بنووسە.

کیمیا تیشکدانەوەی پلۆتۆنیۆم *Plotonium* زۆر بە هێواشی کەم دەکات. ڕێژەی سەدی پلۆتۆنیۆمی ماوە $(A)$ پاش $x$ ساڵ دیاریدەکرێت بەم ڕێسایەی خوارەوە.

$A=100\times\left(0.5^{\frac{x}{24360}}\right)$ ڕێژەی سەدی پلۆتۆنیۆمی ماوە دیاریبکە پاش.

**76** 100 ساڵ **77** 500 ساڵ **78** 1000 ساڵ **79** 5 000 ساڵ

**فیزیا** پەستانی هەوا کەم دەبێتەوە بە بەرزبوونەوە لە ڕووی ئاستی دەریا. ئەم پەستانە دیاریدەکرێ بەپێی ڕێسای $P = 14.7(10)^{-0.000064a}$ کە $a$ بەرزییە لە ڕووی دەریا بە مەتر و $p$ پەستانی هەوایە بە مللیمەتری جیوە.

80 پەستانی هەوا لە شارێکدا دەکاتە چەند کە 1610m لە ڕووی ئاستی دەریا بەرزە.

81 پەستانی هەوا لە چیای ئیڤەریست چەند دەبێت کە بەرزیەکەی لە ڕووی دەریاوە 8848m ە.؟

## ڕوانینێک بۆ دواوە

**شیکاری ئەم لاسەنگە ئاوێتانە بکە. کۆمەڵە شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.**

82 $x < 1$ و $x > -3$

83 $x > \frac{1}{2}$ و $x > -\frac{1}{4}$

84 $x < 1$ یان $x > -3$

85 $x > \frac{1}{2}$ یان $x > -\frac{1}{4}$

**هەژمێری ئەم بڕانە بکە بەبەکارهێنانی ڕیزبەندی کردارەکان.**

86 $2(3-1)+6 \div 3 \div 2$

87 $3(9-12)-2(7-3)-1$

88 $3 \times 5^2 - 4(5-8)^2 \div 3$

89 $(5-3)^{\frac{10-8}{13-12}}$

## ڕوانینێک بۆ پێشەوە

90 **وەچەکان** دایك و باوکت نەوەی یەکەمن لە وەچەکانت (باوانت)، ئەو کاتە هەردوو باپیرە و هەردوو داپیرە (نەنك) دەبنە نەوەی دووەم. بەڵام نەوەی سێیەم 4 باپیر و 4 داپیر دەگرێتەوە و هەروەها. ڕێسایەك بنووسە کە ڕێگات پێدەدات بە هەژماری وەچەکان لە $n$ نەوە.
هێزەکان بەکاربهێنە لە نووسینی ئەم ڕێسایە.

وانەی
5

# شیکارکردنی سیستمی هێڵییەکان بەلەجیاتیدانان

## Solving Linear Systems by Substitution

**ئامانجەکان**

- سیستمێك کە لە دوو هاوکێشەی هێڵی پێکهاتووە بە ڕێگای لەجیاتیدانان شیکاردەکات.



**بۆچی**

زۆرجار پێویستت بە شیکارکردنی سیستمێك دەبێت کە لەدوو هاوکێشەی هێڵی پێکهاتووە و وەڵامی تەواوت دەداتێ بەبێ نزیککردنەوە وەك فرۆشیارێك لە بازاردا پێویستی بە دیاریکردنی نرخی هەر کاڵایەك هەیە بەوردی بۆ ئەوەی قازانجی پێویستی دەستبکەوێت.

لە پۆلی نۆهەمدا فێری سیستمی هاوکێشە هێڵیەکان بوویت و هەڵسایت بە شیکارکردنی هەندێکیان. و لەم پۆلەدا فێری چەند ڕێگایەك دەبیت بۆ شیکارکردنی ئەم جۆرە سیستمانە. و هەروەها لەسەرەتادا فێری ڕێگای لەجیاتیدانان دەبیت.

**جێبەجێکردنەکان**

پێشبرکێی ئۆتۆمبێل

### چالاکی

### دۆزینەوەی ڕێگای لەجیاتیدانان — Exploring Substitution

پێشبرکێی ئوتومبیلەکان لەشاری سبرنغ لە وولاتە یەکگرتووەکانی ئەمریکا ئەنجامدەدرێت یەکێکە لە گرنگترین پێشبرکێی ئوتومبیلەکان. لەم پێشبرکێیەدا هەر ئوتومبێلێك دوو شوفێری لێیدەخورێت و هەریەك لەو شوفێرانە چەند خولێك ئەنجام دەدەن. تیپی ستیف و مایکل 157 خولیان ئەنجامدا، ئەگەر مایکل 21 خولی لە ستیف کەمتر ئەنجام دابێت، ئایا هەریەکەیان چەند خولی ئەنجامداوە؟

**شیکاری پرسیار**

1. بە نووسینی هاوکێشەکان دەستپێبکە بۆ ئەوەی نموونەیەکی بیرکاری بۆ شیکاری پرسیارەکە بدۆزیتەوە. نەزانراوی $x$ هەڵبژێرە بۆ نواندنی ژمارەی خولەکانی کە ستیف ئەنجامیداوە و نەزانراوی $y$ هەڵبژێرە بۆ نواندنی ژمارەی خولەکان کە مایکل ئەنجامیداوە.

سستەمێکی دوو هاوکێشەیی هێڵیت بە دوو نەزانراو $x$ ، $y$ دەست دەکەوێ $\begin{cases} x + y = 157 \\ y = x - 21 \end{cases}$

2. ڕێگای **خەملێنە و ساغبکەوە** بۆ دۆزینەوەی بەهای $x$ ، $y$ بەکاربهێنە کە دەبنە شیکاری سستەمی دوو هاوکێشە.

3. سەیری هاوکێشەی دووەم بکە $y = x - 21$ ، ئەم زانیارییە دەربارەی $y$ چۆن بەکاردەهێنیت لە هاوکێشەی یەکەمدا؟

4. لەبەر ئەوەی $y = x - 21$، پێویستە لە هاوکێشەی یەکەمدا لە جیاتی $y$ بەهای $x - 21$ دابنێیت پاشان هاوکێشەی دەستکەوت بۆ دۆزینەوەی بەهای $y$ شیکاربکە.

5. لە هاوکێشەی دووەمدا بەهای نەزانراوی $x$ دابنێ بۆ هەژماری بەهای $y$ .

**خاڵ چاودێری** ✓

6. بەهای $x$ و $y$ بەراوردبکە لەگەڵ ئەو دوو بەهایەی لە ڕێگەی بخەملێنەو ساغبکەوە دەستتکەوتووە. ئایا ئەم دوو ئەنجامە جووتن؟ ڕوونیبکەوە.

ئەگەر بەهای یەکێك لەدوو نەزانراوی سیستمی دوو هاوکێشەی هێڵی بزانیت، ئەوا دەتوانیت سیستمەکە بە لەجیاتی دانانی بەهای ئەم نەزانراوە لە یەکێك لە دوو هاوکێشەکە شیکاربکەیت. ئەم ڕێگایە بەبۆ شیکاری سستەمەکە پێی دەوترێت ڕێگای لەجیاتی دانان **Substitution method**.

**نموونە** 1 سیستمی $\begin{cases} 8x+2y=19 \\ x=3 \end{cases}$ بە ڕێگای لەجیاتیدانانشیکاربکە.

**شیکار**

لەبەر ئەوەی $x=3$ ، دەتوانیت لەجیاتی $x$ لە هاوکێشە یەکەمدا بەهاکەی دابنێی.

هاوکێشەی دەستکەوتوو شیکاربکە بۆ دۆزینەوەی بەهای نەزانراوی $y$.

$$8(3)+2y=19$$
$$24+2y=19$$
$$2y=-5$$
$$y=-2.5$$

جووتە ڕێکخراوی $(3, -2.5)$ شیکاری سستەمەکەیە.

ڕاستی شیکارەکە ساغبکەوە بە لەجیاتیدانانی $x$ و $y$ لە هاوکێشەی یەکەمدا:

$$8(3)+2(-2.5)\overset{?}{=}19$$
$$24+(-5)\overset{?}{=}19$$
$$19=19 \quad \text{ڕاستە}$$

**نموونە** 2 سستەمی $\begin{cases} 15x-5y=30 \\ y=2x+3 \end{cases}$ شیکاربکە بە ڕێگای لەجیاتیدانان.

**شیکار**

لەجیاتی $y$ بەهای $2x+3$ لە هاوکێشەی یەکەمدا دابنێ پاشان هاوکێشە دەستکەوتووەکە شیکاربکە.

$$15x-5(2x+3)=30$$
$$15x-10x-15=30$$
$$5x-15=30$$
$$5x=45$$
$$x=9$$

بەهای 9 لە جیاتی $x$ لە هاوکێشەی دووەمدا دابنێ پاشان هاوکێشە دەرچووەکە شیکاربکە.

$$y=2(9)+3$$
$$=18+3$$
$$=21$$

شیکارەکە بریتییە لە جووتە ڕێکخراوی $(9, 21)$.

ڕاستی شیکارەکە ساغبکەوە بە لەجیاتیدانانی بەهای $x$ و $y$ لە دوو هاوکێشە سەرەکییەکەدا.

$$15(9)-5(21)\overset{?}{=}30$$
$$135-105\overset{?}{=}30$$
$$30=30 \quad \text{ڕاستە}$$

$$21\overset{?}{=}2(9)+3$$
$$21\overset{?}{=}18+3$$
$$21=21 \quad \text{ڕاستە}$$

**هەوڵبدە** ئەم سستەمانە بە ڕێگای لەجیاتیدانان شیکاربکە.

أ $\begin{cases} 2x+5y=14 \\ y=5 \end{cases}$

ب $\begin{cases} -3x+2y=31 \\ x=0.5y+6 \end{cases}$

## نموونە 3

سستەمی $\begin{cases}3x+y=4\\5x-7y=11\end{cases}$ بە ڕێگای لەجیاتیدانان شیکاربکە.

**شیکار**

بۆ ئەوەی ڕێگای لەجیاتیدانان بەکاربهێنیت، شیکاری هاوکێشەی یەکەم بکە بۆ هەژمارکردنی بەهای $y$ بەپێی $x$.

ئاسانترین هاوکێشە بۆشیکارەکە هەڵبژێرە.

$3x+y=4$

$3x+y-3x=4-3x$

$y=4-3x$

لەجیاتی $y$ لە هاوکێشەی دووەمدا بەهاکەی $4-3x$ دابنێ پاشان هاوکێشەکەی شیکاربکە.

$5x-7y=11$

$5x-7(4-3x)=11$

$5x-28+21x=11$

$26x-28=11$

$26x=39$

$x=1.5$

لەجیاتی $x$ بەهای $1.5$ لە هاوکێشەی یەکەمدا دابنێ پاشان هاوکێشەکە شیکاربکە.

$3(1.5)+y=4$

$4.5+y=4$

$y=-0.5$

شیکار بریتییە لە جووتە ڕێکخراوی $(1.5, -0.5)$.

ڕاستی شیکارەکە ساغبکەوە بەلەجیاتیدانانی بەهای $x$ و $y$ لە هەردوو هاوکێشە بنەڕەتییەکەدا.

**بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** بۆچی لە نموونەی 3 دا هەستایت بە هەژمارکردنی نەزانراوی $y$ بەپێی $x$ لە هاوکێشەی یەکەمدا لە جیاتی هەژمارکردنی $x$ بەپێی $y$؟

**هەوڵبدە** سستەمی $\begin{cases}6x-2y=11\\x+3y=4\end{cases}$ بەڕێگای لەجیاتیدانان شیکاربکە.

## نموونە 4

**جێبەجێکردنەکان**
**بازرگانی**

سۆران لە یاریەکانی کۆتایی تۆپی پێدا کڵاو دەفرۆشێت، 100 کڵاوی وەرزی پێشووی لاماوە و 300 کڵاوی تازەی هەیە. سۆران لەم وەرزە دەیەوێت هەموو کڵاوەکان بە 5 300 000 دینار بفرۆشێت. دەبێ نرخی چەند بۆ کڵاوی تازە و کڵاوی کۆن دابنێت بۆ گەیشتن بەو ئامانجە، ئەگەر بزانیت نرخی کڵاوێکی تازە 7000 دیناری لە نرخی کڵاوێکی کۆن زیاترە.

**شیکار**

بە هەڵبژاردنی دوو نەزانراو دەستپێدەکەم. با نەزانراوی $d$ بۆ هێمای نرخی کڵاوە کۆنەکە هەڵدەبژێرم و هێمای $n$ نرخی کڵاوێکی تازە بێت.
سستەمی دوو هاوکێشەکە بنووسە بۆ شیکای پرسیارەکە

$\begin{cases}300n + 100d=5\ 300\ 000\\n=d + 7\ 000\end{cases}$

لەجیاتی $n$ لە هاوکێشەی یەکەمدا نرخی $d+7000$ دابنێ پاشان هاوکێشەکە شیکاربکە.

$300\ (d+7000) + 100d = 5\ 300\ 000$

$300d + 2\ 100\ 000 + 100d= 5\ 300\ 000$

$400d + 2\ 100\ 000 = 5\ 300\ 000$

$400d = 3\ 200\ 000$

$d =8\ 000$

لەجیاتی $d$ نرخی $8\ 000$ لە هاوکێشەی دووەمدا دابنێ پاشان هاوکێشەکە شیکاربکە.

$n = 8\ 000 + 7\ 000$

$n = 15\ 000$

شیکارەکە بریتیە لە $(8000\ ,\ 15\ 000)$ سۆران پێویستە کڵاوە تازەکان بە نرخی 15 000 دینار بفرۆشێت و کڵاوە کۆنەکان بە 8 000 دینار بفرۆشێت.

# ڕاهێـــــنـــان

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 ئەگەر بزانیت $y = 42$، ئەوا چۆن لە جیاتیدانان بەکاردێنێت بۆشیکاری هاوکێشەی $y = x + 8$ ؟

2 دوو هاوکێشەی $-4x + y = 2$ و $2x + 3y = 34$ هەبێت، ئاسانترین نەزانراو و ئاسانترین هاوکێشە هەڵبژێرە بۆ دەستپێکردنی شیکار و هۆی هەڵبژاردنەکەت دیاربکە پاشان شیکاریان بکە.

3 ڕوونیبکەوە چۆن لەجیاتیدانان بە کاردەهێنیٚ بۆ شیکارکردنی سیستمی $\begin{cases} x - 2y = 8 \\ 2x + 3y = 23 \end{cases}$

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

**ئەم سیستمانە بەلەجیاتیدانان شیکار بکە. پاشان پاسادانی شیکارەکە ساغبکەوە.**

4 $\begin{cases} 5x = 3y + 12 \\ x = 5 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ y = 2x + 8 \end{cases}$

6 $\begin{cases} 5x - y = 1 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

7 $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 10x = 4y + 2 \end{cases}$

## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

8 سەرجەمی دوو ژمارە دەکاتە 27 ، گەورەکەیان 3 ی زیاترە لەوەی تریان ئەم دوو ژمارەیە کامانەن.

**ئەم سستەمانە شیکاربکە.**

9 $\begin{cases} 2x + 8y = 1 \\ x = 2y \end{cases}$

10 $\begin{cases} x = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

11 $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$

12 $\begin{cases} y = 5 - x \\ 1 = 4x + 3y \end{cases}$

13 $\begin{cases} 2x + y = -92 \\ 2x + 2y = -98 \end{cases}$

14 $\begin{cases} 4x + 3y = 13 \\ x + y = 4 \end{cases}$

15 $\begin{cases} 6y = x + 18 \\ 2y - x = 6 \end{cases}$

16 $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 10x = 4y - 2 \end{cases}$

17 $\begin{cases} 2y + x = 4 \\ y - x = -7 \end{cases}$

18 $\begin{cases} 4y - x = 15 \\ y + x = 6 \end{cases}$

19 $\begin{cases} y = x - 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$

20 $\begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ -3x - 6y = -24 \end{cases}$

21 $\begin{cases} 5x - 7y = 31 \\ -4x + 2y = -14 \end{cases}$

22 $\begin{cases} 3x + y = 21 \\ 10x + 5y = 65 \end{cases}$

23 $\begin{cases} -3y = 9x + 24 \\ 6y + 2x = 32 \end{cases}$

24 $\begin{cases} 12x + 4y = 22 \\ 3x - 8y = -10 \end{cases}$

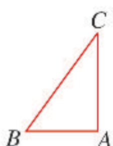
25 $\begin{cases} 11x + 4y = -17 \\ -6x + y = 22 \end{cases}$

26 $\begin{cases} -5x + 7y = -41 \\ 7x + y = 25 \end{cases}$

بەستنەوە

**27** **ئەندازە** درێژی و پانی لاکێشەیەك بدۆزەوە ئەگەر زانیت چێوەکەی یەکسانە بە 208m و درێژییەکەی دوو ئەوەندەی پانیەکەیەتی.

**28** **ئەندازە** سەرجەمی پێوانەی دوو گۆشەی $B$ و $C$ لە سێگۆشەی بەرامبەردا دەکاتە $90^{\circ}$. هەژماری پێوانەی هەریەکە لە گۆشەکانی سێگۆشەکە بدۆزەوە ئەگەر بزانیت پێوانەی گۆشەی $B$ $30^{\circ}$ کەمترە لە دوو ئەوەندەی پێوانەی گۆشەی $C$.




بەستنەوە

**29** **بیردۆزی ژمارەکان** ژمارەی $x$ چواری کەمترە لە سێ ئەوەندەی ژمارە $y$، ئەگەر دوو ئەوەندەی $y$ کەم بکرێتەوە لە کۆی 3 لەگەڵ دوو ئەوەندەی $x$ دەکاتە 11. ئەو دوو ژمارەیە چەندن؟

**سستەمی دوو هاوکێشەی هێڵی بۆهەر پرسیارێك بنووسە پاشان شیکاریانبکە.**

**30** **بۆخۆشی** باڵۆنێك لە زەویەوە بەرزبووەوە بە خێرایی 4m لە خولەکێکدا، و لە هەمان کاتدا باڵۆنێکی تر لە بەرزی 756m دەستیکرد بە هاتنە خوارەوە بەخێرایی 3m لە خولەکێکدا پاش چەند خولەك دوو پەرەشوتەکە بەیەکتردەگەن.

**31** **کاری خێرخوازی** کۆمەڵەی چاودێری خێرخوازی ئاهەنگێکی سازکرد و تەنیا دیاری پێشکەشکرا بۆ گەوران و منداڵان کرد کە ژمارەیان 210 کەس بون بەمە 935 هەزار دیناری تێچوو. ئەگەر نرخی دیاری بۆ گەورە 6 هەزار دینار بێت و بۆ منداڵان 3.5 هەزار دینار بێت ئەوا:

أ هاوکێشەیەك بنووسە کە کۆی هەردوو بڕی پارەکە بە تەواوی دەربخات.

ب هاوکێشەیەك بنووسە کە ژمارەی تەواوی کەسەکان دیاربکات.

ج هەردوو هاوکێشەی دەستتکەوتووە شیکاربکە. ژمارەی گەورەکان چەندن؟ ژمارەی منداڵاکان چەندن؟

**32** **دەروازەیەك لەسەر رۆشەنبیری چینی** ژمارەیەك لە جوتیارانی چینی هاوبەشیان کرد لە دابینکردنی نرخی ئامێرێکی کشتوکاڵیدا، ئەگەر هەریەکێکیان 8 پارچە پارە بدات، بڕی پارەکە 3 پارچە زیاتر دەبێت لە بڕی پێویست، و ئەگەر هەر یەکێکیان 7 پارچە پارەبدات، بڕی پارەکە 4 پارچە کەمتردەبێت لە بڕی پێویست. ئایا ژمارەی جوتیارەکان چەندە؟ و نرخی ئامێرەکەش چەندە؟

## ڕوانینێك بۆ دواوە

**33** **بۆ خۆشی** لە پێشبرکێیەکی ڕاکردندا نەسرین 20 مەتر پێش شنۆ کەوت، و شنۆ 5 مەتر لە دوای ژیان، و ژیان بە 10 مەتر لە دوای بەهارە، بەڵام شیرین بە 15 مەتر لە پێش بەهارەوەیە. ڕیزبەندی ڕاکەرەکان چۆنە؟

**ئەم هاوکێشانە شیکاربکە.**

**34** $\frac{x}{15}=3$ **35** $\frac{3}{x}=15$

**36** $\frac{15}{x}=3$ **37** $\frac{x}{3}=15$

**38** 42% ی ژمارەیەك دەکاتە 12.6 ، ژمارەکە کامەیە؟

## ڕوانینێك بۆ پێشەوە

**لەجیاتیدانان بەکاربهێنە بۆشیکارکردنی هەریەك لەم سیستمانە ( تێبینیبکە سیستمەکە لە 3 هاوکێشە 3 نەزانراوەکانە.**

**39**
$$\begin{cases} x+2y+3z=8 \\ y+3z=3 \\ z=2 \end{cases}$$

**40**
$$\begin{cases} 2x+3y+5z=44 \\ 2y-6z=4 \\ z=4 \end{cases}$$

وانەی
6

# شیکارکردنی سیستمە هێڵییەکان بەلابردن

## Solving Linear Systems by Cancellation

**ئامانجەکان**

- سیستمێك لە دوو هاوکێشەی هێڵی پێکهاتووە بە ڕێگای لابردن شیکاردەکات.



**بۆچی**

لابردن ڕێگایەکی نوێیە کە شیکارێکی خێرا دەدا بەدەستەوە بۆ سیستمی دوو هاوکێشەی هێڵی ئاڵۆز کە لەم وانەیەدا دێتە پێشت.

**جێبەجێکردنەکان**

**بەکرێدانی ئوتومبیل**

نووسینگەی هەوار هەڵدەستێت بە بەکرێدانی ئوتومبیل. گەشتیارێك بڕێك پارە دەدات بەرامبەر هەر ڕۆژێك بۆ بەکرێگرتنی ئۆتۆمبیلێك و بڕێکی تر پارە دەدات بۆ هەر کیلۆمەترێك ئۆتۆمبیلەکە دەیبڕێت. ڕزگار و زانا هەریەکەیان ئۆتۆمبیلێك دەگرن لە نووسینگەی هەوار بەکری بۆ گەشتێك. گەشتی ڕزگار 2 ڕۆژی خایاند و 125 کیلۆمەتری بڕی و گەشتەکەی زانا 4 ڕۆژی خایاند و 350 کیلۆمەتری بڕی، ڕزگار287.25 هەزار دیناری دا، و زانا 697.50 هەزار دیناری دا. کرێی ڕۆژێکی ئۆتۆمبیلەکە دیاربکە و تێچووی کیلۆمەترێك.

دەتوانیت سستەمێکی دوو هاوکێشەی هێڵی بنووسیت، پاشان بۆ دیاریکردنی هەردوو کرێیەکە شیکاریان بکەیت.

**شیکاری پرسیارەکە**

بە پێناسەکردنی هەردوو نەزانراوی پرسیارەکە دەستپێبکە.

نەزانراوی $d$ : هێمای کرێی ئوتومبیلەکە بێت لە ڕۆژێکدا

نەزانراوی $k$ : هێمای پارەی کرێی یەك کیلۆمەتر بێت .

لە زانیارییەکانی سەرەوەدا دەتوانیت سستەمی هەردوو هاوکێشە بنووسیت.

$$\begin{cases} 2d + 125k = 287.250 \\ 4d + 350k = 679.500 \end{cases}$$

بێگومان دەتوانیت ئەم سیستمە بە ڕێگای لەجیاتیدانان شیکاربکەیت بەڵام ئەمە کارێکی ئاسان نییە. لەم وانەیەدا فێری ڕێگایەکی تازە دەبیت بۆشیکارکردنی سیستمە ئاڵۆزەکان.

## چالاكی

## بەكارهێنانی دژەكان Using Inverses

ستەمی ئەم دوو هاوكێشەیە $\begin{cases}3x+2y=7\\5x-2y=9\end{cases}$ شیكاربكەیت.

1. ئەم دوو هاوكێشەیە دوو رادەی دژ بەیەكتری تێدایە. كامانەن؟
2. سیفەتی كۆكردنەوە لە یەكسان بووندا بەكاربهێنە بۆ ئەوەی هاوكێشەیەكت دەستبكەوێت لە هەردوو هاوكێشەكەوە ( $3x + 2y$ و $5x -2y$ و 7 لەگەڵ 9 كۆبكەوە ). هاوكێشە تازەكە چەند نەزانراوی تێدایە.
3. هاوكێشە تازەكە شیكاربكە بۆ دیاركردنی بەهای نەزانراوەكە. پاشان بەهای نەزانراوەكە لە یەكێك لە دوو هاوكێشە سەرەكییەكاندا دابنێ. هاوكێشە دەرچووەكە شیكاربكە بۆ دیاركردنی بەهای نەزانراوی دووەم.
4. پاسادانی ئەوە بكە كە هەردوو بەهای دەستكەوتوو بۆ دوو نەزانراوی $x$ و $y$ دەبنە شیكاری ستەمی دوو هاوكێشەكە .
5. روونیبكەوە چۆن دژەكان بەكاردەهێنیت بۆ شیكاری ستەمی هاوكێشەكان.

خاڵی چاودێری ✔

## رێگای لابردن Cancellation Method

لە چالاكییەكەی پێشوودا **رێگای لابردنت** بەكارهێنا بۆشیكاركردنی ستەمی دوو هاوكێشە. ئەم رێگایە بەكاردەهێنرێت بۆ لابردنی دژەكانی یەكێك لە دوو نەزانراوەكە.

**نموونە 1** **رێگای لابردن بەكاربهێنە بۆشیكاری ئەم ستەمە** $\begin{cases}3x+4y=7\\2x-4y=13\end{cases}$.

**شیكار**

سیفەتی كۆكردنەوە لە یەكسانیدا بەكاربهێنە بۆ دەستكەوتنی هاوكێشەیەك تەنها $x$ ی تێدابێ كە لە هەردوو هاوكێشەكەوە دەردەچێت و هاوكێشەكە شیكاربكە.

$$\begin{aligned}3x+4y&=7\\2x-4y&=13\\\hline 5x+0&=20\\5x&=20\\x&=4\end{aligned}$$

تێبینیبكە $4y$ و $-4y$ دژی یەكترن

بۆ دیاریكردنی بەهای $y$ لەجیاتی بەهای $x$ 4 دابنێ لە هاوكێشەی یەكەمدا.

$$\begin{aligned}3x+4y&=7\\3(4)+4y&=7\\12+4y&=7\\4y&=-5\\y&=-1.25\end{aligned}$$

شیكاری ستەمەكە دەبێتە $(4, -1.25)$

بەهای $x$ بە 4 و بەهای $y$ بە $-1.25$ لە هەردوو هاوكێشە سەرەكییەكەدا دابنێ بۆ پاسادانكردنی شیكارەكە:

$$\begin{aligned}3(4)+4(-1.25)&\stackrel{?}{=}7\\12+(-5)&\stackrel{?}{=}7\\7&=7\end{aligned}$$
راستە

$$\begin{aligned}2(4)-4(-1.25)&\stackrel{?}{=}13\\8-(-5)&\stackrel{?}{=}13\\13&=13\end{aligned}$$
راستە

تێبینی ئەوە بكە كە هاوكۆلكەی $y$ لە هەردوو هاوكێشەكەدا دژی یەكترن. ئەمەش وا دەكات كە شیكاری ئەم جۆرە ستەمانە ئاسان بێت.

جاری وا هەیە هەردووولای یەکێك لە هاوکێشەکان یان هەردووکیان لە ژمارەیەك بدرێت بۆ بەدەستهێنانی دوو دژەکە و لابردنی یەکێك لە دوو نەزانراوەکە. ئەگەر هاوکۆلکەی یەکێك لە دوو نەزانراوەکە 1 بێت کارەکە ئاسانە، بەلاَم دەکرێت ئەم بیرۆکەیە جێبەجێبکرێت لەسەر ئەو سیستمانەی زیاتر ئاڵۆزن وەك سیستمی نموونە 2.

**نموونە** 2 ڕێگای لابردن بەکاربهێنە بۆشیکارکردنی سیستمی $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 5x+7y=3 \end{cases}$

**شیکار**

هەردوو لای هاوکێشەی یەکەم لە ژمارە 5 بدە و هەروەها هەردوولای هاوکێشەی دووەم لە −2 بدە بۆ ئەوەی دوو ژمارەی دژت دەستکەوێت.

$\begin{cases} (5)2x+(5)3y=(5)1 \\ (-2)5x+(-2)7y=(-2)3 \end{cases}$ یان $\begin{cases} 10x+15y=5 \\ -10x-14y=-6 \end{cases}$

سیفەتی کۆکردنەوە لە یەکسانیدا بەکاربهێنە بۆ ئەوەی هاوکێشەیەکی تازەت دەستبکەوێت تەنها یەك نەزانراوی تێدابێت ئەویش بریتییە لە $y$ ، پاشان ئەم هاوکێشەیە شیکاربکە. لەجیاتی $y$ بەهاکەی لە هاوکێشەی یەکەمدا دابنێ بۆ دیاریکردنی بەهای $x$ .

$$\begin{array}{r} 10x+15y=5 \\ -10x-14y=-6 \\ \hline y=-1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2x+3y&=1 \\ 2x+3(-1)&=1 \\ 2x-3&=1 \\ 2x&=4 \\ x&=2 \end{aligned}$$

شیکارەکە دەبێتە $(2, -1)$ .

پاسادانی شیکارەکە بکە بە دانانی بەهای هەردوو نەزانراوەکان لە هەردوو هاوکێشەکەدا.

$2(2)+3(-1)\overset{?}{=}1$

$4+(-3)\overset{?}{=}1$

$1=1$ ڕاستە

$5(2)+7(-1)\overset{?}{=}3$

$10+(-7)\overset{?}{=}3$

$3=3$ ڕاستە

**نموونە** 3 ڕێگای لابردن بەکاربهێنە بۆشیکارکردنی ئەو $\begin{cases} 2d+125k=287.25 \\ 4d+350k=679.50 \end{cases}$ پرسیارەی لە سەرەتای وانەکە باسکرا .

**شیکار**

هەردوولای هاوکێشەی یەکەم لە −2 بدە.

$\begin{cases} (-2)2d+(-2)125k=(-2)287.25 \\ 4d+350k=679.50 \end{cases}$

سیفەتی کۆکردنەوە لە یەکسانیدا بەکاربهێنە بۆ بەدەستکەوتنی هاوکێشەیەکی نوێ کە یەك نەزانراوی تێدابێ ئەویش $k$ ،پاشان هاوکێشەکە شیکاربکە.

$$\begin{array}{r} -4d+(-250k)=-574.50 \\ 4d+350k=679.50 \\ \hline 100k=105 \\ k=1.05 \end{array}$$

لەجیاتی $k$ بەهاکەی دابنێ لە هاوکێشەی یەکەمدا بۆ دیاریکردنی بەهای $d$ .

$$\begin{aligned} 2d+125(1.05)&=287.25 \\ 2d+131.25&=287.25 \\ 2d&=156 \\ d&=78 \end{aligned}$$

شیکاری سیستمی هاوکێشەکانی پێشو بریتییە (78; 1.05) دەتوانیت پاسادانی ڕاستییەکەی بە لەجیاتیدانان بکەیت، کرێی ئوتومبیل لە ڕۆژێکدا 78 هەزار دینار و بری تێچووی یەك کیلۆمەتر 1.05 هەزار دینارە.

**هەوڵبدە** هەریەکە لەم سستەمانە بە ڕێگای لابردن شیکاربکە.

أ) $\begin{cases} 2x-y=7 \\ 5x+4y=11 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} 3x-2y=6 \\ 5x+7y=41 \end{cases}$

# ڕاهێنان

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

هەردوو ڕادە دژەکە لە هەریەك لەم سیستمانە دەستنیشانبکە و ڕوونیبکەرەوە چۆن شیکاری دەکەیت.

**1** $\begin{cases} x+7y=13 \\ x-7y=5 \end{cases}$

**2** $\begin{cases} 2x-3y=8 \\ 5x+3y=20 \end{cases}$

**3** $\begin{cases} 2a+b=6 \\ -2a-3b=8 \end{cases}$

**جێبەجێکردنەکان** ئەو هەنگاوانەی پێویستن بۆ شیکارکردنی هەریەك لەم سیستمانە بە ڕێگای لابردن باسبکە.

**4** $\begin{cases} 2x+3y=9 \\ 3x+6y=7 \end{cases}$

**5** $\begin{cases} 2x-5y=1 \\ 3x-4y=-2 \end{cases}$

**6** $\begin{cases} 9a+2b=2 \\ 21a+6b=4 \end{cases}$

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

شیکاری سستەمەکان بە لابردن بکە، پاشان پاسادانی شیکارەکە بکە.

**7** $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 5x-2y=7 \end{cases}$

**8** $\begin{cases} 4x+3y=13 \\ 2x-4y=1 \end{cases}$

**9** $\begin{cases} 2x-2y=4 \\ 3x+5y=-10 \end{cases}$

**10** $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -3x-4y=0 \end{cases}$

## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

سیستەمەکان بە لابردن شیکاربکە و پاسادانی ڕاستی شیکارەکە بکە.

**11** $\begin{cases} -x+2y=12 \\ x+6y=20 \end{cases}$

**12** $\begin{cases} 2a+3b=18 \\ 5a-b=11 \end{cases}$

**13** $\begin{cases} -4x+3y=-1 \\ 8x+6y=10 \end{cases}$

**14** $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 5x-3y=11 \end{cases}$

**15** $\begin{cases} 2x=2-9y \\ 21y=4-6x \end{cases}$

**16** $\begin{cases} -x-7=3y \\ 6y=2x-14 \end{cases}$

**17** $\begin{cases} \frac{2}{3}x=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}y \\ y=3x-12 \end{cases}$

**18** $\begin{cases} 0.6x=3.2y+4.6 \\ 2.9y=0.3x+4.8 \end{cases}$

**19** $\begin{cases} b=1.5k+4 \\ 0.8b+0.4k=0 \end{cases}$

**20** $\begin{cases} 2x=3y-12 \\ \frac{1}{3}x=4y+5 \end{cases}$

**21** $\begin{cases} 2x-7y=20 \\ 5x+8y=-1 \end{cases}$

**22** $\begin{cases} 2x-5y=-14 \\ -7x+4y=-5 \end{cases}$

**23** $\begin{cases} 3x-2y=-26 \\ 5x+3y=9 \end{cases}$

**24** $\begin{cases} \frac{2}{3}x-\frac{3}{5}y=-\frac{17}{15} \\ \frac{8}{5}x-\frac{7}{6}y=-\frac{3}{10} \end{cases}$

سیستمی دوو هاوکێشە بۆهەر پرسیارێك بنووسە. باشترین ڕێگا هەڵبژێرە بۆشیکاری سیستمەکە. سیستمەکە شیکاربکە و پاسادانی ڕاستی شیکارەکە بکە.

جێبەجێکردنەکان

25 **بیرکاری بۆ بەکاربەر** ماموٚستای بیرکاری بڕیاریدا ئاهەنگێك بۆ خوێندکارانی خۆی بەبۆنەی جەژنی نەورۆزەوە سازبدات، 3 کارتۆن کێك و 3 شوشە شەربەتی بۆ خوێندکارانی هۆبەی «أ» کڕی بە 54 هەزار دینار. و 4 کارتۆن کێك و 6 شوشە شەربەتی بۆ خوێندکارانی هۆبەی «ب» کڕی بە 78 هەزار دینار. نرخی هەریەك لە کارتۆنێك کێك و شوشەیەك شەربەت چەندە؟

26 **داهات** بارام پاسەوانە لە یەکێك لە گۆڕەپانەکانی وەستانی ئۆتۆمبیل. داهاتێکی نەگۆڕی هەیە بەرامبەر 15 ڕۆژ کارکردن لە مانگێکدا و بۆ هەر ڕۆژێکی زیاد کاربکات کرێیەکی زیادەی هەیە. بارام 25 ڕۆژ لە مانگی یەکەم کاریکرد بەمە 720 هەزار دیناری وەرگرت و 22.5 ڕۆژ لە مانگی دووەم کاریکرد بەمەش 641.25 هەزار دیناری وەرگرت. کرێیە نەگۆڕەکەی وکرێی ڕۆژانەکەی چەندە؟

27 **بازرگانی** یەکێك لە تۆمارگاکان دوو جۆر شریتی مۆسیقا دەفرۆشێت یەکێکیان شریتی هەڵپەڕکێ و ئەوی تریان شریتی مۆسیقای کلاسیکییە. نرخی شریتێکی هەڵپەڕکێ دەکاتە 21 پارچەپارە و نرخی شریتی مۆسیقای کلاسیکی 33 پارچەپارەیە. تۆمارگاکە لە یەکێك لە ڕۆژەکاندا 25 شریتی لە هەردوو جۆر فرۆشت و بەمەش دەستکەوتەکەی 693 پارچەپارە بوو، تۆمارگاکە چەند شریتی هەڵپەڕکێ و چەند شریتی مۆسیقای کلاسیکی فرۆشتووە؟

28 **بەکرێدانی خانوو** کرێچییەك لەگەڵ کرێی مانگی یەکەمدا بارمەتیەك دادەنێ. جوامێر لە مانگی یەکەمدا 000 270 دیناریدا و بە درێژای ساڵەکە 000 085 2 دیناری دا. ئەوا بەهای هەریەکە لە بارمتە و کرێی خانووەکەی لە مانگێکدا چەندە؟

29 **گەشتیاری** ئوتێلێك دوو جۆر پیشاندانی خستەڕوو یەکەمیان 2 شەو 4 ژەمە خواردن دەگرێتەوە بەنرخی 500 61 دینار و دووەمیان 3 شەو 8 ژەمە خواردن دەگرێتەوە بە نرخی 750 102 دینار، ئایا تێچووی شەوێك چەندە؟ تێچوونی ژەمە خواردنێك چەندە؟

## ڕوانینێك بۆ دواوە

شیکاری ئەم هاوکێشانە بکە.

30 $-5 = -x + 7$    31 $3x - 2 = 2x + 1$    32 $\frac{1}{2}x + 3 = 2$

## ڕوانینێك بۆ پێشەوە

33 **تەکنەلۆجیا** وێنەی دوو ڕاستەهێڵی $2x - 3y = 6$ و $4x - 6y = 18$ بکێشە لە هەمان ڕووتەختی پۆتانەکاندا. باسی ئەوە بکە کە دەستتکەوتووە.

وانەی 7

# بڕە ڕەگییەکان
# Radical Expressions

**بۆچی**

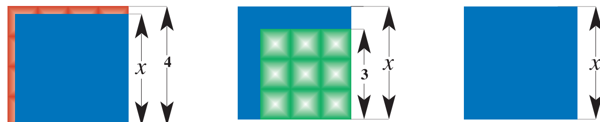
بەزۆری ڕەگەکان لە هەژمێرکردنی ئامار و فیزیادا دەردەکەون، هەروەها لە چالاکییە ڕۆژانەکانی پەیدادەبن هەروەک ڕیزبەندی.

**ئامانجەکان**

- بەهای بڕێك هەژمار دەکات ڕەگەکانی تێدابێت.
- ئەو برانەی کە ڕەگیان تێدابێت سادەدەکات

## خەملاندنی ڕەگی دووجا — Estimating Square Root

ڕووبەری چوارگۆشە شینەکەی سانا 12 یەکە دووجایە. چۆن درێژی لایەکی چوارگۆشەی دیاردەکەیت؟ بیرت بێت کە ڕێسای هەژمێری ڕووبەری چوارگۆشەیەك بەشێوەی $x^2 = 12$ دەبێت کاتێك گۆڕاوی $x$ درێژی لایەکی چوارگۆشە شینەکە بێت. کەواتە درێژی لایەکی چوارگۆشەکە بریتییە لە ڕەگی دووجای ژمارە 12 . چونکە 12 دووجای تەواو نییە. کەواتە دەبێ درێژی لایەکی $x$ بخەملێنی. تێبینی بکە کە 12 دەکەوێتە نێوان دوو دووجای تەواوی 9 ، 16 .




ڕووبەری چوارگۆشەکە لە 9 نزیکترە وەك لە 16 ، لەمەوە دەردەچێت کە درێژی لایەکی چوارگۆشەکە دەکەوێتە نێوان 3.4 و 3.5 هەژمێری دووجای ژمارەی دەییەکانی بکە کە لە دوو ڕەنووس پێکدێن پاش فارزەکە دەکەونە نێوان 3.4 و 3.5 .

$3.42^2 = 11.6964$    $3.41^2 = 11.6281$    $3.4^2 = 11.56$

$3.45^2 = 11.9025$    $3.44^2 = 11.8336$    $3.43^2 = 11.7649$

$3.48^2 = 12.1104$    $3.47^2 = 12.0409$    $3.46^2 = 11.9716$

$3.5^2 = 12.25$    $3.49^2 = 12.1801$

کەواتە، باشترین خەملاندن بۆ ڕەگی دووجای ژمارە 12 بریتییە لە 3.46 .واتە، $\sqrt{12} \approx 3.46$ .

### ڕەگی دووجا — Square Root

ئەگەر $a$ ژمارەیەکی ڕاستی سالب نەبێت، ئەوا دوو ڕەگی دووجای هەیە یەکێکیان موجەبە و دەنووسرێت $\sqrt{a}$ وئەوی تریان سالبە و دەنووسرێت $-\sqrt{a}$ و هەریەك لەو دوو ژمارەیە پاسادانی ئەم سیفەتە دەکەن: $(\sqrt{a})(\sqrt{a}) = a$ و $(-\sqrt{a})(-\sqrt{a}) = a$

## Simplify Radical Expressions ساده‌كردنی بڕه ڕه‌گییه‌كان

بڕه ڕه‌گییه‌كان **Radical Expressions** ئه‌و بڕانه‌ن ڕه‌گیان تێدایه و كاتێك ده‌ته‌وێت بڕه ڕه‌گییه‌كان كۆبكه‌یته‌وه یان لێكیان ده‌ربكه‌یت دڵنیابه ئه‌و ژمارانه‌ی ده‌كه‌ونه ژێر هێمای ڕه‌گه‌كه یه‌كسانن. بۆ نموونه ، ده‌توانیت دوو بڕی $2\sqrt{5}$ و $4\sqrt{5}$ كۆبكه‌یته‌وه و له‌مه‌وه $2\sqrt{5}+4\sqrt{5}=6\sqrt{5}$ ده‌ستكه‌وێت.

**نموونه 1**

ئه‌م بڕانه ساده‌بكه.

أ $5\sqrt{6}-2\sqrt{6}$ ج $5+6\sqrt{7}-2\sqrt{7}-3$

ب $8\sqrt{3}+6\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\sqrt{2}$ د $b\sqrt{x}+y\sqrt{x}$

**شیكار**

أ سیفه‌تی به‌شینه‌وه بۆ كۆكردنه‌وه‌ی ڕاده لێكچووه‌كان به‌كاربهێنه پاشان هه‌ژمێری بكه.
كۆڵكه‌ی هاوبه‌ش بریتییه له $\sqrt{6}$ . $5\sqrt{6}-2\sqrt{6}=(5-2)\sqrt{6}=3\sqrt{6}$

ب ڕیزبه‌ندی ڕاده‌كان بكه بۆ ئاسانكردنی ساده‌كردنه‌وه‌كه.

$$5+6\sqrt{7}-2\sqrt{7}-3=5-3+6\sqrt{7}-2\sqrt{7}=2+4\sqrt{7}$$

ج ڕیزبه‌ندی ڕاده‌كان بكه بۆ ئاسانكردنی ساده‌كردنه‌كه.

$$8\sqrt{3}+6\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\sqrt{2}=8\sqrt{3}-\sqrt{3}+6\sqrt{2}+2\sqrt{2}=7\sqrt{3}+8\sqrt{2}$$

د مامه‌ڵه له‌گه‌ڵ گۆڕاوه‌كان بكه وه‌ك ئه‌وه‌ی ژماره‌بن.

$$b\sqrt{x}+y\sqrt{x}=(b+y)\sqrt{x}$$

**هه‌وڵبده** ئه‌م بڕانه ساده‌بكه أ $4\sqrt{6}-\sqrt{6}$ ب $y+2\sqrt{x}-2y-3\sqrt{x}$

### چالاكی

## Operations with Radical Expressions بڕه ڕه‌گییه‌كان و كرداره‌كان

بۆ ئه‌نجامدانی كرداره‌كان په‌یوه‌ندی نێوان ڕه‌گه‌كان و هێزه‌كان و توانه ڕێژه‌ییه‌كان به‌كاربهێنه.

1. به دوو ڕێگا $\sqrt{9\times16}$ هه‌ژمێربكه.
   أ $\sqrt{9\times16}=\sqrt{144}=?$ ب $\sqrt{9\times16}=\sqrt{9}\times\sqrt{16}=?$
2. سێ نموونه بهێنه‌ره‌وه بۆ دڵنیابوون له ڕاستی په‌یوه‌ندی $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$
3. هه‌ژمێری $\sqrt{9+16}$ و $\sqrt{9}+\sqrt{16}$ بكه و ئه‌نجامه‌كانیان به‌راوردبكه.
4. سێ نموونه بهێنه‌ره‌وه ڕوونی بكاته‌وه $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ هه‌موو كات ڕاست نییه.

خاڵی چاودێری ✓

### Multiplying Square Roots سیفه‌تی لێكدانی ڕه‌گه دووجاكان

ئه‌گه‌ر دوو ژماره‌ی ڕاستی $a$ ، $b$ سالب نه‌بن ئه‌وا:

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$$

ڕەفتارکردن لەگەڵ برە ڕەگییە سادەکراوەکان ئاسانترە لە ڕەفتارکردن لەگەڵ ئەو برانەی سادەنەکراون.

بڕی ڕەگی بە سادەترین شێوە **Simplist form** دەبێت، ئەگەر ئەم مەرجانەی خوارەوەی تێدابێت:

**1.** نەبوونی دووجای تەواو لەنێوان کۆلکەکانی ژمارەکە لەژێر هێمای ڕەگەکەدا.

**2.** نەبوونی کەرت یان کەرتەکان لە ژێر هێمای ڕەگەکەدا

**3.** نەبوونی ڕەگەکان لەژێرەی هەر کەرتێکدا کە بەشێکی برەکە پێکدەهێنێ (بیرت بێت ڕێژەکردنی ژێرە)




**نموونە 2** ئەم برانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

أ $\sqrt{12}$ ب $\sqrt{400}$ ج $\sqrt{a^2}$ د $\sqrt{a^5b^{10}}$

**شیکار**

بەدوای دووجا تەواوەکاندا بگەڕێ لە نێوان هاوکۆلکەکاندا. سیفەتی لێکدانی ڕەگە دووجاکان بەکاربهێنە، ڕەگی دووجای ئەو دووجایە سادەبکە. کۆلکەکانی تر بەجێبهێڵە.

أ $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

ب $\sqrt{400} = \sqrt{4} \times \sqrt{100} = 2 \times 10 = 20$

لەبەر ئەوەی هێمای ڕەگی دووجا ڕەگێکی سالب نییە لەمەوە $\sqrt{a^2}$ سالب نییە. هێمای ڕووت بەکاربهێنە بۆ نیشانی ئەو، کاتێك توانی گۆڕاوەکە لەژێر هێمای ڕەگەکەدا جووت بێت، و توانی گۆڕاوەکە لە دەرەوەی هێمای ڕەگدا بێت، پاش سادەکردن تاك بێت.

ج $\sqrt{a^2} = |a^1| = |a|$

د $\sqrt{a^5b^{10}} = \sqrt{a(a^2)^2(b^5)^2} = a^2|b^5|\sqrt{a}$

**هەوڵبدە** $\sqrt{72m^2n^5}$ سادەبکە.

**بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** بۆچی بەکارهێنانی هێمای بەهای ڕووت لەمانەی خوارەوە بەپێویست نازانرێت.

أ $\sqrt{b^3} = b\sqrt{b}$ ب $\sqrt{b^4} = b^2$

**نموونە 3** ئەم برانە سادەبکە.

أ $\left(5\sqrt{3}\right)^2$ ب $\sqrt{3} \times \sqrt{6}$

ج $\sqrt{2}\left(6+\sqrt{12}\right)$ د $\left(3-\sqrt{2}\right)\left(4+\sqrt{2}\right)$

**شیکار**

أ بیرت بێ کە دووجای هەر ژمارەیەك دەکاتە لێکدانی ژمارەکە لەخۆی. ئەم بیرۆکەیە جێبەجێبکە. پاشان کۆلکەکان پێش لێکدان ڕیزبەند بکە.

$$\left(5\sqrt{3}\right)^2 = \left(5\sqrt{3}\right)\left(5\sqrt{3}\right) = (5 \times 5)\left(\sqrt{3} \times \sqrt{3}\right) = 25 \times 3 = 75$$

ب سیفەتی لێکدانی ڕەگەکان بەکاربهێنە. ئەنجامی لێکدانەکە کە لە ژێر هێمای ڕەگەکەدایە شیتەڵبکە پاشان سادەیبکە. $\sqrt{3} \times \sqrt{6} = \sqrt{3 \times 6} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

ج سیفەتی بەشینەوە بەکاربهێنە بۆ ئەوەی لێکدان و شیکردنەوە و سادەکردن ئەنجامبدەیت.

$$\sqrt{2}\left(6+\sqrt{12}\right)=6\sqrt{2}+\sqrt{2}\times\sqrt{12}=6\sqrt{2}+\sqrt{2\times 12}$$
$$=6\sqrt{2}+\sqrt{24}=6\sqrt{2}+\sqrt{6\times 4}=6\sqrt{2}+2\sqrt{6}$$

د $\left(3-\sqrt{2}\right)\left(4+\sqrt{2}\right)=12+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}-2=10-\sqrt{2}$

**هەوڵبدە** ئەمانە کورتبکەرەوە. أ $\left(2\sqrt{7}\right)^2$ ب $\sqrt{2}\left(4-\sqrt{8}\right)$

## سیفەتی دابەشکردنی ڕەگە دووجاکان Dividing Square Roots

ئەگەر $a$ ، $b$ دوو ژمارەی ڕاستی موجەب بن ئەوا:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

**نموونە 4** ئەم برانە سادەبکە.

أ $\sqrt{\frac{16}{25}}$ ب $\sqrt{\frac{7}{16}}$ ج $\sqrt{\frac{a^2b^3}{c^2}}$ د $\sqrt{\frac{9}{5}}$

**شیکار**

پاش بەکارهێنانی سیفەتی دابەشکردنی ڕەگەکان، ڕەگی دووجای هەریەکە لەمانەی خوارەوە بنووسە. سەرە و ژێرەی هەریەکیان بە جیا سادەبکە.

أ $\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}=\frac{4}{5}$ ب $\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

ج $\sqrt{\frac{a^2b^3}{c^2}}=\frac{|a|b\sqrt{b}}{|c|}$ د $\sqrt{\frac{9}{5}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$

ژێرەی دوا وەڵام ڕەگی تێدایە. ئەگەر دەتەوێت خۆتی لێ ڕزگاربکەی، برەکە لە بڕی $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ بدە کە یەکسانە بە 1.

$$\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{3\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

بەم کردارەش دەوترێت ڕێژەکردنی ژێرە.

**هەوڵبدە** ئەم برانە سادەبکە. أ $\sqrt{\frac{4}{24}}$ ب $\sqrt{\frac{4}{3}}$ د $\sqrt{\frac{ab^2}{c}}$

# ڕاهێنــــــــان

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 ڕوونیبکەرەوە چۆن پەرەی هێڵە ڕوونکردنەوەییەکان بەکاردێنیت بۆ دیاریکردنی ڕەگی دووجای ژمارەی 16 (دووجای تەواو).

2 ڕوونیبکەرەوە چۆن پەرەی هێڵە ڕوونکردنەوەییەکان بەکاردێنیت بۆ دیاریکردنی ڕەگی دووجای ژمارەی 19(دووجای تەواو نییە).

3 ڕوونیبکەرەوە $\sqrt{7}$ چۆن دەخەمڵێنی بەبێ بەکارهێنانی بژمێرە یان پەرەی هێڵە ڕوونکردنەوەییەکان.

4 چۆن شیتەڵکردن بەکاردەهێنیت بۆ سادەکردنی بڕێکی ڕەگی وەك بڕی $5\sqrt{90x^3y^4}$ .

5 سادەترین شێوە بۆ بڕێکی ڕەگی چییە؟

## ڕاهێنانی ئاراستەکراو

هەژماری ئەم ڕەگە دووجایانە بکە.

**6** $\sqrt{36}$ **7** $-\sqrt{64}$ **8** $\pm\sqrt{81}$ **9** $-\sqrt{121}$

ئەم برانە سادەبکە.

**10** $8\sqrt{3}-6\sqrt{3}$ **11** $9+3\sqrt{7}-5\sqrt{7}+4$

ئەم برە ڕەگیانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

**12** $\sqrt{32}$ **13** $\sqrt{x^2y^7}$ **14** $\sqrt{27x^6}$ **15** $\sqrt{a^7b^3}$

ئەم برانە سادەبکە.

**16** $\left(7\sqrt{11}\right)^2$ **17** $\sqrt{2}\times\sqrt{10}$ **18** $\left(5-\sqrt{3}\right)\left(5+\sqrt{3}\right)$

**19** $\sqrt{\frac{9}{4}}$ **20** $\sqrt{\frac{6}{49}}$ **21** $\sqrt{\frac{225}{18}}$ **22** $\sqrt{\frac{x^7y^{14}}{z^3}}$

## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ئەم ڕەگە دووجایانە هەژمار کە. ئەگەر ڕەگەدووجاکان ڕێژەیی نەبوون ئەوا بۆ نزیکترین بەش لە سەد نزیکبکەوە.

**23** $\sqrt{225}$ **24** $-\sqrt{169}$ **25** $-\sqrt{11}$ **26** $\sqrt{\frac{4}{9}}$ **27** $-\sqrt{40}$

**28** $-\sqrt{27}$ **29** $\sqrt{1000}$ **30** $\sqrt{10000}$ **31** $-\sqrt{0.04}$ **32** $\sqrt{0.059}$

بەبەکارهێنانی شیتەڵکردن ئەمانە سادەبکە.

**33** $\sqrt{49}$ **34** $\sqrt{196}$ **35** $\sqrt{576}$ **36** $\sqrt{3600}$ **37** $\sqrt{192}$

**38** $\sqrt{75}$ **39** $\sqrt{98}$ **40** $\sqrt{1620}$ **41** $\sqrt{264}$ **42** $\sqrt{648}$

وادابنێ $a$ ، $b$ ژمارەی موجەب بن، و دیاریکە ڕستەکە ڕاستە یان نا.

**43** $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ **44** $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ **45** $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

ئەم برانە بە سادەترین شێوە بنووسە.

**46** $\sqrt{3}\times\sqrt{12}$ **47** $\sqrt{8}\times\sqrt{18}$ **48** $\sqrt{48}\times\sqrt{3}$ **49** $\sqrt{54}\times\sqrt{6}$

**50** $\sqrt{\frac{64}{16}}$ **51** $\sqrt{\frac{96}{2}}$ **52** $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{8}}$ **53** $\frac{\sqrt{150}}{\sqrt{6}}$

**54** $\sqrt{5}\times\sqrt{15}$ **55** $\sqrt{98}\times\sqrt{14}$ **56** $\sqrt{\frac{56}{8}}$ **57** $\frac{\sqrt{96}}{\sqrt{8}}$

ئەم برانەسادە بکە و وایدابنێ هەموو گۆڕاوەکان سالب نین و هەموو ژێرەکان جیاوازن لە سفر.

**58** $\sqrt{a^4b^6}$ **59** $\sqrt{x^8y^9}$ **60** $\sqrt{\frac{a^6}{b^{10}}}$ **61** $\sqrt{\frac{x^3}{y^6}}$

ئەو کردارانەی لە توانات دا هەیە ئەنجامیان بدە و وەڵامەکەت بە سادەترین شێوە بنووسە.

**62** $3\sqrt{5}+4\sqrt{5}$ **63** $4\sqrt{5}+2\sqrt{5}-5\sqrt{5}$ **64** $\sqrt{6}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}$

**65** $\left(4+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)$ **66** $\frac{6+\sqrt{18}}{3}$ **67** $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$

ئەمانە سادەبکە.

**68** $\left(3\sqrt{5}\right)^2$ **69** $\left(4\sqrt{25}\right)^2$ **70** $\sqrt{12}\times\sqrt{6}$

**71** $\sqrt{72}\times\sqrt{32}$ **72** $3\left(9+\sqrt{5}\right)$ **73** $\sqrt{5}\left(6-\sqrt{15}\right)$

**74** $\sqrt{6}\left(6+\sqrt{18}\right)$ **75** $\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)$ **76** $\left(\sqrt{3}-4\right)\left(\sqrt{3}+2\right)$

بەرەنگــــاری

**77** $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+2\right)^2$ **78** $\sqrt{12}\left(\sqrt{3}+8\right)^2$ **79** $\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-4\right)^2$

گــرێــدان

**ئەندازە** درێژی لایەکی ئەو چوارگۆشەیە دیاربکە کە ڕووبەرەکەی دەکاتە:

**80** $250\text{m}^2$ **81** $144\text{m}^2$ **82** $28\text{m}^2$

جێبەجێکردنەکان

**83** **باخچەکان** لەبەر دەرگای ماڵی شیرین باخچەیەکی چوارگۆشەیی هەیە ڕووبەرەکەی دەکاتە $676\text{m}^2$، درێژی لایەکی چەندە؟

## ڕوانینێك بۆ دواوە

ئەمانە سادەبکە.

**84** $\left(-a^2b^2\right)^3\left(a^4b^2\right)^3$ **85** $\frac{x^5y^7}{x^2y^3}$ **86** $\left(\frac{20x^3}{-4x^2}\right)^3$

ئەمانە لێکبدە.

**87** $(2x-4)(2x-4)$ **88** $(3d+5)(2d-6)$ **89** $(6b+1)(3b-1)$

## ڕوانینێك بۆ پێشەوە

ئەو هێزانەی توانیان ڕێژەییە بۆ دەربڕینی ڕەگەکان بەکاردێن. بەشێوەی $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ دەنووسرێن

کاتێك $a$ ژمارەیەکی سالب نییە، $n$ ژمارەیەکی تەواوە کە لە 2 کەمتر نییە. بۆ نموونە:

$\sqrt[3]{27}=3$ چونکە $3^3=27$ و $\sqrt[4]{16}=2$ چونکە $2^4=16$

یاسای هێزەکان بۆسادەکردنی برەکان بەکاربهێنە. نموونەش بۆ ئەمە :

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^5\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=\left(x^{\frac{5}{2}}\right)\left(x^{\frac{3}{2}}\right)=x^{\frac{8}{2}}=x^4$$

ئەمانە سادەبکە.

**90** $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^4\left(x^5\right)^{\frac{1}{3}}$ **91** $(xy)^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^6\left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2$

**92** $\left(x^3y^{\frac{3}{2}}\right)^6(xy)^{\frac{1}{2}}$

بەش پرۆژەی

# شێوازەکان لە پێدراوەکاندا

مرۆڤ شێوازەکانی بەکارهێناوە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە سەرەتاکانی بیرکردنەوەی بیرکاریانەدا. لەم پرۆژەدا شێوازەکان بەکاردەهێنرێن بۆ شیکارکردنی پرسیارە جۆراوجۆرەکان و بۆ قووڵ بوونەوەی زیاتر لە جیهانی جەبردا.

## چالاکی 1

زانا گریگییەکان بایەخیان بە بنیاتنانی لاکێشەکان داوە و وایان داناوە کە ئاسوودەن بۆ سەیرکردن. ئەم لاکێشانەیان جیاکردۆتەوە بەپێی ڕێژەی درێژیان بۆ پانیان ( بە نزیکەی 1.618 ) و ناویان لێناون **لاکێشە زێڕینەکان Golden Rectangles** و ئەم ڕێژەیان ناوناوە بە **ڕێژەی زێڕین Golden Ratio**. دوای ئەوە زانایانی دەروونناسی گەیشتوونەتە ئەوەی کە مرۆڤ بەبێ هەستکردن ئەو شێوە لاکێشانەیان لا پەسندترە کە نزیکن لە لاکێشە زێڕینەکان. لەلایەکی ترەوە زانای بیرکاری ئیتاڵی فیبوناتشی ژمارەی یەك لەدواییەکی پێکهێناوە کە بە ناوی خۆیەوە ناسراون. ژمارەی یەکەمیان 1 و دووەمیان 2 بەڵام ژمارەکانی تر هەریەکیان دەکاتە سەرجەمی دوو ژمارەی پێش خۆی.

1 دە ژمارەی یەکەم لە ژمارەکانی فیبوناتشی بنووسە.

2 بژمێر بۆ تەواوکردنی خشتەکەی خوارەوە بەکاربهێنە، بۆ هەژمێرکردنی ڕێژەی هەر ژمارەیەك بۆ ژمارەکەی پێش خۆی.

| ژمارەی فیبوناتشی | ژمارەی دوای ئەو | ڕێژەی ژمارەی دوا بۆ ژمارەکە |
|---|---|---|
| 3 | 5 | 1.667 |
| 5 | 8 | ? |
| 8 | 13 | ? |
| ? | ? | ? |
| ? | ? | ? |
| ? | ? | ? |

3 وێنەی لاکێشەکان بکێشە کە درێژی و پانیان بریتین لە دوو ژمارەی یەك دوای یەکی فیبوناتشی. سانتیمەتر یان مللیمەتر بەکاربهێنە بۆ یەکەی درێژی.

4 بەراوردی ڕێژەی درێژی بۆ پانی لە هەر جارێکدا لەگەڵ ڕێژی زێڕین بکە.

5 کام لەم لاکێشانەی خوارەوە لە لاکێشەی زێڕین نزیکە.

أ پسوولەی $3 \times 5$  ب وێنەی $5 \times 7$

ج وێنەی $5 \times 8$  د وێنەی $8 \times 10$

6 ئایا لەگەڵ ئەو کەسانەدایت کە دەڵێن چاو بە سەیرکردنی لاکێشە زێڕینەکان ئاسوودە دەبێت.



## چالاکی 2

1 لەگەڵ هاورێکانتا 20 شێوەی بازنەیی هەڵبژێرە. چێوە ( $c$ ) و تیرە ( $d$ ) بۆ هەریەکەیان بپێوە. خشتەیەك بۆ پێدراوەکان دروستبکە.

2 ڕێژەی چێوە بۆ تیرە $\frac{c}{d}$ لە هەر بازنەیەك هەژماربکە.

3 جووتە ڕێکخراوی ( $d$ ، $c$ ) لە ڕووتەختی پۆتاندا بنوێنە.

4 ڕاستەیەکی ڕوون بەکاربهێنە بۆ وێنەکێشانی ئەو ڕاستە هێڵەی گەورەترین ژمارەی خاڵدا یان بەنزیکیاندابڕوات.

5 لاری ئەو ڕاستەهێڵە هەژمێربکە.

6 پەیوەندی نێوان ئەو لارییەی هەژمێرت کردووە و ژمارەی $\pi$ چییە؟ لەمەوە ڕێسایەك پوختە بکە کە ڕێت پێدەدات بە هەژمێرکردنی چێوەی بازنە بە زانینی تیرەکەی. ئەو ڕێسایە چییە؟

# 1

# پێداچوونەوە

لە پرسیاری 1 تا 5 یەکسانی سیفەتێك لە سیفەتەكانی كردارەكانی سەر ژمارە ڕاستییەكان دەردەبڕێت. كامانەن؟

**1** $a(2b)=(2b)a$

**2** $2\times1=2$

**3** $b\left(\frac{1}{b}\right)=1$

**4** $3x+0=3x$

**5** $5(2-x)=5\times2+5(-x)$

بەهای بڕەكان لە پرسیاری 6 تا 9 هەژمێربكە

**6** $(-1)\times(5+3)^2-11$

**7** $\frac{(11-5)^2}{3\times2}$

**8** $\frac{(6-12)^5}{-3^2}$

**9** $\frac{32-(13+4)}{(-3)^2}$

ئابووری نرخی پێویست لەسەر سارا گەیشتە 88 هەزار دینار لە بەكارهێنانی ئینتەرنێتدا. و ئەم بڕە پارە بۆ هاوبەشیكردن و نرخەكەی كە 55 هەزار دینارە لە مانگێكدا و تێچوونی بەكارهێنانی ئینتەرنێت كە نرخی 3 هەزار دینارە بۆ هەر كاتژمێرێك.

**10** هاوكێشەیەك بنووسە كە بڕی پارەی پێویست لەسەر سارا بنوێنێت كاتێك $x$ هێمای كاتژمێرەكان بێت.

**11** هاوكێشەكە شیكاربكە ژمارەی كاتژمێرەكان دیاربكە كە سارا ئێنتەرنێتی بەكارهێناوە.

**12** هاوكێشەی $F=\frac{9}{5}C+32$ شیكاربكە بە هەژماركردنی $C$ بەپێی $F$ .

شیكاری ئەم لاسەنگە ئاوێتانە بكە و كۆمەڵە شیكارەكانیان لەسەر تەوەری ژمارەكان بنوێنە.

**13** $-4x>-18$ وە $-3x-8\leqslant7$

**14** $-3x<-5$ یان $4x-3<29$

**15** هەژمێری بەهای بڕی $\left(\frac{5^{-2}\times5^3}{5^2}\right)^2$ بكە.

بڕەكان لە پرسیاری 16 تا 18 سادەبكە.

**16** $x^4(3x)^2$

**17** $\frac{(ab^2)^3}{c^2}$

**18** $\left(\frac{p^{-1}q^2}{p^{-2}}\right)^{-4}\times\left(\frac{p^{-3}q^{-3}}{p^{-3}q^{-1}}\right)^{-3}$

شیكاری سستەمی هاوكێشەكان بە لابردن بكە لەهەردوو ڕاهێنانی 19 و 20.

**19** $\begin{cases}9x+2y=2\\21x+6y=4\end{cases}$

**20** $\begin{cases}2y=3x-6\\y=x-2\end{cases}$

شیكاری سستەمی هاوكێشەكان بكە بە لە جیاتیدانان لە هەردوو ڕاهێنانی 21 و 22 .

**21** $\begin{cases}y=2x-4\\7x-5y=14\end{cases}$

**22** $\begin{cases}2x+10y=-2\\6x+4y=20\end{cases}$

بڕەكانی هەردوو ڕاهێنانی 23 و 24 سادەبكە.

**23** $\sqrt{x^2y^4}\,(x^5y)^{\frac{1}{2}}$

**24** $\frac{(24m^8n)^{\frac{1}{2}}}{(mn^2)^{\frac{1}{2}}}$

لە پرسیاری 25 تا 28 بڕەكان بە سادەترین شێوە بنووسە بەمەرجێك ژێرەیان ڕێژەیی بێت.

**25** $\sqrt{\frac{5}{25}}$ **26** $\sqrt{\frac{3}{49}}$

**27** $\sqrt{\frac{16}{5}}$ **28** $\sqrt{\frac{6}{14}}$



# تاقیکردنەوەی بەش

**بەجێبەجێکردنی ڕیزبەندی کردارەکان ئەم بڕانە هەژماربکە.**

1 $5+2(7-4)^2$

2 $12-9\div 3+2\times 5$

3 $\frac{4+6}{2}+2\times 5$

4 $5\times 4\div 2+3^{(4-1)}$

**ئەو سیفەتە کامەیە کە لە هەر جارێکدا بەکارهاتووە ئەگەر زانیت هەموو گۆڕاوەکان ژمارەی ڕاستین.**

5 $5x\times 1=5x$

6 $7a-14=7(a-2)$

7 $\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{2}{a}\right)=1$

8 $4(xy)=(xy)\times 4$

**هەر بڕێك لەمانە سادەبکە ئەگەر زانیت هەموو گۆڕاوەکان جیاوازن لەسفر.**

9 $y^3(x^2y)$

10 $\frac{(9by)^2}{(3bxy)^3}$

11 $\frac{14x^{-3}a^4}{35x^5a^3}$

12 $\left(\frac{3x^4k^{-1}}{8x^{-2}k^3}\right)^{-2}$

13 **فیزیا** دەتوانین جولە ووزە بپێوین بە بەکارهێنانی ڕێسای $k=\frac{1}{2}mv^2$ بپێوین کاتێك $m$ بارستایی بە کیلۆگرام و $v$ خێرایی بە مەتر لە چرکەیەکدا و $k$ جولە وزەیە بەجول. جولە ووزەی تەنێك چەندە کە بارستاییەکەی 100 کگم بێت وبە خێراییەکەی 5 م/چ دەجولێت.

**هەریەکە لەم هاوکێشانە شیکاربکە.**

14 $4x-3=17$

15 $\frac{x}{3}-2=16$

16 $2x-0.8=2.4$

17 $8x+4=2x-32$

18 **ئەندازە** بە دوو گۆشە دەووترێت تەواوکەری یەکترن کاتێك کۆی پێوانەکانیان بکاتە 90 پلە، هاوکێشەیەك بنووسە و شیکارییکە بۆ هەژمێرکردنی پێوانەی هەریەك لە دوو گۆشەی یەکتر تەواوکەر. ئەگەر زانیت پێوانەی یەکێکیان 30 پلەی زیاترە لەوی تریان.

19 هاوکێشەی $m=\frac{1}{2}xk^2$ شیکاربکە بە هەژمێرێ $k$ بەپێی دوو گۆڕاوەکەی تر.

**هەریەك لەم لاسەنگانە شیکاربکە و شیکارەکەیان بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە.**

20 $-3x-6>15$

21 $2(4x-5)<6x-6$

**هەریەکە لەم لاسەنگە ئاوێتانە شیکاربکە و شیکارەکە بە ڕوونکردنەوەی بنوێنە.**

22 $(3x+4>7)\wedge(2x-3<5)$

23 $(5x\geq 3)\vee(-2+4x\leq 10)$

24 **بۆخۆشی** 5 منداڵ لەگەڵ 3 گەورەدا بۆ باخچەی ئاژەڵان چوون و 80 هەزار دیناریان پێبوو. لاسەنگەیەك بنووسە هەژمارکردنی بەزرترین ڕادەی بۆ نرخی بلیتی منداڵێك ئەگەر بزانیت بلیتی گەورە بە 14 هەزار دینارە. بەرزترین ڕادە چەندە؟

**هەریەك لەم سیستمانە بە لەجیاتیدانان شیکاربکە و پاسادانی شیکارەکانیان بکە.**

25 $\begin{cases}2x-3y=1\\ y=x-2\end{cases}$

26 $\begin{cases}x+y=3\\ 2x+3y=3\end{cases}$

27 **ژمارەکان** کۆی دوو ژمارە دەکاتە 7 . چوار ئەوەندەی یەکەمیان 1 ی زیاترە لە 5 ئەوندەی دووەمیان. ئەم دوو ژمارەیە دیاریبکە بە ڕێگای نووسینی سیستمی هاوکێشەکان و شیکارییکە.

**هەر سیستمێك لەمانە بە لابردن شیکار بکە و پاسادانی شیکارەکە بکە.**

28 $\begin{cases}x+y=1\\ x-2y=-8\end{cases}$

29 $\begin{cases}5x+2y=24\\ 2x-12=4y\end{cases}$

30 $\begin{cases}\frac{1}{3}x-y=4\\ 2x-6y=12\end{cases}$

31 $\begin{cases}4x+3y=0\\ y-x=-7\end{cases}$

32 **بەکارداچوون** نرخی 3 تێنووس و 4 پەرتووك دەکاتە 7 250 دینار و نرخی 5 تێنووس و 2 پەرتووك دەکاتە 6 600 دینار. هەژمێری نرخی هەریەکە لە تێنووس و پەرتووك بکە لە ڕێگای نووسینی سستەمی هاوکێشەکان و شیکارەکەی.

**هەژمێری بەهای هەریەك لەم بڕانە بکە.**

33 $\left(3\sqrt{81}\right)^2-31$

34 $\frac{1}{5}\left(\left(\sqrt{9}\right)^3+\left(\sqrt{64}\right)^2+2\right)$

**هەریەك لەم بڕانە سادەبکە و وای دابنێ کە بەهای هەموو گۆڕاوەکان موجەبن.**

35 $5\sqrt{8x^3y^6}\times\left(2x^5y\right)^{\frac{1}{2}}$

36 $\frac{8\sqrt{5x^7y^9}}{\sqrt{25x^3y^5}}$

37 $\left(5-\sqrt{12}\right)-\left(2\sqrt{27}+8\right)$

38 $\left(2+\sqrt{5}\right)\left(3-2\sqrt{5}\right)$

1

# تاقیکردنەوەی کەڵکەبوو

**1** کام لەم ژمارانەی خوارەوە ڕێژەیی نییە؟

أ $178.259\ 259...$ ب $\sqrt{7}$

ج $\sqrt{49}$ د $-2315$

**2** کام ژمارە لەمانەی خوارەوە تەواوە؟

أ $17.\overline{259}$ ب $\sqrt{142}$

ج $(27)^{\frac{1}{3}}$ د $\frac{1235}{16}$

**3** دوو ژمارەی $-5$ و $3.25$ بە دوو خاڵ لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە و دووری نێوانیان هەژمار بکە.

**4** دوو ژمارەی $3.\overline{7}$ وە $-2.\overline{4}$ بە دوو خاڵ لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنەو دووری نێوانیان هەژمێربکە.

**5** یەکسانیەکەی $3+(5+7)=(3+5)+7$ ؟ چ سیفەتێکی کردارەکان دەردەبرێت.

**6** یەکسانیەکەی $2(a+b)=2a+2b$ ؟ چ سیفەتێکی کردارەکان دەردەبرێت.

**7** کرداری لێدەرکردن سیفەتی ئاڵوگۆڕی هەیە؟ بە نموونە ڕوونییکەوە.

**8** نموونەیەك بهێنەرەوە ڕوونیبکاتەوە دابەشبوون سیفەتی ئاڵوگۆڕی نییە.

**9** هاوکێشەی $\frac{3x-15}{2}=9-4x$ شیکاربکە.

**10** گۆڕاوی $b$ بەپێی گۆڕاوەکانی تر هەژماربکە لە ڕێسای $x=\frac{ab-1780}{q}$ .

**11** ئەم هاوکێشەیە شیکاربکە $\frac{3x-2.5}{5}-123=5.6(2.1x-12.4)+3.26$ .

**12** لاسەنگەی $-x+4\le 2(1-2x)$ شیکار بکە و لەسەر تەوەری ژمارەکان کۆمەڵە شیکارەکە بنوێنە.

**13** کام لەم ژمارانە شیکار نییە بۆ لاسەنگەی $5x-6(x+9)<1$

أ $15$ ب $-35$

ج $18.25$ د $-55$

**14** بەهای بڕی $27^{\frac{2}{3}}$ چەندە؟

أ $3.5$ ب $3$

ج $9$ د $6$

**لە پرسیاری 15 تا 17 بەهای بڕەکە هەژمێربکە.**

**15** $75-\frac{3(4+12\div 2)^2}{3+2}$

**16** $\frac{6^2\times 6^{-3}}{6^{-1}}$

**17** $[3(1+2)+3]2^2$

**18** بڕی $\left(\frac{2x^{-2}y^3}{x^2y^{-3}}\right)^{-1}$ سادەبکە.

**سیستمی دوو هاوکێشەکەی خوارەوە بە لەجیاتیدانان پاشان بە لابردن شیکاربکە.**

**19** $\begin{cases}11x+4y=-17\\-6x+y=22\end{cases}$

**20** $\begin{cases}1.5x+2y=9.5\\2.25x-0.5y=5.5\end{cases}$

**21** ئایا بۆ سستەمی دوو هاوکێشەی $\begin{cases}2x-3y=11\\6x-9y=22\end{cases}$ شیکار هەیە.

**22** بە لەجیاتیدانانی سیستمی دوو هاوکێشەی $\begin{cases}3x-3y=1\\x+y=4\end{cases}$ شیکاربکە.

**لە پرسیارەکانی 23 تا 26 بڕە ڕەگییەکان سادەبکە.**

**23** $(\sqrt{3}+2)(-1+\sqrt{3})$

**24** $(3\sqrt{5}+2)-(3+2\sqrt{20})$

**25** $\frac{2}{\sqrt{15}}$

**26** $\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

## بەشی دووەم

# نەخشەکان

# Functions

# نەخشەکان Functions

بەشی

2

نەخشەکان لە پرسیارەکانی ژیانی ڕۆژانە بەکاردێت لە میانەی بەکارهێنانی هێندەکان بۆ دەربڕینی گۆڕانەکان و پەیوەندی نێوان دوو گۆڕاو، نموونە لەسەر ئەوە دەتوانرێ پەیوەندی نێوان خێرایی سوڕانەوەی شەمەندەفەر و ئەو هێزەی سەرنشینەکان لە شوێنەکانیان جێگیردەکات بەهۆی نەخشە بنوێنرێت.

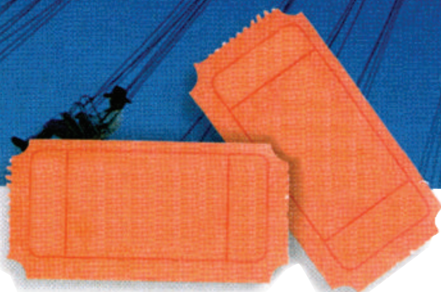




**وانەکان**

1. نەخشەکان.
2. نەخشەی هێڵی.
3. شێوەجیاوازەکانی هاوکێشەی ڕاستەهێڵ.
4. تەریببوون و ئەستوون بوونی ڕاستەهێڵەکان.
5. شیکارکردنی سستەمی هاوکێشە هێڵییەکان بە ڕوونکردنەوەیی.
6. نەخشەی ڕووت.
7. هاوکێشەکان و لاسەنگەکان کە بەهای ڕووتیان تێدایە.

پڕۆژەی بەشەکە.



## دەربارەی پرۆژەی بەش

پرسیارەکانی ژیانی ڕۆژانە زۆرجار ئاڵۆزن. یان هەندێ هۆکار کە کاریان تێدەکەن نەزانراون. لەبەرئەو هۆیە مرۆڤ نموونە بیرکارییەکان بەکاردەهێنێت بۆ نواندنی ئەو جۆرە پرسیارانە و خەملآندنی شیکارە چاوەڕوانکراوەکان دەکات. لەمیانەی ئەنجامدانی کارەکانت نەخشە بەکاردەهێنیت بۆ دۆزینەوەی ئەو نموونە بیرکاریانەی پەیوەستن بەزیادبوونی پاشەڕۆی بۆشایی (گەردون) کە بەدەوری زەوی دەخولێتەوە.

پاش تەواوبوونت لە پرۆژەی ئەم بەشە توانات دەبێت لەسەر:

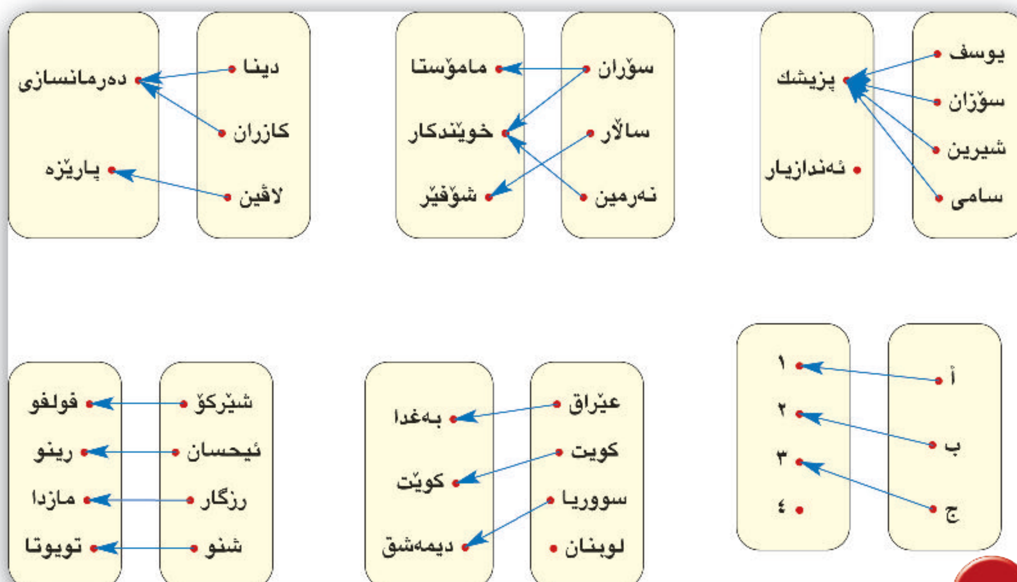
- بەکارهێنانی خشتە بۆ نواندنی پەیوەندی نێوان کات (بەساڵ) و هێندی پاشەڕۆی بۆشایی و دیاریکردنی نەخشەی گونجاو کە نموونەی بیرکاری ئەو پەیوەندییە پێکبهێنێ.
- دۆزینەوەی چەند نموونەیەك بۆ لێکۆڵینەوە لەسەر کۆبوونەوەی جۆرە جیاوازەکانی پاشەڕۆیەکانی بۆشایی و لێکۆڵینەوەیان.
- دیاریکردنی جۆرە نەخشەیەك بۆ لێکۆڵینەوەی پەیوەندی نێوان بەرزی و هێندی پاشەڕۆی بۆشایی لەو بەرزیەدا.

وانەی 1

# نەخشەكان
# Functions

## ئامانجەكان

- نواندنی پەیوەندی نێوان دوو گۆڕاو بە ڕوونكردنەوەیی.
- دیاریكردنی بواری پەیوەندییەكە و مەوداكەی.
- بڕیاردانی ئەوەی كە ئایا پەیوەندییەكە نەخشە دیاریدەكات.
- هەژمێركردنی بەهای نەخشە كاتێك گۆڕاوەكە بەهای دیاریكراو وەردەگرێت.




**بۆچی**

نەخشەكان و پەیوەندییەكان بەزۆری بەكاردێن بۆ بنیاتنانی نموونەی بیركاری كە ژیانی ڕۆژانە یان یاسای زانستی دەردەبڕن.

**چالاكی**

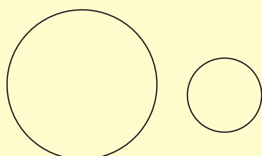
## پەیوەندییەكان و نەخشەكان — Relations and function



1. كارزان پەڕاوی تەلەفۆنی كردەوە و بینی:

| ناو | ژمارەی تەلەفۆن |
|---|---|
| شكری | 235 246 |
| هیوا | 456 987 |
| خەسرەو | 852 369 |
| شایان | 369 852 |
| ڤیان | 741 236 |

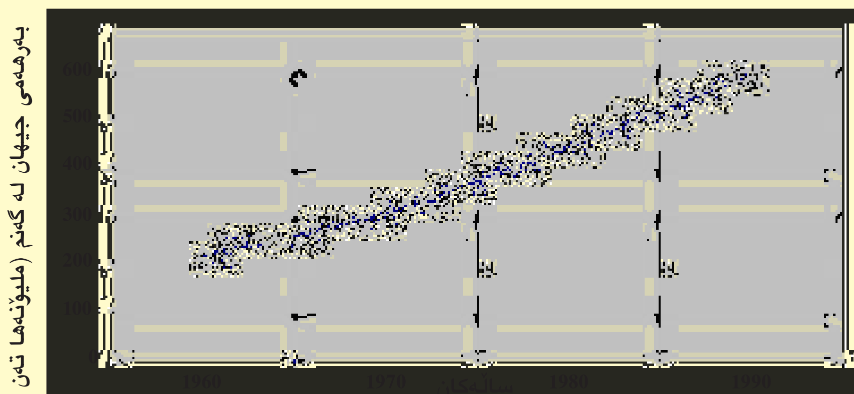
ژمارەی تەلەفۆنی ڤیان چەندە؟ ژمارەی تەلەفۆنی خسرەو چەندە؟



2. بژمێر بەكاربێنە بۆ تەواوكردنی ئەو خشتەیەی دێت كە ڕووبەری بازنەت دەداتێ بەپێی بەها جیاوازەكانی نیوەتیرەكەی، پاشان ڕوونیبكەوە چۆن خشتەكەت تەواوكرد.

| نیوەتیرە | 1 | 1.5 | 4 | 0.5 | 0.75 | 3 | 0 | 2.5 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ڕووبەر | 3.14 | | | | | | | | |

**3.** ئەم وێنە ڕوونکردنەوەی خوارەوە پێشکەوتنی بەرهەمی جیهانی گەنم لە نیوەی دووەمی سەدەی بیستەم بە ملیۆنەها تەن ڕووندەکاتەوە.




وێنە ڕوونکردنەوەییەکە بەکاربهێنە بۆ خەمڵاندنی بەرهەمی جیهانی گەنم بۆ ئەوەی ئەو خشتەیەی دێت تەواوبکەیت.

| ساڵ | 1960 | 1965 | 1970 | 1975 | 1980 | 1985 | 1990 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| بڕی بەرهەمی گەنم | 220 | | | | | | |

**4.** ئەم خشتەیەی دێت تێکڕای پلەکانی گەرمی لە کەرکوك لە هەفتەی یەکەمی مانگی نیسان دیاردەکات.

| ڕۆژانی حەفتە | شەممە | یەکشەممە | دووشەممە | سێ شەممە | چوارشەممە | پێنجشەممە | هەینی |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| تێکڕای پلەی گەرمی | 25 | 24 | 23 | 20 | 22 | 24 | 25 |



تێکڕای پلەی گەرمی ڕۆژی یەکشەممە چەندبووە؟

تێکڕای پلەی گەرمی ڕۆژی چوارشەممە چەندبووە؟

ڕۆژی پێنج شەممە چەندبووە؟

ئەگەر چوار نموونەی پێشووت پشکنی دەبینیت هەریەکەیان دوو گۆڕاوی تێدایە. و بەهای یەکێك لەو دوو گۆڕاوانە بەهای ئەوی تریان دیاریدەکات.

خاڵی چاودێری ✓

5.ئەم خشتەیەی دێت تەواوبکە بەدیاریکردنی گۆڕاوی یەکەم لەهەر نموونەیەك کە بەهای گۆڕاوی دووەم دیاردەکات.

| نموونە | گۆڕاوی یەکەم | گۆڕاوی دووەم |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |

باس لەهەبوونی پەیوەندی **Relation** نێوان دوو گۆڕاوی $x$ و $y$ دەکات، ئەگەر بەهاکانی یەکێکیان زانراو بێت وەك $x$ ئەوا بەهاکانی دووەم $y$ دیاریدەکات، لەو بارەدا دەڵێین گۆڕاوی یەکەم گۆڕاوێکی ئازادە **Independent Variable** و دووەم گۆڕاوێکی پەیوەستە **Dependent Variablde**.

## Functions نەخشەکان

لە نموونەی یەکەم دوودڵ دەبیت لە وەڵامی ئەو پرسیارە: **نمرەی تەلەفۆنی خەسرەو چەندە؟** چونکە گۆڕاوی ئازادەکە **ناوە**، دوو بەهای گۆڕاوی پەیوەستی لە بەرامبەرە. بەڵام لە نموونەکانی تر، تۆ توشی ئەم کێشەیە نابیت چونکە هەر بەهایەکی گۆڕاوی ئازاد بەرامبەر تەنها یەك بەهای گۆڕاوی پەیوەستە.

بە پەیوەندی نێوان دوو گۆڕاوی $x$ و $y$ دەڵێت **نەخشە Function** ئەگەر هەر بەهایەکی وەك $a$ لە بەهاکانی گۆڕاوی $x$ تەنها یەك بەهای وەك $b$ لە بەهاکانی گۆڕاوی $y$ بەرامبەری بێت، ئەو بەها تاکانەی $b$ پێی دەوترێت **وێنەی Image** نەخشەکە بە گۆڕاوی یەکەم دەوترێ **گۆڕاوی ئازاد** و گۆڕاوی دووەم **پەیوەست**.

**خاڵی چاودێری** ✓

سەر لەنوێ چوار نموونەکە شیبکەوە، و لەهەر بارێکدا دیاریبکە پەیوەندیەکە نەخشەیە یان نا، وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

**نموونە** 1

ئایا پێدراوەکانی ئەم خشتەیە نەخشە دەنوێنن؟ ئەوە ڕوونبکەوە.

.A

| بەهاکانی گۆڕاوی پەیوەست $y$ | بەهاکانی گۆڕاوی ئازاد $x$ |
|---|---|
| −3.6 | 1 |
| −3.6 | 2 |
| 4.2 | 3 |
| 4.2 | 4 |
| 10.7 | 5 |
| 12.1 | 6 |
| 52 | 52 |

.B

| بەهاکانی گۆڕاوی پەیوەست $y$ | بەهاکانی گۆڕاوی ئازاد $x$ |
|---|---|
| 7 | 3 |
| 8 | 3 |
| 10 | 3 |
| 42 | 4 |
| 34 | 10 |
| 18 | 11 |
| 52 | 52 |

**شیکار**

.A پێدراوەکانی خشتەی یەکەم نەخشە دەنوێنن چونکە هەر بەهایەك لە بەهاکانی گۆڕاوی ئازاد $x$ یەك بەهای گۆڕاوی پەیوەستی $y$ بەرامبەریەتی.

.B پێدراوەکانی خشتەی دووەم نەخشە نانوێنن، چونکە بەهای 3 بۆ گۆڕاوی ئازاد سێ بەهای گۆڕاوی $y$ کە 7، 8، 10 بەرامبەریەتی واتە خشتەی $b$ تەنها پەیوەندی دەنوێنێت.

## Different Ways to define a function شێوەکانی پێناسەی نەخشە

ئەگەر بڕوانیتە نموونەکانی پێشوو دەبینیت زۆر شێوە بۆ پێناسەی نەخشە هەیە دەتوانین پێناسەی نەخشە بکەین بەهۆی:

1. **خشتەی بەهاکان Table of Values** : نەخشە پێناسەدەکرێت لەم بارەدا بەهۆی خشتەیەکی دوو ستوونی، یەکەمیان بەهاکانی گۆڕاوی ئازاد بگرێتە خۆی، و ئەویتریان بەهاکانی گۆڕاوی پەیوەستی بەرامبەریان بگرێتەوە، بە مەرجێك بەهای گۆڕاوی ئازاد و بەهای گۆڕاوی بەرامبەری لەهەمان ڕیز بنووسرێت.

**نموونە** : نەخشەی نموونە 1

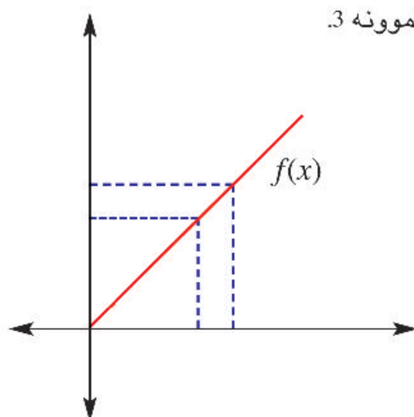
> پەیوەندیەکی پێناسکراو بەهۆی خشتەوە نەخشە پێك ناهێنێت، ئەگەر ستوونی گۆڕاوی ئازاد بەهایەك بگرێتەخۆ لە بەرامبەری دوو بەهای جیاواز بۆ گۆڕاوی پەیوەست هەبێت.

لێرەوە پەیوەندی پێناسەکراو بەهۆی خشتەوە لە نموونەی یەکەم نەخشە نانوێنێت، چونکە بەهای گۆڕاوی ئازاد (خەسرەو) دوو بەهای جیاوازی گۆڕاوی بەستراو (ژمارەی تەلەفۆن) بەرامبەریەتی.

2. **ڕێسا Rule**: نەخشە پێناسەدەکرێت بەهۆی ڕێسایەك یان یاسایەك، کە بەهای گۆڕاوی پەیوەست بەپێی گۆڕاوی ئازاد دەردەبڕێت.

**نموونە** : نەخشەی نموونەی دووەم کاتێك بەهای گۆڕاوی پەیوەست $A$ (ڕووبەری بازنە) دەردەبڕێت بەپێی گۆڕاوی ئازاد نت (نیوە تیرە) ئەم ڕێسایە ئەمەیە: $A(r)=\pi r^2$

3. **وێنەی ڕوونکردنەوەیی Graph** پێناسەدەکرێت بەهۆی وێنەی ڕوونکردنەوەیی کاتێك بەهای گۆڕاوی ئازاد لەسەر تەوەرەی سینەکان و بەهای گۆڕاوی پەیوەست لەسەر تەوەرەی صادەکان $y$ بن. بەهای گۆڕاوی پەیوەست کە بەرامبەر بەهای گۆڕاوی $x$ لە بەهاکانی گۆڕاوی ئازاد تانی ئەو خاڵە دیاریدەکات کە لەسەر وێنە ڕوونکردنەوەییەکەیە کاتێك پۆی سینی خاڵەکە دەکاتە $x$ . نموونە: نەخشەی نموونە 3.



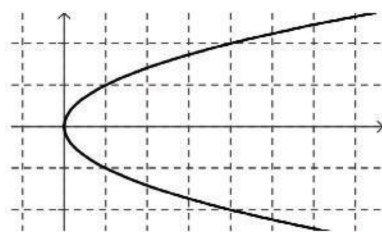

> **تاقیکردنەوەی ڕاستەهێڵی ستوونی** **Vertical Line Test**
>
> ئەگەر ڕاستەهێڵێکی ستوونی وێنەیەکی ڕوونکردنەوەی لە خاڵێك زیاتر بڕی، ئەوا ئەم وێنە ڕوونکردنەوەییە نەخشە نانوێنێت.

**نموونە** 2

أ ئایا وێنەی ڕوونکرنەوەیی بەرامبەر نەخشەیە؟ ڕوونبکەوە.

**شیکار**

أ نەخێر نەخشە نیە چونکەبۆ هەر بەهایەکی موجەب $x$ دوو بەهای گۆڕاو $y$ بەرامبەرە ، هەروەها ڕاستەهێڵی ستوونی وێنەکە لە دوو خاڵی جیاواز دەبڕێت .



بۆ لێکۆڵینەوەی نەخشەیەکی وەک $f(x)$، پێویستە ئەم خاڵانە جێبەجێبکەیت:

1. دیاریکردنی کۆمەڵەی ژمارە راستییەکانی گۆڕاوی ئازاد $x$ کە دەتوانیت هەژمارەی وێنەکەی $y = f(x)$ بکەیت. ئەو کۆمەڵەیە پێی دەوترێ بواری پێناسەی نەخشەکە یان بەکورتی **بواری** نەخشەکە **Domain**.
2. دیاریکردنی کۆمەڵەی ژمارە راستییەکانی گۆڕاوی پەیوەست دەیگرێتەوە، وپێی دەوترێت **مەودای** نەخشەکە **Range**.
3. نواندنی نەخشەکە بە ڕوونکردنەوەی. واتە نواندنی هەموو جووتە ڕێکخراوەکانی $(x,y)$ کاتێك $x$ دانە بێت لەبواری نەخشەکە و $y = f(x)$ کۆمەڵەی ئەو خاڵانە پێیان دەوترێت هێڵی **ڕوونکردنەوەی** نەخشەکە **Graph**.
4. پوختەکردنی سیفەتەکانی نەخشە لەمیانی لێکۆڵینەوەی هێڵی ڕوونکردنەوەیی.

**چۆن هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەیەك دروستدەکەیت**

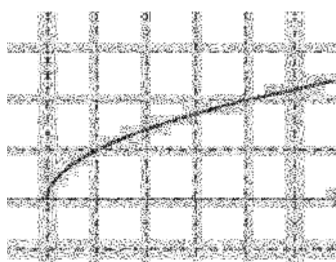
ئەگەر نەخشەکە بەهۆی خشتەی بەهاکان پێناسە کرابێت، هەموو خاڵەکانی $(x,y)$ کە لە خشتەکەدا هاتووە بنوێنە، پاشان ئەو خاڵانە بە هێڵێکی گونجاو بگەیەنە.

بەرەنگاری

ئەگەر نەخشەکە بە ڕێسا پێناسەکرابێت، خشتەی بەهاکانی نەخشەکە پێکبهێنە و خاڵەکانی بنوێنە و هێڵی ڕوونکردنەوەییەکەی بکێشە بەرێگای پێشوو. هەروەها دەتوانیت بە بەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی یان کۆمپیوتەر هێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشەکە بکێشیت.

# ڕاهێنـــــــــــــان

## بەردەوامبوون لە بیر کاریدا



1. جیاوازی نێوان نەخشە و پەیوەندی ڕوونبکەرەوە، نموونەیەك لەسەر وێنەی ڕوونکردنەوەیی بۆ پەیوەندییەك بهێنەرەوە نەخشە نەبێت.
2. سێ ڕێگا بۆ پێناسەکردنی نەخشە باسبکە.
3. چۆن بواری نەخشەی پێناسەکراو بەهێڵی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەر دیاردەکەیت، و چۆن مەوداکەی دیاریدەکەیت.

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئەو خشتانەی دێن نەخشە دەنوێنن؟ ئەوە ڕوونبکەوە.

**4**

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 5 | 3 |
| 8 | 4 |
| 5 | 7 |
| 9 | 2 |

**5**

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 3 |
| 1 | 8 |
| 2 | 8 |
| 3 | –7 |

**6**

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 10 | 7 |
| 20 | 11 |
| 30 | 9 |
| 40 | 7 |

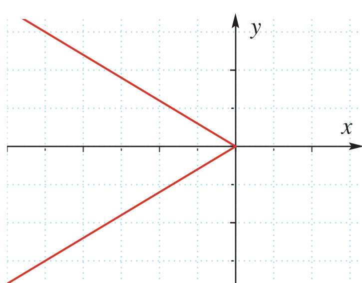
**7**

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 3 | 9 |
| 2 | 2 |
| 8 | –3 |
| 2 | 1 |

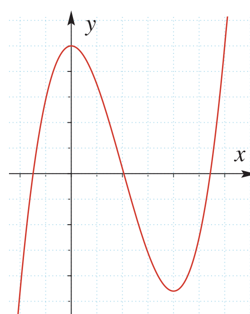
دیاریبکە ئەگەر ئەو وێنە ڕوونکردنەوییانە نەخشە دەنوێنن یان نا، هۆی وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

دیاریبکە ئەگەر ئەو وێنە ڕوونکردنەوەییانە نەخشە دەنوێنن یان نا، هۆی وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

**9**




**8**

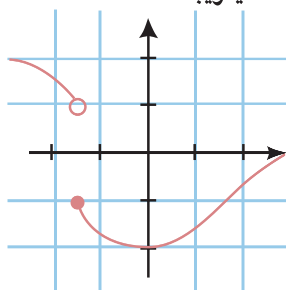



جێبەجێکردنەکان

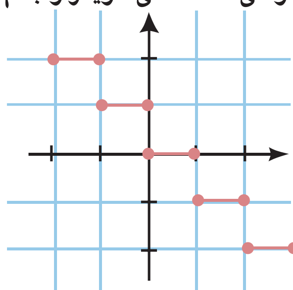
**10** ئۆتومبیلەکان گۆڕاوی $A$ ئەو ئۆتۆمبیلانە دەنوێنێت کە ڕێگایان پێدراوە لەشارەکەتدا ڕێبکەن و گۆڕاوی $N$ تابلۆی ژمارەیی ئەو ئۆتۆمبیلانە دەنوێنێت. ئایا پەیوەندیەك لەنێوان $A$ و $N$ دا هەیە؟ ئەگەر وەڵامەکەت «بەڵێ»یە ئایا ئەو پەیوەندیە نەخشەیە؟ کام لە دوو گۆڕاوەکە و گۆڕاوی ئازادە و کامیان گۆڕاوی پەیوەستە؟ هۆی وەڵامەکەت ڕوونبکەوە؟

بوار ومەودای نەخشەی نوێنراو بەم وێنە ڕوونکردنەوەییانە دیاریبکە.

**12**



**11**



**13** بەهای نەخشەی $f(x)=x^2+2x-1$ هەژمێربکە کاتێك $x=3$ و کاتێك $x=1.5$ .

جێبەجێکردنەکان

**14** داهات زێڕنگرێك 24 هەزار دینار لەهەر کاتژمێرێکی کاردا وەردەگرێت، سەرەڕای 20 هەزار دینار بۆ پشکنین ودۆزینەوەی تێکچوونەکان.

أ نەخشەیەك بنووسە داهاتی زێڕنگرەکە $R$ بەپێی ژمارەی کاتژمێرەکانی کار $x$ بنوێنێت.

ب داهاتی زێڕنگرەکە هەژمێربکە ئەگەر 5.5 کاتژمێر کاربکات.

## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ئایا ئەم خشتانەی دێن نەخشە دەنوێنن؟ ئەوە ڕوونبکەرەوە.

**15**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **x** | 0 | 2 | 2 | 4 |
| **y** | 3 | −5 | 1 | 7 |

**16**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **x** | 1 | 2 | 3 | 4 |
| **y** | 6 | 6 | 9 | 9 |

**17**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **x** | 4 | 4 | 6 | 6 |
| **y** | −2 | 2 | −3 | 3 |

**18**

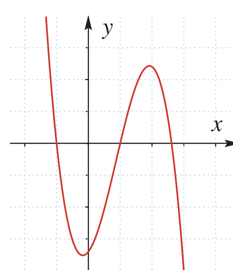
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **x** | −5 | −3 | −1 | 1 |
| **y** | 8 | 8 | −2 | −2 |

**19**

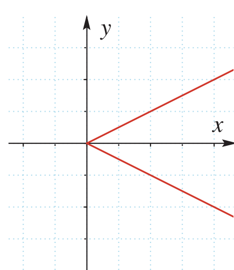
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **x** | −2 | −2 | 0 | 2 |
| **y** | −5 | −3 | 4 | 6 |

ئایا ئەو وێنە ڕوونکردنەوانەی خوارەوە نەخشە دەنوێنن؟ ئەوە ڕوونبکەرەوە.

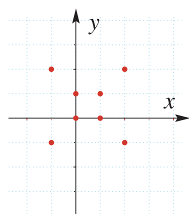
20



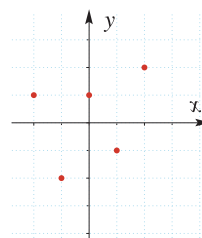
21



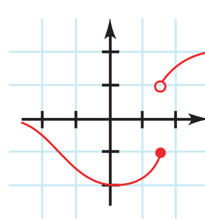
22



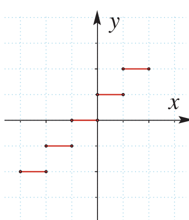
23



24



25



بەهای نەخشەکە بەلەجیاتیدانان هەژمێربکە.

26 $f(x)=2x-6$ کاتێک $x=1$ و کاتێک $x=3$.

27 $f(x)=5-3x$ کاتێک $x=1$ و کاتێک $x=3$.

28 $f(x)=\frac{2x-1}{5}$ کاتێک $x=-9$ و کاتێک $x=1$.

29 $f(x)=\frac{x-4}{5}$ کاتێک $x=-9$ و کاتێک $x=9$.

30 $f(x)=2x^2-3x$ کاتێک $x=3$ و کاتێک $x=-2.5$.

31 $f(x)=-x^2+4x-1$ کاتێک $x=2$ و کاتێک $x=1.5$.

32 $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ کاتێک $x=-1$ و کاتێک $x=\frac{3}{4}$.

33 $f(x)=-4x^2$ کاتێک $x=\frac{3}{2}$ و کاتێک $x=-2$.

هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بە بەکارهێنانی بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی بکێشە لە پاشان بوار و مەودای دیاریبکە.

34 $y=-\frac{x}{2}$ 35 $y=-\frac{2}{3}x-5$ 36 $y=-2x^2$ 37 $y=\left(\frac{x}{2}\right)^2$

38 $y=2$ 39 $y=-6$ 40 $y=x^2$ 41 $y=x^2+2$

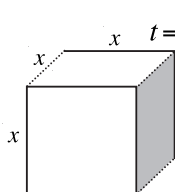
42 هێڵی ڕوونکردنەوەی بۆ نەخشەیەك بکێشە بوارەکەی $-3\le x\le 3$ و مەوداکەی $-5\le y\le 5$ بێت.

43 هێڵی ڕوونکردنەوەیی بۆ نەخشەیەك بکێشە بوارەکەی $-2\le x\le 5$ و مەوداکەی $0\le y\le 4$ بێت.

بەرەنگاری

بەهای نەخشەی $f(t)=t^2-3$ لەهەر بارێکدا هەژماربکە.

44 $t=\sqrt{2}$ 45 $t=\sqrt{2}-1$ 46 $t=c+\sqrt{2}$




ئەندازە هێمای گۆڕاوی V بۆ قەبارەی شەشپاڵوی بەرامبەر دابنێ.

47 نەخشەیەك بنووسە قەبارەی شەشپاڵۆی V بەپێی درێژی لایەکی $x$ بداتێ.

48 ڕووبەری ڕوویەك لە ڕووەکانی شەشپاڵوکە هەژماربکە کاتێك قەبارەکەی $27\text{m}^3$ بێت.

49 **بەکارچوون** بەهای بژمێرەکان زۆر بەخێرایی دادەبەزێت، دەزگایەك وای دانا کە بەهای بژمێر لە هەر ساڵێکدا بەتێکڕای 15% لەنرخی بنەڕەتی دادەبەزێ.

أ نەخشەیەك بنووسە کە بەهای بژمێرێکت بداتێ بەپێی تەمەنی بەساڵ، ئەگەر زانیت دەزگاکە نرخی 200 3 دیناری نرخەکەی دەدات.

ب نرخی بژمێرەکە پاش سێ ساڵ دەبێتە چەند؟

50 **بەکارچوون** فرۆشگایەکی جلوبەرگ داشکانێکی بەڕێژەی 30% بۆ هەموو جلوبەرگەکان ئاشکراکرد.




أ دانا 47.25 هەزار دیناریدا بۆ نرخی کراسێك لەوەرزی داشکاندا، نرخی کراسەکە لە بنەڕەتدا چەند بووە؟

ب زانا پانتۆڵێکی کڕی نرخەکەی 25 هەزار دیناربوو پێش وەرزی داشکان، نرخە نوێیەکەی چەندە؟

## ڕوانین بۆ دواوە

هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك بە شێوەی $y=mx+b$ بنووسە ،بەزانینی لاریەکەی $m$ و خاڵێکی وەك $A$ پێیایدا دەڕوات.

51 $m=5$ ، $A(2, 3)$

52 $m=-3$ ، $A(4, 1)$

53 $m=\frac{1}{5}$ ، $A(4, -1)$

54 $m=-\frac{2}{3}$ ، $A(-8, -3)$

هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك بنووسە لەسەر شێوەی $y=mx+b$ ، بەزانینی دوو خاڵ کە پیایدا دەڕوات.

55 $(1, 4); (-3, 0)$

56 $(0, 2); (-1, 1)$

57 $(2, 3); (0, 0)$

58 $(-2, -5); (5, -1)$

59 بڕەی $3[2-(5-3)-7]\div 2$ بە بەکارهێنانی ڕیزبەندی کردارەکان هەژمار بکە.

## ڕوانین بۆ پێشەوە

60 وێنەی ڕوونکردنەوەیی بۆ پەیوەندی $y=x^2-3x-10$ پێکبهێنە لە نێوان $x$ و $y$ ، ڕوونیبکەرەوە بۆچی ئەم پەیوەندیە نەخشە دەنوێنێت، بوار و مەودای ئەم نەخشەیە دیاربکە.

Linear Functions

# نەخشەی هێڵی

وانەی

2

### ئامانجەکان

- نەخشەی هێڵی دەناسێت.
- نەخشەی هێڵی بۆ بنیاتنانی سامپڵەکانی بیرکاری بەکاردەهێنت.
- بواری نەخشەی هێڵی و مەوداکەی و خاڵەکانی یەکتربڕینی لەگەڵ دوو تەوەری پۆتانەکاندا دیاریدەکات.

جێبەجێکردنەکان

فیزیا



بۆچی

نەخشەی هێڵی سادەترین نەخشەی جەبرییە و هەروەها لە بنیاتنانی نموونەکانی بیرکاری لەبارەکانی ژیانی ڕۆژانەدا زۆر بەکاردێن.

چالاکی

## دۆزینەوەی نەخشەی هێڵی Exploring linear function

دەزانیت کە پلەی کوڵانی ئاو 100 پلەی سەدییە. بەڵام ڕەنگە نەزانیت کە 100 پلەی سەدی پلەی کوڵانی ئاوە لە شوێنێك لەئاستی ڕووی دەریابێت (بەرزییەکەی لە ڕووی دەریا سفر بێت) پلەی کوڵانی ئاو دەگۆڕێت بەگۆڕانی بەرزی شوێنەکە لە ڕووی دەریاوە. ئەو پلەیە لەسەر چیاکانی هێمالایا کەمترە لە 100 پلەی سەدی بەڵام زیاترە لە 100 پلەی سەدی لەدەریای مردوو. ئەم خشتەیەی دێت هەندێك شوێنی جیهان و بەرزییەکانی دیارکردوە، لەئاستی ڕووی دەریا وپلەی کوڵانی ئاو تێیاندا.

| ناو | بەرزی لەڕووی دەریاوە | پلەی کوڵانی ئاو |
|---|---|---|
| بەسرە (عیراق) | 0 | 100 |
| فریبورغ (سویسرا) | 586 | 99.68 |
| سوفەر (لبنان) | 1 250 | 99.315 |
| کۆلۆرادۆ (ئەمریکا) | 1 832 | 98.995 |
| قورنە سەودا (لبنان) | 3 220 | 98.23 |
| دەریای مردوو | −420 | 100.23 |

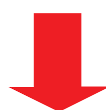
1. پێدراوەکانی خشتەکە لە ڕووتەختی پۆتاندا بنوێنە کە تەوەری یەکەم $x$ بۆ بەرزی لەڕووی دەریا بە مەترە، و تەوەری دووەم $y$ بۆ پلەکانی گەرمی بە پێوەری سەدی دابنێ.
2. نێوان خاڵەکان بە پارچە ڕاستەهێڵ بگەیەنە، چی تێبینی دەکەیت؟
3. ئایا پەیوەندی نێوان بەرزی لەڕووی دەریا و پلەی کوڵانی ئاو نەخشەیە؟ ئەوە ڕوونبکەوە.
4. وێنە ڕوونکردنەوەییە دەستکەوتووەکەت بەکاربهێنە بۆ خەملاندنی پلەی کوڵانی ئاو لەبەرزی 3000 مەتر لەڕووی دەریاوە.
5. وێنە ڕوونکردنەوەییە دەستکەوتووەکەت بەکاربهێنە، بۆ خەملاندنی بەرزی شوێنێك لەڕووی دەریا، ئەگەر بزانیت پلەی کوڵانی ئاو تیایدا 97 پلە بێت.
6. لەکوێدا وێنە ڕوونکردنەوەکە تەوەری $y$ دەبڕێت؟ ئەم خاڵە چی دەنوێنێت؟

## نەخشەی هێڵی Linear Function

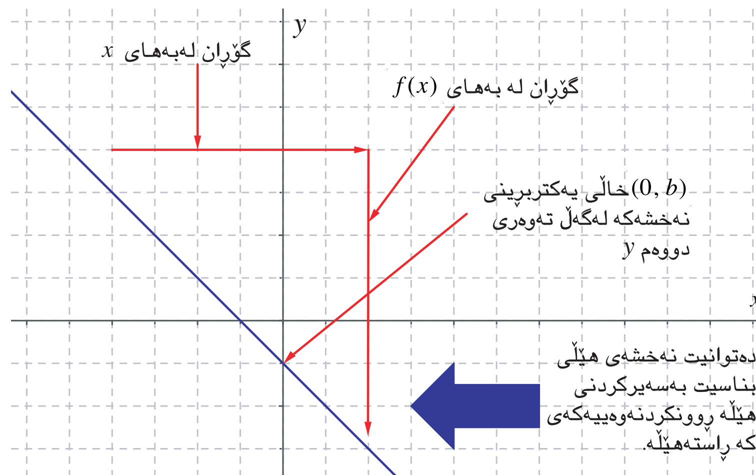
**نەخشەی هێڵی** نەخشەیەکە، ڕوونکردنەوەییەکەی هێڵێکی ڕاستە، ڕێسای نەخشەی هێڵی بەم شێوەیە دەنووسرێت $f(x)=mx+b$ .

دەتوانیت نەخشە هێڵییەکان بۆ بنیاتنانی نموونەی بیرکاری بەکاربێنیت بۆ هەندێ لە پەیوەندییەکانی نێوان دوو گۆڕاو وەك پەیوەندییەکەی پێشوو (بەرزی لەڕووی دەریا و پلەی کوڵانی ئاو).

دەتوانیت دووبارە بڕوانیتە ڕێژەی گۆڕانی بەهای نەخشەکە بۆ گۆڕانی بەهای گۆڕاوی ئازاد کە بڕێکی نەگۆڕە و دەکاتە لاری ڕاستەهێڵەکە.



$$m=\frac{\text{گۆڕان لەبەهای } f(x)}{\text{گۆڕان لەبەهای } x}$$

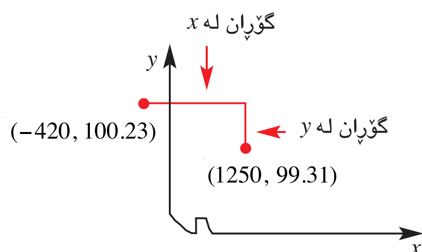



ڕێژەی گۆڕانی بەهای نەخشەی هێڵی $f(x)$ بۆ گۆڕانی بەهای $x$ نەگۆڕ دەمێنێتەوە وئەو ڕێژەیە پێی دەوترێت لاری **Slope** نەخشەی هێڵی.

### نموونە 1

أ پێدراوەکانی خشتەی لاپەڕەی پێشوو بەکاربهێنە بۆ ڕوونکردنەوەی چۆنیەتی گۆڕانی پلەی کوڵانی ئاو کاتێك بەرزی لەڕووی دەریا دەگۆڕێت.

ب ڕێسای نەخشەی پلەی کوڵانی ئاو بەپێی بەرزی لەڕووی دەریاوە بنووسە.




**شیکار**

أ $x$ بەکاربێنە بۆ بەرزی بە مەتر لەڕووی دەریا و $y$ بۆ پلەی کوڵانی ئاو بەپێوەری سەدی. دوو بەها بۆ گۆڕاوی سەربەخۆی $x$ بەکاربهێنە و دوو بەها بۆ نەخشەی بەرامبەریان وەك بەرزی سوفەر لە لوبنان و دەریای مردوو لە ئوردن. ڕێژەی گۆڕانی پلەی کوڵانی ئاو بۆ گۆڕانی بەرزی لەڕووی دەریا هەژمێربکە بۆ ئەوەی لاریت دەستکەوێ.

ڕێژەی گۆڕان $m=\frac{\text{گۆڕان لە نەخشە}}{\text{گۆڕان لە } x}=\frac{99.31-100.23}{1250-(-420)}=-0.00055$

ئەمەش واتە زیادبوونی مەترێك لەبەرزی لەڕووی دەریا دەبێتە هۆی گۆڕان لەپلەی کوڵانی ئاو بەبڕی $-0.00055$ پلە.

ب پلەی کوڵانی ئاو = پلەی کوڵانی ئاو لە ئاستی ڕووی دەریا + ڕێژەی گۆڕان × بەرزی.

$$f(x) \quad = \quad 100 \quad +(-0.00055)x$$

کەواتە ڕێسای نەخشەکە، $f(x)=100-0.00055x$

**بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە**

ئایا پلەی کوڵانی ئاو زیاددەکات ئەگەر بەرزی لەڕووی دەریاوە زیادبکات یان کەمدەکات؟
ڕوونبیکەرەوە چۆن خشتەکەی سەرەتای وانەکە بەکاردەهێنیت بۆ وەڵامدانەوەی ئەم پرسیارە.
ڕوونبیکەوە چۆن هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)=100-0.00055x$ بەکاردەهێنیت.

**بەرەنگاری**

شارا ڕێسای نەخشەی هێڵی هەروەک لەبەرامبەردا هاتووە دۆزیەوە.
ڕێگاکانی شارا باسبکە.
دوو شوێنی تر لەخشتەکە بۆ دۆزینەوەی ڕێسای نەخشەکە بەکاربهێنە.
ئایا هەمان ڕێسا دەستدەکەوێت.

$m =- 0.00055$
$f(x) = mx + b$
$f(x) = -0.00055x + b$
$100 = - 0.00055 \times 0 + b$
$\Longrightarrow b = 100$
کەواتە ڕێسای نەخشەکە بریتییە لە:
$f(h) = - 0.00055h + 100$

**نموونە** 2

هەژمێری $f(9)$ بکە کاتێک $f(x)=\frac{1}{3}x+17$ بەهای $x$ چەندە ئەگەر $f(x)=-1$ ؟

**شیکار**

لەجیاتی $x$ بەهای 9 دابنێ.

$$f(9)=\frac{1}{3}\times 9+17$$
$$=3+17$$
$$=20$$

لەجیاتی $f(x)$ بەهای $-1$ دابنێ و شیکاریبکە.

$$f(x)=\frac{1}{3}x+17$$
$$-1=\frac{1}{3}x+17$$
$$-18=\frac{1}{3}x$$
$$-54=x$$

**بەرەنگاری**

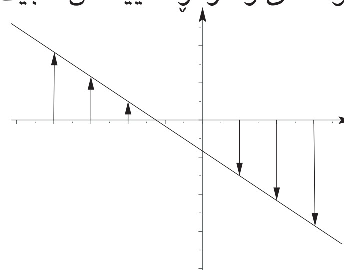
ڕوونبیکەرەوە چۆن نەخشەی نموونە 1 بەکاردەهێنی بۆ دیاریکردنی پلەی کوڵانی ئاو لە شوێنێك 8000 مەتر لەڕووی دەریاوە بەرزبێت، ئەو پلەیە دیاریبکە.

**بەرەنگاری**

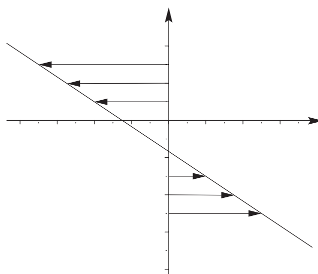
ڕوونبیکەرەوە چۆن نەخشەی نموونە 1 بەکاردەهێنیت بۆ دیاریکردنی بەرزی شوێنێك لەڕووی دەریا پلەی کوڵانی ئاو تێیدا 85 پلەی سەدی بێت، ئەو بەرزیە دیاریبکە.

## خوێندنی نەخشەی هێڵی Studying linear function

ڕێسای نەخشەی هێڵی $f(x)=mx+b$ ڕێگادەدات بە هەژمێرکردنی بەهای نەخشەکە کاتێك بەهای گۆڕاوی $f(x)$ هەرچەند بێت. لەوەوە دەردەچێت کە نەخشەکە پێناسە دەکرێت لەهەر ژمارەیەکی ڕاستیدا، بەم پێیە بوارەکەی دەبێتە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان. بەشێوەیەکی تر لەوانەیە بۆ هەر ژمارەیەکی ڕاستی بەهایەکی نەخشەی هێڵی هەبێت، چونکە دەتوانی هەژمێری بەهای گۆڕاوی $x$ بکەیت، ئەگەر بەهای نەخشەکە بزانی، لەوەوە دەردەچێت کە مەودای نەخشەی هێڵی کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان دەبێت.



هێڵە ڕوونکردنەوەیی نەخشە هێڵییەکە دیاری دەکات کە بوارەکەی هەموو تەوەرەی $x$ دەگرێتەوە.



هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشە هێلیکە دیاریدەکات کە مەوداکەی هەموو تەوەرەی $y$ دەگرێتەوە.

کاتێك نەخشەکە بارێکی ژیانی ڕۆژانە دەنوێنێت، بوار و مەودای نەخشەکە سنووردار دەبێت.

## نموونە 3

لوتکەی ئیڤرست کە دەکەوێتە چیاکانی هێمالایا بەرزییەکەی 8848m مەترە لەڕووی دەریا بە بەرزترین شوێن لەڕووی زەوی دادەنرێت و هەروەها دەریای مردوو کە 420m مەتر لە ڕووی دەریا نزمە، بە نزمترین شوێنی ڕووی زەوی دادەنرێت، ئەو دوو زانیارییەی پێشوو بەکاربهێنە بۆ ئەوەی بەوردی بوار و مەودای نموونەی 1 دیاریبکەیت.

**شیکار**

نەخشەی نموونەی 1 نموونەیەکی بیرکاری پێکدێنێت، لە ڕاستیدا لەووە دەردەچێت کە گۆڕانی سەربەخۆ سنوردراوە بەچەند بەهایەکی دیاریکراو، بەپێی دوو زانیارییەکەی پێشوو ئەو بەهایانە وەردەگرێت کە دەکەوێتە نێوان 420– ، 8848 لەبەرئەوە بواری نەخشەی نموونەی 1 کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانی ئەو لاسەنگە $-420 \le h \le 8848$ پاسادان دەکات. بۆ دیاریکردنی مەودا لەم بارەدا دەبینین کە بەهایەکەی کەمدەکات هەر چەند بەرزی $h$ زیادبکات، ئەمەش ئەوە دەگەێنێت کە بەرزترین بەهای بەرامبەر نزمترین بەهای گۆڕاوە ئازادەکەیە $f(-420) = 100.23$ و نزمترین بەهای بەرامبەر بەرزترین بەهای گۆڕاوی $x$ دەبێت واتە $f(8848) = 95.13$ وهەروەها مەودای نەخشەی نموونە 1 کۆمەڵەی ئەو ژمارە ڕاستییانەیە کە$95.13 \le y \le 100.23$ پاسادادەکات.

# ڕاهێنان

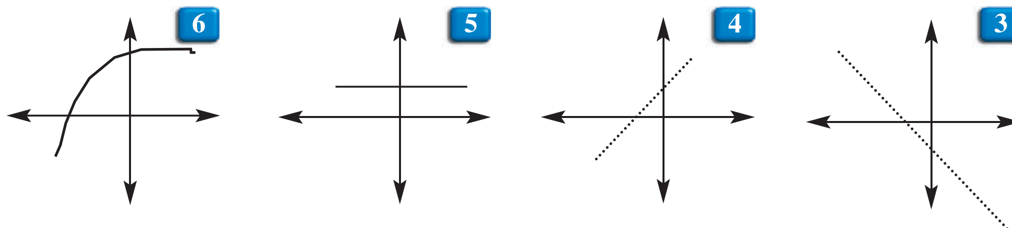
## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

**1** چۆن پاسادانی ئەوە دەکەیت کە خاڵێك پۆتانەکەی زانراو بێت دەکەوێتە سەر ڕاستەهێڵێك هاوکێشەکەی زانراوبێت.

**2** ڕوونیبکەوە چۆن ڕێسای نەخشەی هێڵی دەدۆزیتەوە بەزانینی هێڵی ڕوونکردنەوەیی.

**ئایا ئەم وێنە ڕوونکردنەوەییانە نەخشەی هێڵی دەنوێنن؟ ئەوە ڕوونبکەوە.**

**3** **4** **5** **6**



## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

**ئایا ئەم نەخشانە هێڵین؟ ئەوە ڕوونبکەوە.**

**7** $f(x) = 2 - x^2$ **8** $f(x) = -3x - 6$ **9** $g(x) = 4 + 10x$

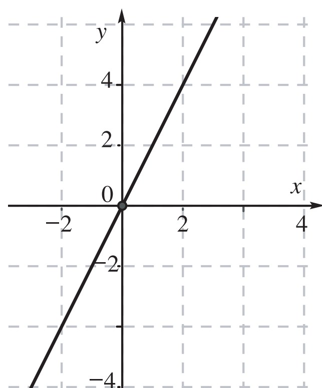
**10** $f(x) = x^3 - x$ **11** $f(x) = \frac{3}{2}x + 4$ **12** $g(x) = \frac{1}{x}$

**جێبەجێکردنەکان**
**بیرکاری بەکارچوون**

**13** خشتەی خوارەوە تێچوی پەیوەندی کردنەکانی مۆبایل دیاریدەکات لەگەڵ تێچوونە نەگۆڕەکەی کە بەهاکەی 2 سەنتە لەهەر خولەکێك.

| ژمارەی خولەك | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| تێچوو بە سەنت | 2.50 | 3.00 | 3.50 | 4.00 | 4.50 | 5.00 |

خشتەکە بەکاربێنە بۆ نووسینی نەخشەیەك، بوار و مەودای ئەو نەخشەیە دیاربکە.




**14** وێنەی بەرامبەر هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەیەکی هێڵی دیاردەکات، خشتەی بەهاکانی پێکبهێنە و ڕێساکەی بنووسە.

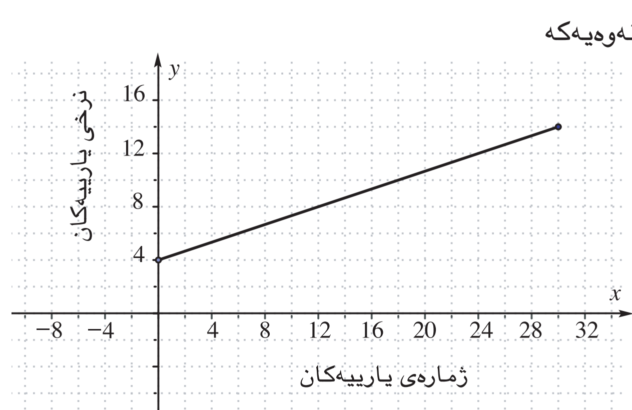
**جووتە ڕێکخراوەکە تەواوبکە بەمەرجێك خاڵەکە بکەوێتە سەر ڕاستەهێڵی $y = -4x + 21$ .**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **15** | (5, ?) | **16** | (?, 9) |
| **17** | (0, ?) | **18** | (?, 0) |

## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

جووتە ڕێکخراوەکە تەواوبکە بەمەرجێك خاڵەکە بکەوێتە سەر ڕاستەهێڵی $y = 2x - 14$ .

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **19** | (8, ?) | **20** | (10, ?) | **21** | (0, ?) | **22** | (?, 0) |
| **23** | (5, ?) | **24** | (−5, ?) | **25** | (3, ?) | **26** | (?, 3) |
| **27** | (?, 6) | **28** | (?, −4) | **29** | (?, −7) | **30** | (?, 10) |




**31** **ئەندازەی پۆتان** وێنەی ڕوونکردنەوەیەکە پەیوەندی نێوان ژمارەی یارییە ئەلکترۆنییەکان (نێوان 0 و 30) ونرخەکەی دیاریدەکات، خشتەی بەهاکانی ئەم نەخشەیە پێکبهێنە و ڕێساکەی بنووسە.

**32** **ئوتومبێلەکان** کاتێك تانکی سووتەمەنی ئوتومبێلەکەت پڕ دەکەیت، بڕی سووتەمەنی لە تانکیەکە نەخشەیەکە، گۆڕاوە سەربەخۆیەکەی ژمارەی خولەکەکانە وای دابنێ کە ئەو سووتەمەنییەی دەڕژێتە ناو تانکیەکە بە تێکڕای 18 لیترە لەهەر خولەکێکدا و فراوانی تەنکیەکە دەگاتە 35 لیتر.

أ ڕێسای نەخشەیەك بنووسە بڕی ئەو سووتەمەنییەی کە دەڕژێتە ناو تانکیەکە بەپێی کات بنوێنێت.

ب بوار و مەودای ئەم نەخشەیە دیاریبکە.

**33** **بۆخۆشی** یانەی گەنجان CD دەفرۆشێت وەك لەو خشتەیەی دێت دیارکراوە، لەگەڵ پارەی بەشداربوونی لەیانەکە کە بریتییە لە 25 هەزار دینار.

| ژمارەی CD | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| تێچوون | 25 | 45 | 65 | 85 | 105 | 125 | 145 | 165 |

نەخشەیەك بنووسە ئەمە بنوێنێت؟

**34** **بۆخۆشی** یانەی ژیان CD دەفرۆشێت وەك لەم خشتەی خوارەوە دیاریکراوە لەگەڵ پارەی بەشداربوون لە یانەکەدا کە دەگاتە 35 هەزار دینار.

| ژمارەی CD | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| تێچون | 35 | 51 | 67 | 83 | 99 | 115 | 131 | 147 |

نەخشەیەك بنووسە ئەمە بنوێنێت.

بەرەنگاری

**35** **تەکنەلۆژیا** بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ کێشانی هێڵی ڕوونکردنەوەی دوو نەخشەکەی دوو ڕاهێنانی پێشو لەهەمان ڕووتەختی پۆتاندا. بەراوردی نێوان دوو ختنەڕووەکە بکە. کام یانەیان ختنەڕووی باشتر پێش کەش دەکات؟ ئەوە ڕوون بکەرەوە.

## ڕوانینێك بۆ دواوە

**خشتەی بەهاکانی هەر نەخشەیەك پێکبهێنە بەلەجیاتیدانانی بەهاکانی**
**1, 2, 3, 4, 5, 10 لەجیاتی $x$ و هێڵە ڕوونکردنەوەییەکەی بکێشە.**

**36** $y=2x+1$

**37** $y=5x-1$

**بەهزری بەهای ژمارەیی هەر برێك لەمانە هەژمێربکە.**

**38** $300-196$

**39** $10\times 30$

**40** $\frac{480}{16}$

**41** $1\,000\times 1\,000$

## ڕوانینێك بۆ پێشەوە

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 |

**42** لەخشتەی سەرەوە بکۆڵەوە ئایا نەخشەی هێڵی دەنوێنێت؟

**43** ڕێسای پەیوەندی نێوان $x$ و $y$ بنووسە، پێدراوەکانی خشتەکە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە و لە وەڵامەکەی پێشووت ساغبکەوە.

وانەی

3

# شێوە جیاوازەکانی هاوکێشەی ڕاستەهێڵ

## Various forms of the equation of a line



**ئامانجەکان**

- شێوە جۆراوجۆرەکانی هاوکێشەی ڕاستەهێڵ دەناسێ.
- هاوکێشەی ڕاستەهێڵ بەشێوە جیاوازەکانی دەنووسێت.

**بۆچی**

هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك ڕۆڵێکی گرنگ لەبیرکاری دەگێڕێ، وە سادەترین نەخشەی جەبری دەنوێنێ و هەروەها بۆ بنیاتنانی نموونەی زۆربەی کێشەکانی ژیان بەکاردێت.

**چالاکی 1**

**هاوکێشەی ڕاستەهێڵ بە شێوەی لاری-یەکتربڕین** **Slope-Intercept Form**

نەوزاد سەردانی کۆمپانیایەکی بەکرێدانی ئوتومبیلی کرد. فەرمانبەری کۆمپانیاکە پێی ڕاگەیاند دەبێ 100هەزار دینار بدات کاتێك ئوتومبێل وەردەگرێت و 1.5 هەزار دینار بدات بۆ هەر کیلۆمەترێك دەیبڕێت.

1.ئەم خشتەیەی دێت تەواوبکە.

| ژمارەی کیلۆمەترەکان | 10 | 20 | 30 | |
|---|---|---|---|---|
| ئەوەی پێویستە بیدات | $1.5 \times 10 + 100$ | | | |

2.هاوکێشەی گوژمەی $y$ کە پێویستە بیدات بەپێی ژمارەی کیلۆمەترەکانی $x$ بنووسە.

3.ئەم هاوکێشەیە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە.

**جێبەجێکردنەکان**

بازرگانی

## هاوکێشەی ڕاستەهێڵ بە شێوەی لاری – یەکتربڕین Slope - Intercept Form

هاوکێشەی ڕاستەهێڵ بە شێوەی لاری – یەکتربڕین بریتییە لە $y = mx + b$ کاتێك $m$ و $b$ دوو ژمارەی ڕاستیین، ژمارەی $m$ لاری ڕاستەهێڵەکەیە و $b$ تانی خاڵی یەکتربڕینی ڕاستەهێڵەکەیە لەگەڵ تەوەرەی $y$.

**نموونە 1**

لاری ڕاستەهێڵ و خاڵی یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری $y$ دیاربکە.

أ $y = 3x - 4$   ب $y = -5x + 3$   ج $y = 5$

**شیکار**

أ لاری 3 و خاڵی یەکتربڕین $(0, -4)$

ب لاری $-5$ و خاڵی یەکتربڕین $(0, 3)$   ج لاری 0 و خاڵی یەکتربڕینی $(0, 5)$

**هەوڵبدە** ئەو ڕاستەهێڵە بکێشە کە ئەو هاوکێشەیە $y = 2x - 8$ دەنوێنێ.

### چالاکی 2

## هاوکێشەی ڕاستەهێڵ بە شێوەی لاری–خاڵێك Slope - Point Form

ئەگەر لاری ڕاستەهێڵ $m$ و خاڵێك $(h, k)$ کە پێیدا دەڕوات بزانیت، ئەوا دەتوانیت هاوکێشەکەی بنووسی.

1. هاوکێشەی ڕاستەهێڵ لەسەر شێوەی لاری و یەکتربڕین ئەوەیە $y=mx+b$ پەیوەندی نێوان لاری $m$ وهاوکۆلکەی $x$ لەم پەیوەندییەدا چییە؟ چۆن هاوکێشەی ڕاستەهێڵ دەنووسیت بۆ دەربڕین لەم پەیوەندییە؟
2. هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك بەخاڵی $(h, k)$دا دەڕوات بنووسە بەلەجیاتیدانانی بەهای $h$ لەجیاتی $x$ و بەهای $k$ لەجیاتی $y$.
3. هاوکێشەکە شیکاربکە و دەرئەنجامی بەهای $b$ بەپێی $m$ ، $k$ ، $h$ دەربخە.
4. لەجیاتی $b$ بەهاکەی دابنێ، هاوکێشەی ڕاستەهێڵەکە بە شێوەی لاری – خاڵەکە بنووسە.

## هاوکێشەی ڕاستەهێڵ بە شێوەی لاری ـ خاڵێك Slope - Point Form

هاوکێشەی ڕاستەهێڵ بە شێوەی لاری – خاڵێك بریتییە لە $y - y_1 = m(x - x_1)$ کاتێك

- $m$ لاری ڕاستەهێڵەکەیە.
- $(x_1, y_1)$ پۆوتانی خاڵەکەیە کە ڕاستەهێڵەکە پێیدا دەڕوات.

**نموونە 2**

هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك بنووسە لاریەکەی 2– و بەخاڵی $(1, -1)$ دا دەڕوات پاشان وێنەکەی بکێشە.

**شیکار**



$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - (-1) &= -2(x - 1) \\ y + 1 &= -2x + 2 \\ y &= -2x + 1 \end{aligned}$$

**هەوڵبدە** هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك بنووسە کە لاریەکەی (3)یە و بە خاڵی $(-2, -1)$ دا دەڕوات پاشان وێنەکەی بکێشە.

## چالاکی 3

**Two Points Form** — **هاوکێشەی ڕاستەهێڵ بەدوو خاڵدا بڕوات**

هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بنووسە کە بە دوو خاڵی $(5, 3)$ و $(7, 4)$ دا دەڕوات.

1. لاری ڕاستەهێڵەکە هەژمێربکە.
2. هاوکێشەکەی بنووسە بە شێوەی لاری – خاڵ. پاشان بە شێوەی لاری – یەکتربڕین.

**Two Points Form** — **هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی بە دوو خاڵدا دەڕوات**

هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك بە دوو خاڵی $(x_1, y_1)$ و $(x_2, y_2)$ دا دەڕوات. دەبێتە

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

هەوڵبدە هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە کە بە دوو خاڵی $(5, 65)$ و $(7, 71)$ دا دەڕوات بنووسە بە شێوەی لاری – یەکتربڕین.

**Standard Form** — **شێوەی گشتی هاوکێشەی ڕاستەهێڵ**

## چالاکی 4

**Standard Form** — **هاوکێشەی ڕاستەهێڵ لەسەر شێوەی گشتی**

جێبەجێکردنەکان
بۆ خۆشی

کارگێڕی باخچەی ئاژەڵان پلیتی چوونە ژوورەوە بە 10 هەزار دینار دیاریکردووە بۆ گەورەکان و بە 5 هەزار دینار بۆ منداڵان، دەستکەوتی ڕۆژی چوارشەممە گەیشتە 1 350 دینار.

| خشتەیەکی بەها | |
|---|---|
| y | $x$ |
| | 50 |
| 120 | |
| 70 | |
| | 120 |

1. $x$ بەکاربهێنە بۆ نیشاندانی ژمارەی گەورەکان و $y$ بۆ نیشاندانی ژمارەی بچووکەکان. دەستکەوتی ڕۆژی چوارشەممە 1 350 دینار بوو. ئەمە بە هاوکێشەیەك دەرببڕە؟
2. خشتەکە تەواوبکە بۆ پێکهێنانی خشتەی جووتە ڕێکخراوەکان کە هاوکێشەکە ساغدەکەنەوە.
3. بە ڕوونکردنەوەیی هاوکێشە دەستکەوتوکەت بنوێنە بە بەکارهێنانی جووتەڕێکخراوەکان. وێنە ڕوونکردنەوەییە کێشراوەکە چۆنە؟
4. دڵنیابە لە وەڵامەکەت لە تایبەتمەندی وێنە ڕوونکردنەوەکە لە ڕێگای شیکارکردنی هاوکێشەکە.

✓ خاڵی چاودێری

**Standard Form** — **هاوکێشەی ڕاستەهێڵ لەسەر شێوەی گشتی**

هاوکێشەی ڕاستەهێڵ لەسەر شێوەی گشتی ئەمەیە $ax + by + c = 0$ کاتێك

- $a$ و $b$ و $c$ ژمارەی ڕاستین.
- یەك لە دوو ژمارەی $a$ و $b$ بەلایەنی کەمەوە یەکسان نییە بە 0.

**نموونە 3**

هاوکێشەی ڕاستەهێڵ بەشێوەی گشتی بنووسە.

أ) $y = -2x + 3$ ب) $x = -13y + 4$ ج) $\frac{3}{4}x - 2 = 3y$

**شیکار**

أ) $y = -2x + 3$

$2x + y = 3$

ب) $x = -13y + 4$

$x + 13y = 4$

ج) $\frac{3}{4}x - 2 = 3y$

$\frac{3}{4}x - 2 - 3y = 0$

$\frac{3}{4}x - 3y = 2$

ئەم شێوەیە شێوەی گشتییە چونکە دەنووسرێ $\frac{3}{4}x + (-3)y = 2$

## نمـــوونـــــه 4

هەر هاوكێشەیەك بە شێوەی لاری–یەكتربڕین بنووسە.

أ $2y-2x=6$

ب $6x+4y=4$

ج $\frac{3}{4}y-6x=3$

**شیكار**

أ
$$2y-2x=6$$
$$2y=2x+6$$
$$y=x+3$$

ب
$$6x+4y=4$$
$$4y=-6x+4$$
$$y=-\frac{3}{2}x+1$$

ج
$$\frac{3}{4}y-6x=3$$
$$\frac{3}{4}y=6x+3$$
$$y=8x+4$$

**هەوڵبدە** هاوكێشەی $y-23=5(x-4)$ بەشێوەی لاری–یەكتربڕین بنووسە پاشان بە شێوەی گشتی بنووسە.

### هاوكێشەی دوو ڕاستەهێڵی ئاسۆیی و ستوونی — Horizontal and Vertical Lines

هاوكێشەی ڕاستەهێڵی ئاسۆیی بریتییە لە $y=b$ كاتێك $b$ یەكتربڕینی ڕاستەهێڵەكە لەگەڵ تەوەری $y$ دەنوێنێت، لاری ڕاستەهێڵە ئاسۆییەكە هەردەم دەكاتە 0 .

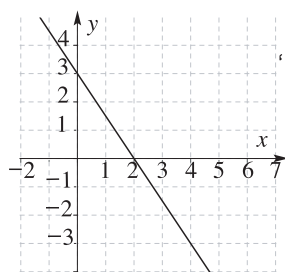
هاوكێشەی ڕاستەهێڵی ستوونی بریتییە لە $x=b$ كاتێك $b$ یەكتربڕینی ڕاستەهێڵەكە لەگەڵ تەوەری $x$ دەنوێنێت، لاری ڕاستەهێڵی ستوونی پێناسەنەكراوە.

### شێوە جیاوازەكانی هاوكێشەی ڕاستەهێڵ — Various Form of the Equation of a Line

| ناوی شێوەكە | شێوەی هاوكێشەكە | نموونە |
|---|---|---|
| لاری – یەكتربڕین | $y=mx+b$ | $y=3x+5$ |
| گشتی | $ax+by=c$ | $3x-2y=5$ |
| لاری – خاڵ | $y-y_1=m(x-x_1)$ | $y-2=-3(x-1)$ |
| بە دوو خاڵدا بڕوات | $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ | $y-65=\frac{71-65}{7-5}(x-5)$ |

## ڕاهێـــــنـــــان

### بەردەوامبوون لە بیركاریدا




1 هاوكێشەی ڕاستەهێڵێك بنووسە لارییەكەی $m$ وبەخاڵی بنەڕەتدا بڕوات،

2 چۆن ڕاستەهێڵی $y=mx+b$ دەگۆڕێت كاتێك بەهای $b$ بگۆڕێت؟

3 چۆن ڕاستەهێڵی $y=mx$ دەگۆڕێت كاتێك بەهای $m$ بگۆڕێت؟

4 چۆن شێوەی لاری – خاڵ بەكاردەهێنرێت بۆ نووسینی هاوكێشەی ڕاستەهێڵ بە دوو خاڵی $(1, 1)$ ، $(-2, 4)$ دا بڕوات؟

5 ڕوونیبكەوە چۆن هاوكێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی وێنەی بەرامبەر دەنووسیت.

6 چۆن هاوكێشەی $3x+3y+2=0$ دەنووسیت بەشێوەی لاری ـ یەكتربڕین؟

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

هاوکێشەی هەر ڕاستەهێڵێك بەشێوەی گشتی بنووسە.

**7** $y = 3x + 7$ **8** $2y = 3x - 4$ **9** $3x = -7y - 17$

هاوکێشەی هەر ڕاستەهێڵێك بە شێوەی لاری ـ یەکتربڕین بنووسە، ئەگەر لاری وئەو خاڵەی پێیدادەڕوات زانراوبێت.

**10** لاری $2$ خاڵ $(3,4)$

**11** لاری $-2$ خاڵ $(-3, 4)$

**12** لاری $\frac{1}{3}$ خاڵ $(3, -4)$

هاوکێشەی هەر ڕاستەهێڵێك بە شێوەی لاری ـ یەکتربڕین و بەشێوەی گشتی بنووسە.

**13** $y - 50 = 8(x - 4)$ **14** $3y = 9x + 15$ **15** $y = 10(-4x + 3)$

هاوکێشەی هەر ڕاستەهێڵێك بە شێوەی لاری ـ یەکتربڕین بنووسە ئەگەر دوو خاڵ زانرا کە پێیاندا دەڕوات.

**16** $(-2, 5)$ ،$(5, -2)$ **17** $(-4, 4)$ ،$(-3, 3)$ **18** $(-3, -2)$ ،$(3, 2)$

## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

پۆتانی خاڵەکانی یەکتربڕینی ڕاستەهێڵەکە لەگەڵ دوو تەوەری پۆتان دیاریبکە.

**19** $y = 4x + 5$ **20** $y = 8x - 1$ **21** $y = -3x + 5$

**22** $y = -2x + 13$ **23** $y = 17x - 4$ **24** $y = -5x - 9$

**25** $y + x = 10$ **26** $3x - 2y = 12$ **27** $5x + 4y = 12$

**28** $4x - 5y = 20$ **29** $2x - 7y = 14$ **30** $9x + y = 18$

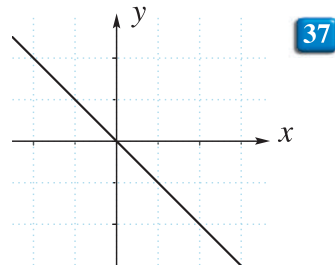
لاری ڕاستەهێڵەکە و یەکتربڕینی لەگەڵ تەوەرەی ستوونی دیاربکە، بەبێ کێشانی وێنەکەی.

**31** $y = -5x$ **32** $y = -5x + 3$ **33** $y = 7$

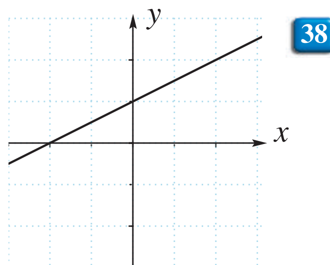
**34** $x = 7$ **35** $y = 7 - x$ **36** $y = \frac{1}{3}x - 5$

هاوکێشەی ڕاستەهێڵ لەشێوەی لاری یەکتربڕینی بنووسە.

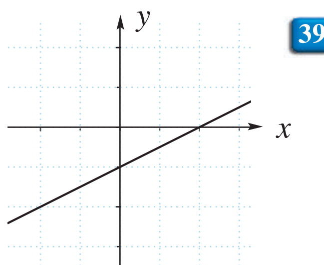
**37**




**38**




**39**




**40** لاری ڕاستەهێڵێك چەندە کە هاوکێشەکە $6x + 2y = 40$ ؟

ناتوانرێ هاوکێشەی ڕاستەهێڵ $x = 4$ بنووسرێت لەشێوەی لاری ـ یەکتربڕین چونکە لارییەکەی پێناسە نەکراوە، بەڵام دەتوانرێت بەشێوەی $0 \times y = 4 - 1 \times x$ بنووسرێت، ئەم خشتەیە تەواوبکە.

| | هاوکێشەی پێدراو | شێوەی لاری ـ یەکتربڕین | شێوەی گشتی |
|---|---|---|---|
| **41** | $x = 1$ | | |
| **42** | $y = 4$ | | |
| **43** | $x + y = 5$ | | |
| **44** | $y = 4x$ | | |
| **45** | $x = 4y$ | | |

بەرەنگاری

46 وێنەی دوو ڕاستەهێڵی $4x+2y=12$ و $2x+y=10$ بکێشە. چی تێبینی دەکەیت؟

جێبەجێکردن

47 **ژینگە** وا دابنێ کە بەرزی ئاو لە ڕووبارێك لە ڕووبارەکاندا 34 cm ە، و ئەو بەرزییە زیاددەکات بەتێکڕای 5cm ڕۆژانە. هاوکێشەیەك بنووسە بەرزی ئاوەکە وژمارەی ڕۆژەکان بنوێنێت ئەم هاوکێشەیە بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە، پاش چەندڕۆژ بەرزی ئاوەکە دەبێتە 260cm؟

بەرەنگاری

48 **پاشەکەوت** باوکی دانا بلیتی بەشداربوونی لە یانەیەکی وەرزشی بە بەهای 40 هەزار دینار بۆ کوڕەکەی کڕی. دانا بەپێی ئەم پلیتە هەر ڕۆژێك سەردانی یانەکە بکاتە 1 هەزار دینار دەدات لەجیاتی ئابونەی ئاسایی کە دەکاتە 3.5 هەزار دینار. چەند جار دانا دەتوانێت بڕوات بۆ یانەکە تاوەکو باوکی زەرەرمەند نەبێت لە کڕینی بلیتەکە؟

جێبەجێکردن

49 **بازرگانی** نرخی بلیتی چوونە ژوورەوەی ئاهەنگ 5 هەزار دینار بۆ گەوران و3 هەزار دینار بۆ بچووکەکان بوو، هاوکێشەیەك بنووسە دەستکەوتی ئاهەنگێك کە گەیشتە 700هەزار دینار دیاری بکات بە بەکارهێنانی $x$ بۆ ژمارەی گەوران و$y$ بۆ ژمارەی بچووکان، لاری ئەو ڕاستەهێڵەی ئەو هاوکێشەیە دەینوێنێت چەندە؟ و یەکتربڕینی لەگەڵ تەوەری $y$ چەندە؟

## تـێڕوانینێك بۆدواوە

50 ڕێسای $d=vt$ دووری بەمەتر کە ئۆتۆمبیلێك دەیبڕێت، کە بە خێرایی $v$ مەتر لە چرکەیەکدا لەماوەی $t$ چرکە دەردەبڕێت، ئەو ڕێسایە بەکاربێنە بۆهەژمارکردنی ئەو دووریەی ئوتومبیلەکە لە 4 چرکە دەیبڕێت، ئەگەر زانیت بەخێرایی 50 مەتر لە چرکەیەکدا دەڕوات.

51 ڕێسای هەژمارکردنی چێوەی بازنەی $P$ بەپێی نیوەتیرەکەی $r$ بنووسە. لەپاشان ئەم ڕێسایە بەکاربهێنە بۆ هەژماردکردنی چێوەی بازنەیەك نیوەتیرەکەی 8cm بێت ژمارە 3.14 بەکاربێنە وەك بەهای نزیکراو بۆ ژمارە $\pi$ .

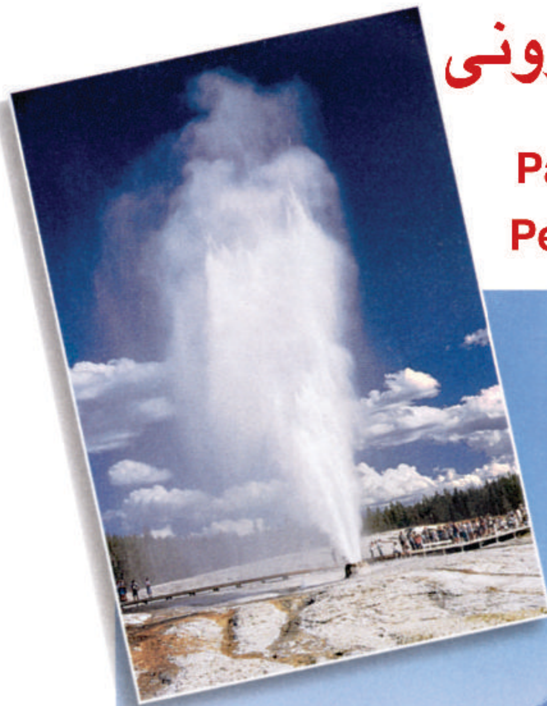
**خشتەکە بوونسەوە، پاشان تەواویبکە، کەرتەکان بە سادەترین شێوە بنووسە.**

| | شێوەی کەرتی | شێوەی دەیی | ژمارەکە وەك ڕێژەی سەدی |
|---|---|---|---|
| 52 | | $0.\overline{3}$ | $33\frac{1}{3}\%$ |
| 53 | | 0.875 | |
| 54 | | | 2% |
| 55 | $\frac{1}{20}$ | | |
| 56 | | | $12\frac{1}{2}\%$ |
| 57 | $\frac{2}{3}$ | | |
| 58 | $\frac{1}{6}$ | | |
| 59 | | | 0.01% |
| 60 | | 0.80 | |
| 61 | $\frac{2}{5}$ | | |

جێبەجێکردن

## ڕوانینێك بۆ پێشەوە

62 لە هەمان ڕووتەختی پۆتاندا دوو ڕاستەهێڵی $y=2.12x-3.7$ و $y=x+5.4$ بکێشە پۆتانی هەموو خاڵە یەکتربڕینەکانی نێوانیان دیاریبکە.



# تەریببوون و ستوونبوونی ڕاستەهێڵەکان Parallel and Perpendicular Lines



وانەی

4

**ئامانجەکان**

- تەریببوونی دوو ڕاستەهێڵ یان ستونبوونیان بە بەراوردکردنی لاریەکانیان جیادەکاتەوە.
- هاوکێشەی ڕاستەهێڵی تەریب بە ڕاستەهێڵێکی تر یان ستوون لەگەڵێدا دەنووسێت.

**بۆچی**

دوای ناسینی ڕاستەهێڵە تەریبەکان یان ستوونەکان لەڕێگەی بەراوردکردنی لارییەکانیان بە هەنگاوێکی گرنگ دادەنرێت بۆ جیاکردنەوەی پەیوەندی نێوان ڕاستەهێڵەکان بەبێ ئەوەی وێنەکانیان بکێشین.

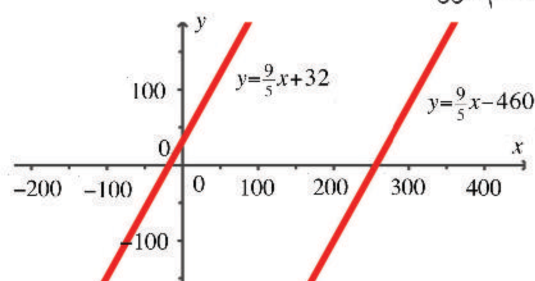
**جێبەجێکردنەکان**

فیزیا

ئاو بەشێوەی جۆراوجۆرەکانی دەردەکەوێت بەپێی پلەکانی گەرمی، دەیبەستێ لەپلەکانی گەرمی زۆر نزم وەك لە چیای بەفری وێنەکەدا دیارە، یان دەگۆڕێت بۆ هەڵم لەپلەی گەرمی بەرز وەك دیارە لەم هەڵمەی لەزەوی بەرز دەبێتەوە.

| | فەرنهایت | سەدی | کالڤن |
|---|---|---|---|
| کوڵانی ئاو | 212 | 100 | 373 |
| بەستنی ئاو | 32 | 0 | 273 |
| سفری ڕووت | -459 | −273 | 0 |

خشتەی بەرامبەر پلەکانی گەرمی بەسێ پێوەر دیاردەکات، پێوەری فەرنهایت و پێوەری سەدی و پێوەری کالڤن. گۆڕینی پلەی گەرمی لە پێوانی سەدی بۆ پێوانی فەرنهایت بەپێی یاسای $F=\frac{9}{5}C+32$ دەبێت و پێوانی کالڤن بۆ پێوانی فەرنهایت بەپێی یاسای $F=\frac{9}{5}K-459.4$ دەبێت دەتوانرێت ئەم دوو هاوکێشەیە بەلەجیاتیدانانی $y$ لەبری هەر$F$ و $x$ لەبڕی c یان $K$ .
$y=\frac{9}{5}x+32$ و$y=\frac{9}{5}x-460$ بڕوانە ئەو دوو ڕاستەهێڵەی دوو هاوکێشەکە دەنوێنن تەریبن و لارییان یەکسانە.



## Parallel Lines    ڕاستەهێڵە تەریبەکان

ئەگەر لاری دوو ڕاستەهێڵ یەکسان بوون ئەوا تەریب دەبن.
ئەگەر دوو ڕاستەهێڵی نا ستوون تەریب بوون ئەوا لارییەکانیان یەکسان دەبن (ئەستوونی سەر تەوەری سینی نەبن).

**نموونــــە** 1

**بە شێوەی لاری ـ یەکتربڕین هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی تەریبە بە ڕاستەهێڵی $y = 3x - 7$ و تەوەری ستوونی لە 4 دا ببڕێت بنووسە.**

**شیکار**

لاری ئەو ڕاستەهێڵە دەکاتە 3 و لەبەرئەوەی تەوەری $y$ لە 4 دا دەبڕێت، ئەوا هاوکێشەکەی دەبێتە $y = 3x + 4$ .

**هەوڵبدە** بە شێوەی لاری ـ یەکتربڕین هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی تەریبە بە ڕاستەهێڵی $y = 0.5x + 5$ و تەوەری ستوونی لە $-2$ دادەبڕێت بنووسە.

لە بیرت بێت دوو ڕاستەهێڵ ئەستوون دەبن ئەگەر یەکتریان بڕی و گۆشە وەستاویان پێکهێنا. لەم چالاکیەی دێت پەیوەندی نێوان لارییەکانی دوو ڕاستەهێڵی ستوون دەدۆزیتەوە.

## چالاکی

### دۆزینەوەی پەیوەندی نێوان ئەستوونبوونی ڕاستەهێڵەکان و لاریەکانیان
### Relation between Slope and Perpendicular Line

لەم چالاکییەدا پێویستمان بە ڕاستەی وەستاو و کاغەزی ڕوونکردنەوەیی هەیە کە دوو تەوەری ڕووتەختی پۆتانی لەسەر بێت.

1. ئایا دوو ڕاستەهێڵی $y = -2x + 3$ و $y = 0.5x - 2$ یەکتردەبڕن؟ ئەوە ڕوونبکەوە.
2. ئەو دوو ڕاستەهێڵە لەهەمان ڕووتەختی پۆتاندا بکێشە بە ڕوونکردنەوەیی، پۆتانی خاڵی یەکتربڕینیان دیاربکە.
3. بەڕای تۆ پەیوەندی نێوان دوو ڕاستەهێڵەکە چییە؟ ڕاستەی وەستاو بەکاربێنە بۆ ساغکردنەوەی وەڵامەکەت.
4. لاری ڕاستەهێڵی یەکەم و لەلاری ڕاستەهێڵی دووەم لێکبدە و ئەنجامی لێکدانەکە چییە؟

## Perpendicular Lines    ڕاستەهێڵە ئەستوونەکان

ئەگەر ئەنجامی لێکدانی لاری دوو ڕاستەهێڵ بکاتە $-1$ ئەوا ستوون دەبن.
ئەگەر دوو ڕاستەهێڵ ستوون بن ئەوا ئەنجامی لێکدانی لاریەکانیان دەکاتە $-1$ .

**نموونــــە** 2

**بنووسە، بە شێوەی لاری ـ یەکتربڕین هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی تەوەری ستوونی دەبڕێت لە 4 دا و ستوونە لەسەر ڕاستەهێڵی $y = 3x + 2$ .**

**شیکار**

لاری ڕاستەهێڵەکە دەکاتە $-\frac{1}{3}$ چونکە ستوونە لەگەڵ ڕاستەهێڵی $y = 3x + 2$ کە لارییەکەی دەکاتە 3 هاوکێشە داواکراوەکە ئەمەیە $y = -\frac{1}{3}x + 4$ .

**هەوڵبدە** بە شێوەی لاری ـ یەکتربڕین هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی تەوەری ستوونی دەبڕێت لە 6 دا ستوونە لەگەڵ ڕاستەهێڵی $y = 4x + 2$ بنووسە.

**نموونە** 3 بە شێوەی لاری ـ خاڵ، هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی بەخاڵی $(4, 5)$دا دەڕوات و ستوونە بە ڕاستەهێڵی $2x+3y=7$ بنووسە.

شیکار

دەستبکە بە نووسینی هاوکێشەی ڕاستەهێڵە دراوەکە بەشێوەی لاری ـ یەکتربڕین $y=-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$ دەبێت لاری ڕاستەهێڵە ستوونەکە بکاتە $\frac{3}{2}$. و لەبەرئەوەی هاوکێشەی ڕاستەهێڵ لەشێوەی لاری ـ خاڵ بریتییە لە: $y-y_1=m(x-x_1)$ ئەوا هاوکێشەی داواکراوەکە دەبێتە $y-5=\frac{3}{2}(x-4)$

**هەوڵبدە** بنووسە، لەشێوەی لاری ـ خاڵ، هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی بەخاڵی$(3, -2)$ دەڕوات، و ستوونە لەسەر ڕاستەهێڵی $4x-2y=-6$.

# ڕاهێنان

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 ڕوونبکەوە چۆن هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك تەریب بە ڕاستەهێڵی $y=4x+3$ دەنووسی؟

2 ڕاستەهێڵێك لاریەکەی $\frac{2}{3}$ ڕوونیبکەوە چۆن لاری ڕاستەهێڵی ستوون لەگەڵی دەدۆزیەوە؟

3 چۆن لاری ڕاستەهێڵی ستوون لەگەڵ ڕاستەهێڵی $y=\frac{1}{3}x+2$ دیاردەکەیت؟

4 ڕوونیبکەرەوە چۆن هاوکێشەی ڕاستەهێڵێك ستوون بێ لەگەڵ ڕاستەهێڵی $y=4x+3$ دەدۆزیەوە.

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

بنووسە، بە شێوەی لاری ـ یەکتربڕین، هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی ستوونی ببڕێت لە 5 دا و تەریب بەو ڕاستەهێڵە پێدراوەکە.

5 $y=2x+3$ 6 $y=-3x$ 7 $4y=x$ 8 $y=-6x+2$

بنووسە، بەشێوەی لاری ـ یەکتربڕین، هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی ستوونی ببڕێت لە 5دا و ستوون بێ لەگەڵ ئەو ڕاستەهێڵە پێدراوەکە.

9 $y=3x-3$ 10 $y=-3x$ 11 $5y=x$ 12 $-6y=x$

بنووسە، بەشێوەی لاری ـ خاڵ، هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی بە خاڵی$(4, 5)$ بڕوات و ستوون لەگەڵ ئەو ڕاستەهێڵە پێدراوەکە.

13 $2x+3y=4$ 14 $x-3y=8$ 15 $-2x-8y=16$

## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

لاری هەریەك لەم ڕاستەهێڵانە دیاربکە.

16 $y=4x+10$ 17 $3x+y=7$ 18 $10=-5x+2y$

19 $4x-3y=12$ 20 $y=\frac{1}{3}x-3$ 21 $3x-y=7$

**22** $2x-y=14$ **23** $3x+2y=51$ **24** $13=20x-5y$

**25** $3y=-4x+2$ **26** $\frac{2}{3}x+6y=1$ **27** $4x+\frac{1}{4}y=8$

لاری ڕاستەهێڵی ستوون لەگەڵ ئەم ڕاستەهێڵانە دیاری بکە.

**28** $y=-\frac{1}{3}x+10$ **29** $-\frac{1}{2}x-y=20$ **30** $13=-x+y$

**31** $3x+12y=12$ **32** $y=5x+10$ **33** $3x+y=2$

**34** $20=-5x+2y$ **35** $4x+4y=12$ **36** $2y=5x+11$

**37** $-4x+8y=17$ **38** $12x+3y=10$ **39** $4y=20x-3$

بنووسە، بەشێوەی گشتی هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی بەخاڵی (2،3) دەڕوات و تەریب بەو ڕاستەهێڵەی دراوە.

**40** $x+y=1$ **41** $3x=7y+2$ **42** $y=2x-3$

**43** $3y=2x$ **44** $7x-2y=10$ **45** $11=3y+2x$

بنووسە، بەشێوەی لاری ـ یەکتربڕین، هاوکێشەیەك بۆ ئەو ڕاستەهێڵەی بەم پێدراوانە دیاریکراوە.

| | بڕوات بە | تەریب بە ڕاستەهێڵی |
|---|---|---|
| **46** | (3, −5) | $5x-2y=10$ |
| **47** | (−2, 7) | $y=3x-4$ |
| **48** | (2, 4) | $y=7$ |
| **49** | (2, −4) | $y=3x-4$ |
| **50** | (−1, 4) | $y=2x+5$ |

| | بڕوات بە | ستوون لەگەڵ ڕاستەهێڵی |
|---|---|---|
| **51** | (3, −5) | $5x+2y=10$ |
| **52** | (2, 7) | $y=3x-4$ |
| **53** | (2, −4) | $y=7$ |
| **54** | (−2, 4) | $3x+y=5$ |
| **55** | (−1, 4) | $y=2x-5$ |

وێنەی ڕاستەهێڵی $y=5x$ بکێشە.

**56** ڕاستەهێڵێك تەریب بە ڕاستەهێڵی $y=5x$ بکێشە و هاوکێشەکەی بنووسە.

**57** ڕاستەهێڵێك ستوون لەگەڵ ڕاستەهێڵی $y=5x$ بکێشە هاوکێشەکەی بنووسە.

چی دەتوانیت بڵێیت دەربارەی لاری هەر یەکە لەم ڕاستە هێڵانەی خوارەوە؟

**58** تەریب بێت بە ڕاستەهێڵێکی ئاسۆیی

**59** ستوون بێت لەگەڵ ڕاستەهێڵێکی ئاسۆیی

**60** تەریب بێت بە ڕاستەهێڵێکی شاوڵی

**61** ستوون بیت لەگەڵ ڕاستەهێڵێکی شاوڵی

**بەستنەوە**

ئەندازە هاوکێشەکانی چوار ڕاستەهێڵ بنووسە کە یەکتریان بڕیبێت بۆ ئەوەی لاکانی چوارگۆشەیەك دروستبکەن.

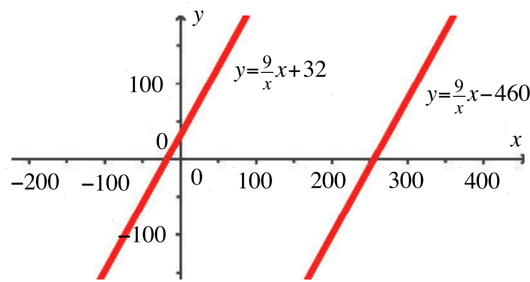
**62** تەریب بن بە دوو تەوەری پۆتان

**63** تەریب نەبن بە دوو تەوەری پۆتان

جێبەجێکردن

**64** ئەندازە یەکێك لە لایەکانی چوارگۆشەیەك دەکەوێتە سەر ڕاستەهێڵی $y = \frac{3}{4}x + 5$ هاوکێشەی ڕاستەهێڵەکان کە دەشێت بکەونە سەر لاکانی تری چوارگۆشەکە بنووسە.

**65** فیزیا یاسایەك بنووسە بۆ گۆڕینی پلەکانی گەرمی لە پێوانەی فەرنهایت بۆ پێوانەی سەدی، یاسایەکی تر بۆ گۆڕینی پێوانەی فەرنهایت بۆ پێوانەی کالڤن، ئەو دوو یاسایە لەشێوەی هاوکێشە بنووسە، بە بەکارهێنانی $x$ بۆ پلەکانی گەرمی بە پێوانەی فەرنهایت و $y$ بۆ پلەکانی گەرمی لە پێوانەی کالڤن یان پێوانەی سەدی. دوو ڕاستەهێڵەکە بکێشە.




هاوکێشەی $y = \frac{9}{5}x + 32$ گۆڕین لە پێوانەی سەدی بۆ پێوانەی فەرنهایت دەکات و هاوکێشەی $y = \frac{9}{5}x - 460$ بۆ گۆڕینی لەپێوانەی کالڤن بۆ پێوانە فەرنهایتی دەکات.

**66** پەیوەندی نێوان دوو ڕاستەهێڵی ڕاهێنانی 65 چییە؟ لاری هەریەکەیان بنووسە.

بەرەنگاری

**67** پەیوەندی نێوان ئەو دوو ڕاستەهێڵە ڕاهێنانی 66 و ئەو دوو ڕاستەهێڵەی کە گۆڕینی پێوانەی کالڤن و سەدی بۆ پێوانەی فەرنهایت دەنوێنن چییە؟

##  ڕوانین بۆ دواوە

**68** کەوانەکان لە شوێنی پێویست دابنێ بۆ ئەوەی یەکسان بوونەکە ڕاست بێت.

$$2 \times 7 + 35 \div 7 - 10 = 2$$

ئەمانە بەسادەترین شێوە بنووسە.

**69** $2x^2 + 3y + 4y + 3x^2$

**70** $3x + 2 + 4y - 2 + 3y$

**71** $2x + 3xy + 5x^2 - 7xy$

**72** $3x + 4y + 2x + 5 - 6y$

**73** $4x^2 + 5x + 8 + 11x^2 + 3x$

**74** $3xy + 2x + 4y - xy$

**75** $9x^2 + 5xy + 2x - 4x^2$

**76** $4y^2 - 12y + 6xy + 3y$

##  ڕوانین بۆ پێشەوە

چەند جووتە ڕێکخراو شیکارێك بۆ سیستمی دوو هاوکێشەی هێڵی بە دوو گۆڕاو پێکدێنێت ئەگەر ئەو دوو ڕاستەهێڵەی ئەو هاوکێشەیە دەنوێنن.

**77** تەریب بن؟

**78** ستوون بن؟

وانەی

5

# شیکارکردنی سیستمی هاوکێشە هێڵییەکان بە ڕوونکردنەوەیی

## Solving Linear Systems Graphically

**بۆچی**

سستەمی هاوکێشەکانی هێڵی بۆ شیکارکردنی ڕووداوەکانی ژیانی ڕۆژانە زۆربەی جار بەکاردێت بەتایبەتی لەکارگێری و ئابووری، لەهەندێ باردا، دۆزینەوەی شیکاری تەواو زۆرگرنگ نییە بەڵام پێویستە شیکارێکی نزیکی بدۆزیتەوە و لەهەندێ باردا داواکراو ئەوەیە ئەگەر شیکاری هەبێت تەنها یەك شیکار یان زۆرتر لە شیکارێك، لەم بارانەدا شیکاری ڕوونکردنەوەی بۆ سستەمی هاوکێشەکانی هێڵی یارمەتیمان دەدات بۆ وەڵامدانەوەی پرسیارەکراوەکە.



**ئامانجەکان**

- سستەمی دوو هاوکێشەی هێڵی شیکاردەکات بە ڕوونکردنەوەیی.
- سیستمی دوو هاوکێشەی هێڵی پۆلێندەکات.

## شیکارکردنی سستەمی هاوکێشە هێڵییەکان بەڕوونکردنەوەیی
## Solving Linear Systems Graphically

لەبەشی پێشوو چۆنیەتی شیکارکردنی سستەمی هاوکێشە هێڵیەکان فێربوویت بە بەکارهێنانی لەجیاتیدانان یان لابردن، لە هەریەکە لەم دوو ڕێگایە پێویستە بەهای یەکێك لە دوو نەزانراوەکە دیاریبکەین پاشان بەهای ئەویتریان دیاریبکەین. لە بارێکی تر، شیکاری پرسیارێکی ژیانی ڕۆژانە لەوانەیە تەنها پێویستی بە دۆزینەوەی بەهای نزیکەیی شیکارەکەیە، و لەوانەیە پێویست بە وەڵامدانەوەی پرسیارێکی سادە بێت وەك ئایا شیکاری سستەمی هاوکێشەکان هەیە؟ و ژمارەیان چەندە ئەگەر هەبن؟ لەم وانەیە ڕێگای شیکارکردنی ئەو سستەمانە فێردەبیت و وەڵامی خێرا بۆ ئەم پرسیارانە مسۆگەردەکەیت.

### چالاکی 1

**شیکارکردنی سستەمی هاوکێشە هێڵییەکان بە ڕوونکردنەوەیی Solving Linear Systems Graphically**

پێویستمان بە بژمێری ڕوونکردنەوەیی یان کاغەزی ڕوونکردنەوەی هەیە.

شیکاری ڕوونکردنەوەی سستەمی $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = -x + 5 \end{cases}$ دەکەین.

1. چی دەڵێیت دەربارەی خاڵی $(c, d)$ بەپێی دوو ڕاستەهێڵی $y = 3x + 1$ و $y = -x + 5$ کاتێك جووتەڕێکخراوی $(c, d)$ شیکارێکی ئەو سستەمە دەبێت؟
2. هەردوو ڕاستەهێڵەکە لەهەمان ڕووتەختی پۆتان بکێشە.
3. بەهای نزیکەیی بۆ پۆتانی خاڵی یەکتربڕینی دوو ڕاستەهێڵەکە بدۆزەوە.
4. شیکارێکی نزیکەیی سستەمەکە بدۆزەرەوە.

خاڵ چاودێری ✔

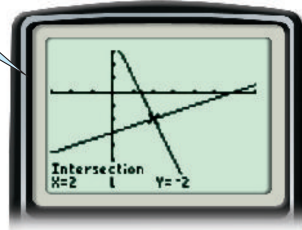
## نموونە 1

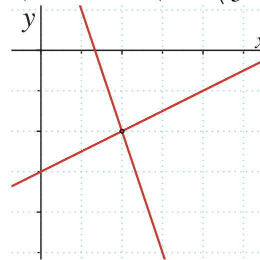
بە ڕوونکردنەوەیی سستەمی $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$ شیکاربکە.

**شیکار**

بۆ کێشانی ڕاستەهێڵی $3x + y = 4$ ، خاڵی یەکتربڕین لەگەڵ تەوەرەی $y$ دیاربکە لەڕێگای دانانی سفر لەجیاتی گۆڕاوی $x$ ودۆزینەوەی بەهای گۆڕاوی $y$ کە بەهایە بەرامبەرەکەیەتی $y = 4$ دەستدەکەوێت، کەواتە ڕاستەهێڵەکە بە خاڵی $(0,4)$ دا دەڕوات، دیسان خاڵی یەکتربڕینی ڕاستەهێڵەکە لەگەڵ تەوەرەی $x$ دیاربکە بەدانانی بەهای سفر لەجیاتی گۆڕاوی $y$ و دۆزینەوەی بەهای $x$ ی بەرامبەری $x = \frac{4}{3}$، دەستدەکەوێت کەواتە ڕاستەهێڵەکە بەخاڵی $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ دادەڕوات، ئێستا ڕاستەهێڵەکە بکێشە.

شاشەکە وەک ئەمەی خوارەوە پێناسکراوە $-3; 7$ ئاسۆیی و $-7; 3$ ستوونی بۆ ئەوەی وێنەی بەرامبەر دەست بکەوێ.




ڕێگای پێشوو بەکاربێنە بۆ کێشانی ڕاستەهێڵی $x - 2y = 6$ دوو ڕاستەهێڵەکە یەکتردەبڕن لە خاڵی $(2, -2)$ . شیکارەکە $(2, -2)$.

پاسدانی شیکارەکەبکە بەلەجیاتیدانانی ژمارە 2 لەبری $x$ و ژمارە $-2$ لەبری $y$.

$3x + y \stackrel{?}{=} 4$      $x - 2y \stackrel{?}{=} 6$

$3 \times 2 + (-2) \stackrel{?}{=} 4$      $2 - 2(-2) \stackrel{?}{=} 6$

$6 - 2 \stackrel{?}{=} 4$ ڕاستە      $2 + 4 \stackrel{?}{=} 6$ ڕاستە

## چالاکی 2

### پۆلێنکردنی سستەمەکانی هاوکێشە هێڵییەکان — Classifying Linear Systems

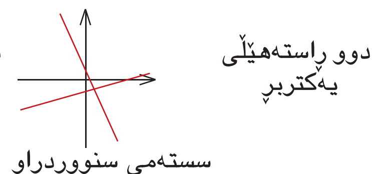
| |
|---|
| $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -x + 5 \end{cases}$ |
| $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$ |
| $\begin{cases} y = \frac{8 - 3x}{4} \\ y = -\frac{3}{4}x + 2 \end{cases}$ |

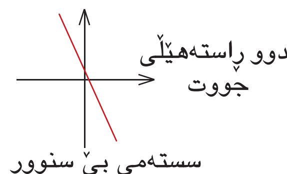
پێویستت بە بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی یان کاغەزی ڕوونکردنەو هەیە.

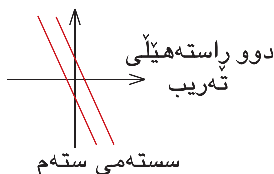
1. بە ڕوونکردنەوەیی سستەمی یەکەم بنوێنە لە خشتەی بەرامبەر.
   - A . ئایا دوو ڕاستەهێڵەکە یەکتردەبڕن؟
   - B . ئایا سستەمەکە تەنها یەك شیکاری هەیە؟ ئەو شیکارە چییە ئەگەر هەیە؟ وئەگەر سستەمەکە شیکاری نییە، سستەمەکە بگۆڕە بۆ ئەوەی تەنها یەك شیکارت دەستکەوێ و هەژمێربکە.
2. ئەوەی پێی هەڵساوی ڕوونیبکەوە بە بەکارهێنانی سیستەمی دووەم لەپاشان سێیەم.
3. پەیوەندی نێوان ئەو دوو ڕاستەهێڵەکە ڕوونبکەوە.
   - کاتێك سستەمەکە شیکاری نەبێت.
   - کاتێك سستەمەکە ژمارەیەکی ناکۆتا شیکاری هەبێت.
   - کاتێك سستەمەکە تەنها یەك شیکاری هەبێت.

**بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە**

کاتێك هەوڵ دەدەیت بە ڕوونکردنەوەیی سیستمێکی دوو هاوکێشەی هێڵی شیکاربکەیت، یەکێك لەو سێ بارانەی خوارەوە دەبێت.



## پۆلێنی سستەمەکانی هاوکێشەی هێڵی Classifying Linear Systems

سستەمەکانی هاوکێشەی هێڵی پۆلێن دەکرێن بۆ سێ جۆری بنەڕەت:

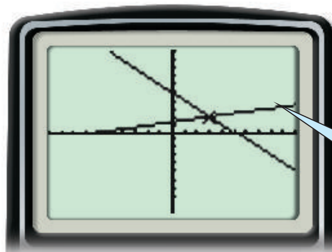
- سستەمی ستەم Inconsistent : سیستمێکە شیکاری نییە.
- سستەمی سنووردراو Independent : سیستمێکە تەنها یەك شیکاری هەیە.
- سستەمی بێ سنوور Dependent: سیستمێکە ژمارەیەکی بێ سنوور شیکاری هەیە.

**نموونە 2**

هەریەکە لەم سستەمانە پۆلێن بکە و شیکارەکەی دیاربکە ئەگەر هەبێت.

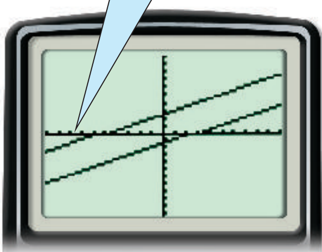
أ $\begin{cases} x+y=5 \\ x-5y=-7 \end{cases}$  ب $\begin{cases} x-2y=3 \\ x+5=2y \end{cases}$

**شیکار**



دوو راستەهێڵەکان یەکتردەبڕن چونکە لاریان جیاوازن.

لەبەر ئەوەی دوو ڕاستەهێڵەکە یەکتر دەبڕن ئەوا سستەمێکی دیاریکراوە شیکارەکەش $(3, 2)$ .



دوو ڕاستەهێڵەکە یەکترنابڕن چونکە لارییەکانیان یەکسانن و جووت نابن.

لەبەر ئەوەی دوو ڕاستەهێڵەکە تەریبن ئەوا سستەمکە ئەستەمە.

**هەوڵبدە**

سستەمی $\begin{cases} y=3x+4 \\ y=-2x+4 \end{cases}$ پۆلین بکە و شیکارەکەی دیاربکە ئەگەر هەبێت .

**سەرنجێکی ڕەخنەگرانە**

سستەمی $\begin{cases} y=mx \\ y=nx \end{cases}$ پۆلێن بکە کاتێك $m$ ، $n$ جیاواز بن لە سفر . لە هەموو بارەکانی لەتواناادایە بکۆڵەرەوە.

**نموونە 3**

**جێبەجێکردنەکان**
زانستە کۆمەڵایەتیەکان

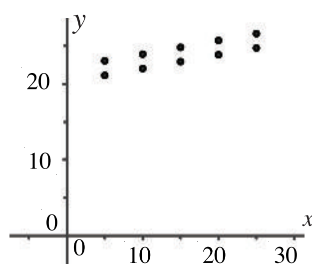
ئامارەکان دەربارەی تەمەنی هاوسەرگیری بۆ نێرینە و مێینە لە یەکێك لە وڵاتان دەرکەوتووە وەك پێدراوەکان لە وێنەی بەرامبەردا دیاریکراوە. خشتەیەك پێکبهێنە ئەو پێدراوانە پوختکاتەوە. ئایا کاتێك دێت تەمەنی هاوسەرگیری لای نێرینەکان و مێینەکان یەکسان بن ئەگەر کارەکە هەر بەم شێوەیە بڕوات؟



**شیکار**

بۆ وەڵامدانەوەی ئەم پرسیارە،پێدراوە تایبەتییەکانی هەردوو ڕەگەز لە هەمان تەوەری پۆتان بنوێنە.

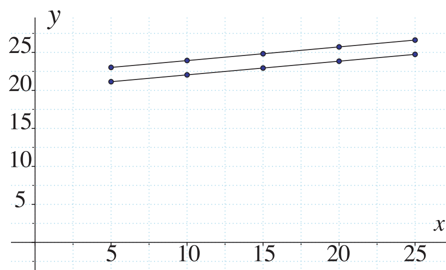
| پاش ساڵی 1970 | تەمەنی هاوسەرگیری پیاوان | تەمەنی هاوسەرگیری ژنان |
|---|---|---|
| 5 | 23.02 | 21.14 |
| 10 | 23.92 | 22.04 |
| 15 | 24.82 | 22.94 |
| 20 | 25.72 | 23.84 |
| 25 | 26.62 | 24.74 |



بروانە خاڵەکانی پەیوەست بە هەردوو ڕەگەزەکە دەکەونە سەر هەمان ڕاستەهێڵ. لاری ڕاستەهێڵی پەیوەست بە نێرینەکان دەکاتە $m_1=\frac{24.82-23.02}{15-5}=-0.18$ و هەروەها لاری ڕاستەهێڵی پەیوەست بە مێینەکان دەکاتە $m_2=\frac{22.94-21.14}{15-5}=0.18$ . بۆ ئەوەی هاوکێشەی ڕاستەهێڵی پەیوەست بە نێرینەکان بنووسێت $y=0.18x+b$ بەبەکارهێنانی خاڵی $(10, 23.92)$ بەهای $b$ دیاربکە واتە، $23.92=0.18x+b$ دەستدەکەوێت و هەروەها $b=23.92-1.8=22.12$ . و هاوکێشەی پەیوەست بە نێرینەکان دەبێتە $y=0.18x+22.12$ . دەتوانیت هاوکێشەی ڕاستەهێڵی پەیوەست بە مێینەکان بە هەمان ڕێگا بدۆزیتەوە $y=0.18x+20.24$ .

تەمەنی هاوسەرگیری لای نێرینەکان لەگەڵ تەمەنی هاوسەرگیری لای مێینەکان یەکسان دەبێت ئەگەر سستەمی هاوکێشەکانی دێت شیکاری هەبێت.

$$\begin{cases} y=0.18x+22.12 \\ y=0.18x+20.24 \end{cases}$$




بۆ ئەوەی وەڵام بدۆزیتەوە سستەمەکە بە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکە. نواندنی ئەم دوو هاوکێشەیە بە ڕوونکردنەوەیی دوو ڕاستەهێڵی تەریب و ئەگەر کار بە هەمان شێوە بڕوات ئەوا یەکسان بوونی سستەمەکە کە دەکاتە یەکسانبوونی تەمەنی هاوسەرگیری لای دوو ڕەگەزەکە بێ هیوایە.

**هەوڵبدە** سستەمی $\begin{cases} 3x+y=8 \\ 18x-2y=4 \end{cases}$ شیکاربکە بەڕێگەی لەجیاتیدانان پاشان شیکارەکە پاسادانبکە.

# ڕاهێنـــــــان

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

**1** ڕوونبکەرەوە چۆن بە ڕوونکردنەوەیی سستمی $\begin{cases} 2x-3y=4 \\ x+4y=-9 \end{cases}$ شیکاردەکەیت؟

**2** چۆن بە ڕوونکردنەوەیی سستمی $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=4 \end{cases}$ دەنوێنیت؟ ڕوونبکەرەوە چۆن شیکارەکە دەخەملێنی بە سەیرکردنی وێنەی ڕوونکردنەوەیی. بۆچی پێویستە ڕاستی خەملاندنەکەت ساغبکەیتەوە.

**3** ڕوونبکەوە چۆن ڕێسای نەخشەی هێڵی دەدۆزێتەوە بە زانینی وێنە ڕوونکردنەوەییەکەی.

## ڕاهێنانی ئاراستەکراو

هەریەك لەو سیستمانە بە ڕوونکردنەوەیی شیکاربکە.

**4** $\begin{cases} -2x+y=1 \\ y=-x+4 \end{cases}$

**5** $\begin{cases} y+2x=0 \\ 2y=-x-9 \end{cases}$

**6** $\begin{cases} 2x+3y=-12 \\ 4x-4y=4 \end{cases}$

هەر سستەمێك بە ڕوونکردنەوەیی بنوێنە و شیکارەکە بخەملێنە، خەملاندنەکە نزیکبکەرەوە بۆ نزیکترین دە.

**7** $\begin{cases} \frac{1}{2}x-y=2 \\ y=-\frac{2}{3}x \end{cases}$

**8** $\begin{cases} 2y-x=6 \\ 3x+y=-5 \end{cases}$

**9** لانە 4000 دینارى پێیە لە پارچەکانى 250 دینار و 500 دینارى ژمارەى هەریەك لە پارچەکان لەهەر چەشنێك چەندە، ئەگەر ژمارەى هەموو پارچەکان 13 پارچە بێت.

## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

هەر سستەمێك پۆلێن بکە.

**10** $\begin{cases} x-y=-4 \\ 3x+y=8 \end{cases}$

**11** $\begin{cases} 3x+4y=12 \\ 4y-12=-3x \end{cases}$

بە ڕوونکردنەوەیی هەریەك لەو سستەمانە بنوێنە و پۆلێنیان بکە. شیکارەکە بە ڕوونکردنەوەیی دیاربکە کاتێك سیستەمەکە سنوورداربێت.

**12** $\begin{cases} 6x+4y=12 \\ 2y=6-3x \end{cases}$

**13** $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -3x+4y=-10 \end{cases}$

**14** $\begin{cases} y=2x-1 \\ 6x-y=13 \end{cases}$

**15** $\begin{cases} x+3y=13 \\ 2x-3y=-9 \end{cases}$

**16** $\begin{cases} y=-2x-7 \\ 4x+2y=6 \end{cases}$

**17** $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 4x+2y=6 \end{cases}$

**18** $\begin{cases} -\frac{1}{2}x+y=4 \\ x+2y=8 \end{cases}$

**19** $\begin{cases} 3x-6y=9 \\ \frac{1}{2}x=y+\frac{3}{2} \end{cases}$

**20** $\begin{cases} 4x+5y=-7 \\ 3x-6y=24 \end{cases}$

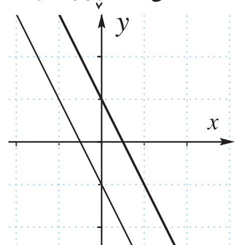
**21** $\begin{cases} -x+2y=3 \\ 2x-4y=-6 \end{cases}$

**22** $\begin{cases} 3x-y=2 \\ -3x+y=1 \end{cases}$

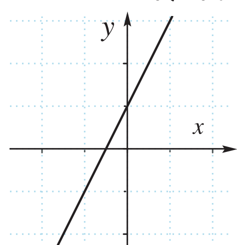
**23** $\begin{cases} 6x-3y=9 \\ 3x+7y=47 \end{cases}$

ئەو سستەمەى بە ڕوونکردنەوەیی نوێنراوە پۆلێن بکە، شیکارەکە بنووسە ئەگەر تاکانە بوو.

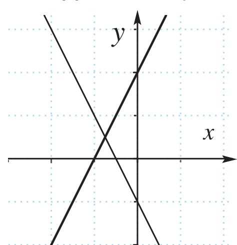
**24**




**25**




**26**




**27** ئایا ئەم جووتە ڕێکخراوانە شیکارى سستەمەکە پێکدێنن؟

أ $(1, 3)$ ؛ $\begin{cases} 5x+2y=11 \\ x-y=11 \end{cases}$

ب $(5, -2)$ ؛ $\begin{cases} 4x-3y=26 \\ 2x+y=8 \end{cases}$

ج $(2, 1)$ ؛ $\begin{cases} 2x-y=8 \\ x+3y=5 \end{cases}$

د $(5, 2)$؛ $\begin{cases} 4x-2y=16 \\ -8x+4y=-32 \end{cases}$

هـ یەك لەو چوار سستەمەى پێشوو سنووردراو نیە، بیدۆزەرەوە، پاشان سێ جووتە ڕێکخراوى تر بنووسە هەریەکەیان شیکارێك بێت بۆى

هەر سستەمێك بە ڕوونكردنەوەیی بنوێنە و پۆلێنی بكە. شیكاری سستەمەكە بدۆزەوە بۆ نزیكترین بەش لەسەد ئەگەر پێویستبوو.

28 $\begin{cases} y = 5x + 2.72 \\ y = 3.6x + 3.126 \end{cases}$

29 $\begin{cases} y = 4.3x - 0.44 \\ y = -2x + 4.6 \end{cases}$

30 $\begin{cases} -\frac{2}{5}x + y = -\frac{1}{10} \\ 3y - 2x = -\frac{5}{6} \end{cases}$

31 $\begin{cases} \frac{1}{7} = \frac{1}{14}x + \frac{11}{2}y \\ y = 4x + 14 \end{cases}$

32 $\begin{cases} 0.7y = 0.8x + 0.78 \\ -\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y = 2.1 \end{cases}$

33 $\begin{cases} 0.001y + \frac{4}{5}x = 0.2014 \\ 0.8x - 0.02y = 0.172 \end{cases}$

**ئەندازە** باخێكی لاكێشەیی چێوەكەی **130m**. سێ ئەوەندەی درێژییەكەی دەكاتە دە ئەوەندەی پانییەكەی.

34 درێژی و پانی باخەكە هەژمێربكە.

35 ڕووبەرەكەی هەژمێربكە.

36 **تاقیگەكان** كارمەندێكی تاقیگە دووگیراوەی تێكەڵكرد سوێری یەكەمیان10%وسوێری دووەمیان4%برەی هەریەك لەگیراوەكان چەندە بۆئەوەی گیراوە دەستكەوتووەكە 500mg بێت وسوێرییەكەی 6% بێت.

37 **فڕۆكەوانی** فڕۆكەیەك لەبەرزی 7000m نزمبۆوە بەتێكڕای 450m لەخولەكێكدا. فڕۆكەیەكی تر لەبەرزی 375m بەرزدەبێتەوە بەتێكڕای 575m لە خولەكێكدا. سستەمێك لەدوو هاوكێشەی هێڵی بنووسە ڕێگابدات بە هەژمێركردنی ژمارەی خولەكەكان پێش ئەوەی هەردوو فڕۆكەكە لەهەمان بەرزی دابن سستەمەكە بە ڕوونكردنەوەیی شیكاربكە.



## ڕوانینێك بۆ دواوە

ئەو برانە سادەبكە.

38 $-4x + 2x$

39 $3y + (-2x) - 3y$

40 $x - y + x$

41 $5b^0$

42 $36^{\frac{1}{2}}$

43 $25^{\frac{1}{2}}$

44 $9^{\frac{3}{2}}$

45 $\left(\frac{2x^3}{x^{-2}}\right)^2$

46 $\left(\frac{y^{-1}n^2}{n^{-3}}\right)^{-3}$

47 $\left(\frac{2q^3b^{-2}}{-q^2b^{-3}}\right)^{-1}$

48 $3(5 - 2x) - (8 - 6x) = -9 + 2(3x + 4) - 10$ شیكاربكە.



## ڕوانینێك بۆ پێشەوە

49 ئەو سستەمەی دێت كە یەكێكیان هاوكێشەی هێڵیە و ئەوی تریان هێڵی نیە شیكاربكە بە ڕوونكردنەوەیی. $\begin{cases} y = x^2 + 3 \\ y = 4x \end{cases}$

# وانەی 6

# نەخشەی بەهای ڕووت Absolute Value Function

### ئامانجەکان

- بەهای ڕووتی ژمارەی ڕاستی دەناسێت و هەژماردەکات.
- نەخشەی بەهای ڕووت دەناسێت و دانەکانی دیاریدەکات.
- نەخشەی بەهای ڕووت بە ڕوونکردنەوەیی دەنوێنێت.

**بۆچی**

ئەو پیۆەرانەی پێی هەڵدەستین کە ڕێژەیەکی گونجاوی هەڵەی تێدایە بە بەکارهێنانی نرخی ڕووت دەری دەبڕین ئەمەش لەزۆر بواردا ڕوودەدات وەك پیشەسازی.

**جێبەجێکردنەکان**

ئامار



## چالاکی 1

## کارکردن بە نەخشەی ڕووت Exploring Absolute

قوتابیانی پۆلی دە هەڵسان بە چالاکییەك، کە ئامانجەکەیپێوانی ئەو هەڵەیە، کە مرۆڤ تێیدەکەوێت، کاتێك مەزەندەی تێپەربوونی کاتی یەك خولەك دەکات. خوێندکاران بەش بوونە چەند کۆمەڵێکی دوو دوو، یەکێکیان هەردوو چاوی هاوڕێکەی بەست و داوای لێکرد دەستی بەرزکاتەوە پاشان نزمی بکاتەوە، پاش ئەوەی کە وابزانی کە یەك خولەك تێپەربووە، خوێندکاری یەکەم ئامێری پێوانەی کاتی بەکارهێنا بۆ پێوانی کاتی نێوان بەرزکردن ودابەزینی دەستی خوێندکاری دووەم، و ئەوەی دەستی کەوت تۆماری کرد، پاش ئەوە دوو خوێندکارەکە ڕۆڵیان گۆڕیەوە. خشتەی بەرامبەر ئەنجامەکانی ئەو چالاکییە پیشان دەدات.

| خوێندکار | کاتی مەزەندەکراو بە خولەك | هەڵە | هەڵەی ڕووت |
|---|---|---|---|
| لاڤین | 49 | | |
| دالیا | 59 | | |
| دوین | 51 | | |
| کلارا | 65 | | |
| نەردین | 68 | | |
| دەوەن | 77 | | |
| نارین | 66 | | |
| یارا | 54 | | |
| ئالان | 67 | | |
| نوزاد | 46 | | |
| پەیوەند | 62 | | |
| تارا | 61 | | |
| سارا | 53 | | |
| شارا | 64 | | |

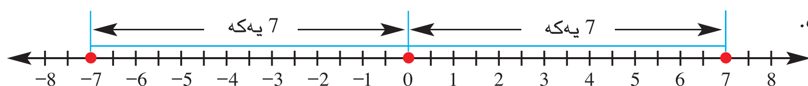
1. ئەو هەڵەیەی هەر خوێندکارێك تێیدەکەوێت هەژماربکە بەلێدەرکردنی 60 لەژمارەی چرکەکان مەزندەکراوە کە لەیەك خولەك و ئەوەش لەستوونی سێیەم تۆماربکە. ئەگەر ئەو جیاوازییە سالب بوو، ئەوە دەگەینێت کە خەملاندنی خوێندکارەکە کەمتربووە لە خولەکێکی تەواو، بەڵام ئەگەر جیاوازییەکە موجەب بوو ئەوە دەگەیەنێت مەزەندەی خوێندکارەکە پتربووە لە خولەکێکی ڕاستی.

زاناكان بە زۆری گرنگی بەماوەی دووری خەملاندن لەبەهای ڕاستەقینە دەدەن، بێ وەستان لەسەرئەوەی خەملاندنەكە زیاترە یان كەمترە لەبەها ڕاستەقینەكەی ئەو دوورییە پێی دەوترێت **هەڵەی ڕووت Absolute Error** . نموونە لەسەر ئەوە ڕێباز وای خەملاند كە خولەكێك تێپەڕیوە پاش 67 چركە هەڵەكەی $67-60=7$، و سارا وای خەملاند كە خولەكێك تێپەڕیوە پاش 53 چركە هەڵەكەی $53-60=-7$ ، هەریەكەیان 7 چركە لەبەهای ڕاستی دووركەوتەوە ئەمەش ئەوە دەردەبڕێ كە هەریەكەیان هەڵەیەكی ڕاستی كردوە برەكەی دەكاتە 7 چركە، ژمارە 7 **بەهای ڕووت Absolute Value** بۆ هەریەكە لە دوو ژمارەی 7 و 7- واتە ڕووتی هەریەكەیانە بۆ دەربڕینی ئەمە دەنووسین $7=|-7|=|7|$ .

2. لەستوونی چوارەم دووری خەمڵێنراوی لەبەهای ڕاستی خولەكێك تۆماربكە واتە بەها ڕووتەكەی.

3. بەراورد لەنێوان هەر ژمارەیەك لەستوونی سێیەم و بەهاكەی لەستوونی چوارەم بكە، پەیوەندی نێوان نیشانەی ژمارەكە و نیشانەی بەها ڕووتەكەی چییە؟

دەتوانی بەهای ڕووتی ژمارەی ڕاستی بنوێنیت بە بەكارهێنانی هێڵی ژمارەكان. بەهای ڕووتی ژمارەی ڕاستی دەكاتە دووری نێوان ئەو خاڵەی دەینوێنی لەسەر هێڵی ژمارەكان و خاڵی بنەڕەت.




دووری نێوان خاڵی ژمارە 7 وخاڵی بنەڕەت دەكاتە 7 یەكە بەهای ڕووتی ژمارە كەدەكاتە 7 واتە دەكاتە 7 واتە $|7|=7$

دووری نێوان خاڵی ژمارە7− و خاڵی بنەڕەت دەكاتە 7 یەكە بەهای ڕووتی ژمارە 7− $|-7|=7$

نواندنی ئەندازەی پێشوو دەمان گەینێتە ئەم لێكدانەوە جەبرییەی دێت:

بەهای ڕووتی ژمارەیەكی ڕاستی هەمان ژمارەیە، ئەگەر ژمارەكە سالب نەبێت، و پێچەوانەكەی ئەگەر سالیب بوو.

**بەهای ڕووتی ژمارەی ڕاستی — Absolute Value of Real Number**

پێناسەی جەبری
$$\begin{cases} |x|=x & x\ge 0 \\ |x|=-x & x<0 \end{cases}$$
(ئەگەر)

پێناسەی ئەندازەیی$|x|$ ئەو دوورییە لەسەر تەوەرەی ژمارەكان لەنێوان خاڵی $x$ و خاڵی بنەڕەت.

**نموونە 1**

هەژمێربكە.

أ $|8-2|$ ب $|2-8|$ ج $|3-3|$

شیكار

أ $|8-2|=|6|=6$ ب $|2-8|=|-6|=6$ ج $|3-3|=|0|=0$

**هەوڵبدە**

هەژمێربكە

أ $|5-14|$ ب $|12-2|$

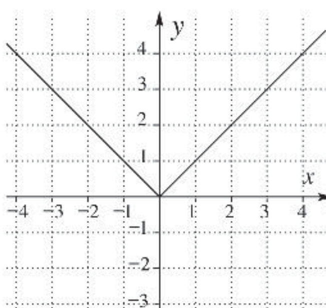
## نەخشەی بەهای ڕووت — Absolute Value Function

نەخشەی بەهای ڕووت ئەو نەخشە پێناسەكراوەیە بە ڕێسای $f(x)=|x|$ .

## نموونه 2

أ بواری نەخشەی بەهای ڕووت و مەوداکەی چییە؟

ب هێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشەی بەهای ڕووت بکێشە.




**شیکار**

أ لەبەرئەوەی تۆ دەتوانیت هەژمێری بەهای ڕووتی هەر ژمارەیەکی ڕاستی بکەیت، ئەوا بواری نەخشەی بەهای ڕووت بریتییە لە کۆمەڵەی هەموو ژمارە ڕاستییەکان. و لەبەرئەوەی بەهای ڕووتی هەر ژمارەیەکی ڕاستی دەکاتە ژمارەکە خۆی ئەگەر سالب نەبێت و پێچەوانەکەی ئەگەر سالیب بێت، ئەوا بەهای ڕووتی هەر ژمارەیەکی ڕاستی هەموو کات ژمارەیەکی سالب نییە کەواتە مەودای نەخشەی بەهای ڕووت کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانی سالب نین.

ب خشتەی بەهای نەخشەی بەهای ڕووت پێکبهێنە.

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $3$ | $2$ | $1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |

بەڕوونکردنەوەیی خاڵەدیاریکراوەکانی ئەم خشتەیە بنوێنە و بیانگەیەنە بەهێڵێکی گونجاو.

**هەوڵبدە** بواری هەریەکە لەو نەخشانە و مەوداکەیان دیاریبکە پاشان وێنە ڕوونکردنەوەکەنیان بکێشە.

أ $y=2|x|$ ب $y=|x-2|$

## چالاکی 2

## کارکردن لەسەر نەخشەی بەهای ڕووت Exploring Absolute Value Functions

پێویستت بەکاغەزی ڕوونکردنەوەیی یان بژمێری ڕوونکردنەوەیی هەیە.

1. لەهەمان ڕووتەختی ڕوونکردنەوەیی، هێڵی ڕوونکردنەوەیی بۆ هەریەکە لەم دوو نەخشەی $y=|x|$ و $y=|x-3|$ بکێشە.
2. چۆن کەمکردنەوەی 3 لە گۆڕاوی $x$ کاردەکاتە سەرهێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی بەهای ڕووت . — خاڵی چاودێری ✓
3. لەهەمان ڕووتەختی ڕوونکردنەوەیی، هێڵی ڕوونکردنەوەیی بۆ هەریەکە لەم دوو نەخشەیە $y=|x|$ و $y=|x|-3$ بکێشە. — خاڵی چاودێری ✓
4. چۆن کەمکردنەوەی 3 لەگۆڕاوی $y$ کاردەکاتە سەرهێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی بەهای ڕووت.
5. لەهەمان ڕووتەختی ڕوونکردنەوەیی هەریەکە لەم دوو نەخشەیە $y=|x|$ و $y=-|x|$ بکێشە. — خاڵی چاودێری ✓
6. چۆن پێچەوانەکردنەوەی گۆڕاوی $y$ لەشوێنی سەرهێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشەی بەهای ڕووت کاردەکات.

لە نموونەی پێشوو دەربارەی هەندێ نەخشە کردارت کرد لە نەخشەی بەهای ڕووتەوە وەرگیرابوون، واتە نەخشەی بەهای ڕووت ڕۆڵی پێکهێنەری ئەو نەخشانەیە لێرەوە پێی دەوترێت: نەخشەی بنەڕەت (دایك) هەروەها نەخشە پێکهێنراوەکان لەنەخشەی بنەڕەت (دایك) دەست دەکەون بەچەند جێگۆڕکەیەکی جەبری و دەستکەوتنی هێڵی بەیانی ئەو نەخشانە بەچەند جێگۆڕکەیەکی ئەندازەیی دەبن، کە لەهێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی بنەڕەت (دایك) پەیدادەبن. خشتەی بەرامبەر جێگۆڕکێی ئەندازەیی بەرامبەر بە جێگۆڕکێ جەبرییەکە پیشان دەدات، و ڕێدەدات بە کێشانی هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی درووست بوو لەهێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشەی دایك $y=|x|$ .

$a>0$ $b>0$

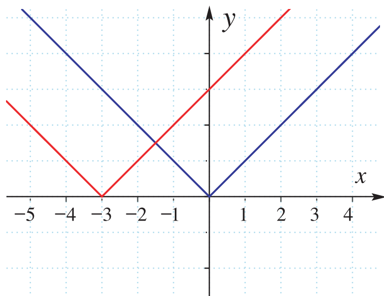
| جێگۆڕکێ جەبری | جێگۆڕکێ ئەندازەیی |
|---|---|
| $y=\|x\|\rightarrow y=\|x-a\|$ | ڕاکێشانی ئاسۆیی بۆلای ڕاستە $a$ یەکە. |
| $y=\|x\|\rightarrow y=\|x+a\|$ | ڕاکێشانی ئاسۆیی بۆلای چەپە $a$ یەکە. |
| $y=\|x\|\rightarrow y=\|x\|-b$ | ڕاکێشانی ستوونی بۆخوارەوە $b$ یەکە |
| $y=\|x\|\rightarrow y=\|x\|+b$ | ڕاکێشانی ستوونی بۆ سەرەوە $b$ یەکە. |
| $y=\|x\|\rightarrow y=-\|x\|$ | وێنەدانەوەکەی لەتەوەرەی سینی |
| $y=\|x\|\rightarrow y=\|-x\|$ | وێنەدانەوەکەی لەتەوەرەی صادی |

نموونه 3

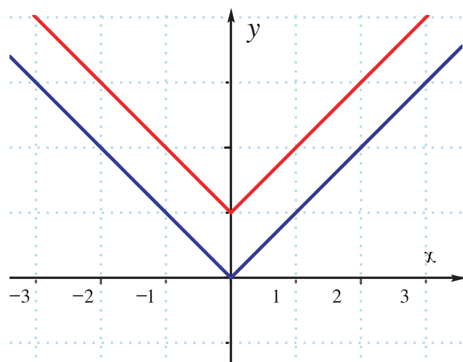
لەهەمان رووتەختی پۆتاندا هێڵی رووونکردنەوەی نەخشەی بنەڕەت $y = |x|$ بکێشە لەپاشان جێگۆڕکێی گونجاو دیاربکە و بەکاربهێنە بۆ کێشانی هێڵی رووونکردنەوەی نەخشەی پەیدابوو.

أ $y = |x + 3|$      ب $y = |x| + 1$

شیکار




أ زیادکردنی 3 بۆ گۆڕاوی $x$ لە نەخشەی بنەڕەت دەبێتە راکێشانی هێڵە رووونکردنەوەییەکە ئاسۆیی 3 یەکە بۆلای چەپ.




ب زیادکردنی 1 بۆ گۆڕاوی $y$ لەنەخشەی (بنەڕەت) دایك دەبێتە هۆی راکێشانی هێڵی رووونکردنەوەیی بەستوونی 1 یەکە بۆ سەرەوە.

# راهێنان

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 جیهان خەملاندی کەخولەکێك تێپەڕبووە پاش 51 چرکە و ئاری خەملاندی کە خولەکێك تێپەڕبووە پاش 68 چرکە رووونیبکەوە چۆن بەراوردی بڕی دووهەڵەکە دەکەیت.

2 نموونەیەك لەسەر ژمارەی $b$ بێنەوە پاسادانی $|b| = -b$ بکات رووونیبکەرەوە.

3 باسی رووونکردنەوەی نەخشەی بەهای رووت بکە.

4 ئایا بەهای رووتی ژمارەیەك دەکرێت سالب بێت؟ رووونیبکەرەوە.

5 ئایا بەهای رووتی ژمارەیەك دەکرێت بکاتە سفر؟ رووونیبکەرەوە.

## راهێنانی ئاراستەکراو

هەژمێربکە.

6 $|5 - 12|$      7 $|13 - 12|$      8 $|-3 - 3|$      9 $|4 - 4|$

10 بواری نەخشە و مەوداکەی دیاربکە پاشان هێڵی رووونکردنەوەی بکێشە.

أ $y = |x + 1|$      ب $y = |x| + 3$

11 لەهەمان رووتەختی پۆتاندا هێڵی رووونکردنەوەی نەخشەی رووت $y = |x|$ بکێشە و هێڵی رووونکردنەوەیی هەریەك لەوسێ نەخشەیەش بکێشە. ئەو جێگۆڕکێ ئەندازەییە دیاربکە کە رێدەدات بە دەستکەوتنی هێڵی رووونکردنەوەیی نەخشەی پێکهاتوو کە لە هێڵی رووونکردنەوەیی نەخشەی دایك (بنەڕەت) دەردەچێت.

أ $y = |x + 1|$      ب $y = |x| + 1$      ج $y = -|x| + 1$

## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

بەهای ڕووتی هەریەك لەو ژمارانە هەژمێربکە.

**12** 17 **13** $-33$ **14** $-7.11$ **15** 8.67

**16** $\frac{4}{3}$ **17** $-2.5$ **18** $-3\frac{5}{11}$ **19** 79.2

هەژمێربکە.

**20** $|13-24|$ **21** $|0-3|$ **22** $|4-12|$ **23** $|1-11|$

**24** $|0-(-3)|$ **25** $|1-27|$ **26** $|11-3|$ **27** $|-14-(-14)|$

**28** $|-13+13|$ **29** $|-5-2|$ **30** $|5-(-3)|$ **31** $|-11-11|$

**32** $|-5+(-5)|$ **33** $|0-5|$ **34** $|5-10|$ **35** $|-5-10|$

بوار و مەودای هەریەك لەو نەخشانە دیاریبکە.

**36** $y=|x+4|$ **37** $y=|x-5|$ **38** $y=|x|+2$

**39** $y=|x|-4$ **40** $y=-|x+4|$ **41** $y=-|x-5|$

**42** $y=-|x|+2$ **43** $y=-|x|-4$ **44** $y=-4|x|$

**45** $y=\frac{1}{2}|x|$ **46** $y=4|x|-1$ **47** $y=4|x-1|$

لەهەمان ڕووتەختی پۆتاندا هێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشەی بەهای ڕووت $y=|x|$ و هێڵی ڕوونکردنەوەی هەر نەخشەیەك بکێشە، جێگۆڕکێی ئەندازەی دیاربکە کە ڕێدەدات بەدەستکەوتنی هێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشەی بنەڕەت.

**48** $y=|x+4|$ **49** $y=|x-5|$ **50** $y=|x|+2$

**51** $y=|x|-4$ **52** $y=-|x+4|$ **53** $y=-|x-5|$

**54** $y=-|x|+2$ **55** $y=-|x|-4$

$|a-b|$ و $|b-a|$ لە پرسیاری 56 تا 59 هەژمێربکە.

**56** $a=5;\ b=3$ **57** $a=5;\ b=-3$

**58** $a=-5;\ b=3$ **59** $a=3;\ b=5$

**60** کام پوختەی دەستدەکەوێت بە پشت بەستن بەوەی هەژمێرت کردووە لە پرسیاری 56 تا 59 کە تایبەتە بە $|a-b|$ و $|b-a|$ .

**61** جێگۆڕکییەکان نەخشەی پێکهاتوو لەنەخشەی بنەڕەت $y=|x|$ بنووسە بەم جێگۆڕکێیەی دیارکراوە.

أ ڕاکێشانی ئاسۆیی بۆلای چەپ ماوەی 4 یەکە.

ب ڕاکێشانی ستوون بۆلای خوارەوە ماوەی 2 یەکە.

ج ڕاکێشانی بۆلای چەپ 5 یەکە لەپاشان کشان بۆ خوارەوە 2 یەکە.

د ڕاکێشانی بۆ سەرەوە 5 یەکە، لەپاشان وێنەدانەوە لەدەوری تەوەری سینی.

هـ وێنەدانەوەی بەدەوری تەوەری سینی لەپاشان کشان بەرەو سەرەوە بە 2 یەکە.

62 **کیمیا** چوار خوێندکار بڕی سۆدیۆمی کەلە 4 تورگە خوێ دۆزیویانەتەوە بەم شێوەیەی خوارەوە بوو، هەڵەی هەر خوێندکارێك و هەڵە رووتەکەیان دیاربکە ئەگەر زانیت وەڵامی ڕاست 8.2mg .

أ شۆنی دۆزییەوە 8.2mg

ب رۆناك دۆزییەوە 9.0mg

ج نوری دۆزییەوە 8.1mg

د هەوار دۆزییەوە 8.4mg

**گەشتەکان** دانا بە ئوتومبیلەکەی لە دهۆك دەرچوو بۆ خانەقین بەخێراییەك تێکراییەکەی 140 کیلۆمەتر لەکاتژمێرێکدا و بە کەرکوك داتێپەڕی پاش 3 کاتژمێر ئەگەر هێمای گۆڕاوی $x$ بۆ کات بەکاتژمێر لەدەستپێکی دەرچوونی دانا لە دهۆك دابنرێ، دووری نێوان دهۆك و کەرکوك دەکاتە $d = 140 \times |x - 3|$ .

63 دانا چەند کیلۆمەتری بڕی پاش دوو کاتژمێر لە دەستپێکەوە؟ دوورییەکەی لە کەرکوکەوە لەو دەمە چەندە ؟

64 دانا چەند کیلۆمەتری بڕی پاش 4 کاتژمێر لەدەستپێکەوە؟ دوورییەکەی لە کەرکوکەوە لەو دەمە چەندە .

## تێڕوانینێك بۆ دواوە

65 دوا سێ ژمارە بنووسە: 2 ، 6 ، 10 ، 14 ، 18 ، ؟ ، ؟ ، ؟ .

66 مازن 6 هەزار دیناری لایە چەند وێنە دەتوانێت بکرێت ئەگەر نرخی هەر وێنەیەك یەك هەزار و چارەگێك بێت.

هەژمێربکە.

67 $-3+4$ 68 $-3 \times (0.3)$ 69 $-15-(-15)$ 70 $60 \div 3$

71 $\sqrt[3]{125}$ 72 $-1.4-(-3)$ 73 $4\left(-1\frac{1}{2}\right)$ 74 $(-3.2) \div 4$

75 لەهەمان رووتەختی پۆتاندا هێڵی روونکردنەوەی هەر نەخشەیەك بکێشە ئەم هێڵانە لە چیدا لەیەکدەچن و لەچیدا جیاوازن.

أ $y = x + 2$ ب $y = \frac{3}{2}x - 1$ ج $y = x$

**هەریەك لەم هاوکێشانە لەشێوەی لاری ـ یەکتربڕین بنووسە.**

76 $3x + 2y = 1$ 77 $4x = 2y$

78 $4y = 0$ 79 $2x - 2y = 17$

**هەریەك لەم لاسەنگانە شیکاربکە و کۆمەڵەی شیکار لەسەر هێڵی ژمارەکان بنوێنە.**

80 $x + 7 \leq 3$ 81 $x - 3 \geq 2$

82 $x + 15 \leq -1$ 83 $x - 3 > 4$

## تێڕوانینێك بۆ پێشەوە

84 دووری نێوان خاڵی بنەڕەت و خاڵی $(x, y)$ لە رووتەختی پۆتاندا هەژماردەکرێت بە ڕێسای $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ دووری نێوان خاڵی بنەڕەت و هەریەك لەم خاڵانە هەژمێربکە.

أ $(3, 4)$ ب $(12, 5)$ ج $(-8, 6)$ د $(-15, -20)$

# هاوکێشەکان و لاسەنگەکان کە بەهای ڕووتیان تێدایە
## Absolute Value Equations and Inequalities

**وانەی 7**



**بۆچی**
لەپێوانەکانی زانستی زۆربەی جار پەراوێزی هەڵە هەیە دەتوانرێ فەرامۆش بکرێت. ئەم پەراوێزە دەتوانرێ دەرببڕێت بە بەکارهێنانی هاوکێشەکان و لاسەنگەکانی ڕووت بگرنەخۆ و ئەممەش گرنگە لەبوارە جۆراوجۆرەکان وەك لە پیشەسازی و پزیشکی و فیزیکیدا.

**ئامانجەکان**
- بەجەبری و بەڕوونکردنەوەیی هاوکێشە سادەکانی نەخشەی ڕووت دەگرنەخۆ شیکاردەکات.
- بەجەبری و بەڕوونکردنەوەیی لاسەنگە سادەکانی نەخشەی ڕووت دەگرنەخۆ شیکاردەکات.
- بە بەکارهێنانی بەهای نەخشەی بەهای ڕووت پرسیارەکان شیکاردەکات.

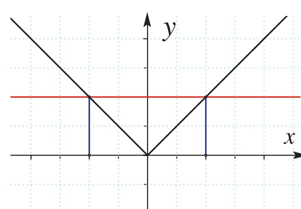
**جێبەجێکردنەکان**
**پیشەسازی**

یەکێك لە کۆمپانیاکان پەیکی دداناوی بەرهەم دەهێنێ، کە لە دروستکردنی ئوتومبێلەکاندا بەکاردێت بەپێی ستاندەری دیارکراو ئەگەر تیرەی پەیکەکە لە پێویست گەورەتر بوو، ئەوا پێکهێنانی ئەستەم دەبێت و ئەگەر بچووکتربێ ئەوا ئوتومبیلەکە بەشێوەی گونجاو ناڕوات پەراوێزی هەڵەی ڕێپێدراو لەپێوانی تیرەی ئەم پەیکە چەندە؟

## هاوکێشەکان کە نەخشەی بەهای ڕووتیان تێدایە Absolute Value Equations

هێڵی ڕوونکردنەوەیی بۆ نەخشەی ڕووت بەهای یارمەتیدەرە بۆ تێگەیشتنی هاوکێشەکانی نەخشە ڕووت و شیکارکردنیان، لەم وێنە ڕوونکردنەوەیانەی دێت ووردبەرەوە:

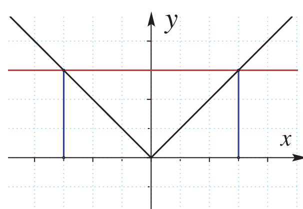
$y=|x|$ وە $y=2$




ئەگەر $|x|=2$

ئەوا $x=2$ یان $x=-2$

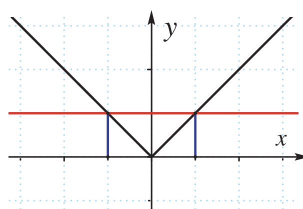
$y=|x|$ وە $y=3$




ئەگەر $|x|=3$

ئەوا $x=3$ یان $x=-3$

$y=|x|$ وە $y=1$




ئەگەر $|x|=1$

ئەوا $x=1$ یان $x=-1$

لەوەی پێشوو ئەم دەرئەنجامانەمان دەستدەکەوێت.

**هاوکێشەی نەخشەی بەهای ڕووت** **Absolute Value Equation**

کۆمەڵە شیکاری هاوکێشەی $|x| = a$ کاتێک $a$ ژمارەیەکی ڕاستی موجەب بێت پێکدێت لە دوو ژمارەی $a$ و $-a$ .

کۆمەڵە شیکاری هاوکێشەی $|x| = 0$ پێکدێت لە ژمارە 0

هاوکێشەی $|x| = a$ شیکاری نییە کاتێک $a$ ژمارەیەکی ڕاستی سالب بێت.

$|x|$ ژمارەیەکی سالب نییە چونکە بەپێی پێناسەکەی دووری نێوان خاڵی بنەڕەت و ئەو خاڵەی پۆی $x$ لەسەر هێڵی ژمارەکان دەنوێنێ، بەلآم ئەو هاوکێشانەی بەهای ڕووتیان تێدایە لەوانەیە شیکاریان ببێتە سالب.

خاڵی چاودێری ✓ هاوکێشەی $|x| = 5$ شیکاربکە.

**نموونە 1** هاوکێشەی $|2x + 3| = 4$ شیکاربکە و کۆمەڵەی شیکار لەسەر تەوەرەی ژمارەکان بنوێنە.

**شیکار**

هاوکێشەی $|2x + 3| = 4$ لەم دوو بارەدا پاسادان بکە.

$2x + 3 = 4$ یان $2x + 3 = -4$

$2x = 1$ یان $2x = -7$

$x = 0.5$ یان $x = -3.5$

**پاسادان بکە** ئەگەر $x = 0.5$ ئەوا $|2x + 3| = |2(0.5) + 3| = |4| = 4$

و ئەگەر $x = -3.5$ ئەوا $|2x + 3| = |2(-3.5) + 3| = |-4| = 4$

دەتوانیت دووبارە بە بەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی پاسادانی شیکارەکە بکەیت.



هێڵی ڕوونکردنەوەیی هەریەکە لە دوو نەخشەی $y = |2x + 3|$ و $y = 4$ بکێشە لەهەمان ڕووتەختی پۆتاندا پۆیەکانی سینی یەکتربڕینی دوو هێڵە ڕوونکردنەوەکە دیاربکە، دەبینیی لە خاڵی $(-3.5, 4)$ و لەخاڵی $(0.5, 4)$ یەکتردەبڕن. بەلآم نواندنی کۆمەڵەی شیکار لەسەر تەوەری ژمارەکان ئەمەیە.



**هەوڵبدە** هاوکێشەی $|3x + 5| = 7$ شیکاربکە و کۆمەڵەی شیکار لەسەر تەوەرەی ژمارەکان بنوێنە.

**چالاکی**

**دۆزینەوەی شیکارەکان** **Exploring Solutions**

وێنەی بەرامبەر هێڵی ڕوونکردنەوەیی هەریەکە لە دوو نەخشەی $y = |x|$ و $y = 2x - 2$ دەنوێنێ واتە شیکاری ڕوونکردنەوەیی هاوکێشەی $|x| = mx + n$ کاتێک $m = 2$ ، $n = -2$ دەنوێنێ.

1. لە هەمان ڕووتەختی پۆتاندا دوو هێڵی ڕوونکردنەوەیی دوو نەخشەی $y = |x|$ و $y = 2x - 2$ بکێشە، ژمارەی خاڵەکانی یەکتربڕین چەندە؟ بە ڕوونکردنەوەیی شیکاری هاوکێشەکە دیاربکە.

**بخەملێنە و پاسادان بکە:** بیر لەژمارەی شیکارەکانی هاوکێشەی $y = |x| = mx + n$ بکەوە.

2. هەوڵبدە بەهایەکی گۆڕاوی $m$ بدۆزیتەوە و بەهایەکی تر بۆ گۆڕاوی $n$ بەمەرجێك دوو هێڵە ڕوونکردنەوەیی دوو نەخشەی $y = mx + n$ و $y = |x|$ یەکترببڕن لەدوو خاڵدا، بەڕوونکردنەوەیی لەباشی هەڵبژاردنەکە دڵنیابە و شیکاری هاوکێشەی $|x| = mx + n$ بنووسە.

3. هەوڵبدە بەهایەکی گۆڕاوی $m$ بدۆزیتەوە و بەهایەکی تر بۆ گۆڕاوی $n$ بەمەرجێك دوو هێڵی ڕوونکردنەوەیی دوو نەخشەی $y = mx + n$ وە $y = |x|$ یەکترنەبڕن بە ڕوونکردنەوەیی لەباشی هەڵبژاردنەکە دڵنیابە.

4. هەوڵبدە بەهایەکی گۆڕاوی $m$ بدۆزێتەوە و بەهایەکی تر بۆ گۆڕاوی $n$ بەمەرجێك دوو هێڵی ڕوونکردنەوەی دوو نەخشەی $y = mx + n$ وە $y = |x|$ یەکتربڕن لە ژمارەیەکی ناکۆتا لەخاڵدا بە ڕوونکردنەوەی لەباشی هەڵبژاردنەکە دڵنیابە.

5. بەپشت بەستن بەمانەی پێشەوە، ژمارەی شیکارە توانراوەکانی هاوکێشەی $|x| = mx + n$ بەکورتی باسبکە.

## نموونە 2

هاوکێشەی $|x-3| = 3x+5$ شیکاربکە.

**شیکار**

$|x-3| = 3x+5$

$x-3 = 3x+5$ یان $x-3 = -(3x+5)$

$2x = -8$ یان $4x = -2$

$x = -4$ یان $x = -0.5$

**پاسادان**

$x = -4$

$|-4-2| \overset{?}{=} 3(-4)+5$

$|-7| \overset{?}{=} 3(-4)+5$

$7 \overset{?}{=} -7$ هەڵەیە

$x = -0.5$

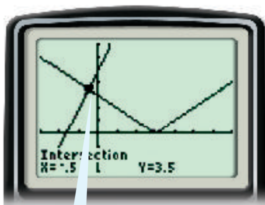
$|-0.5-3| \overset{?}{=} (3(-0.5)+5)$

$|-3.5| \overset{?}{=} -1.5+5$

$3.5 \overset{?}{=} 3.5$ ڕاستە

شیکارەکە $x = -4$ فەرامۆش دەکرێ چونکە دەبێتە هۆی هەڵەی «$7 = -7$»

بەڵام شیکاری $x = -0.5$ پەسەندە دەتوانیت پاسادانی وەڵامەکەت



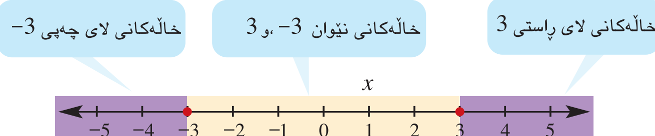

$(-0.5, 3.5)$

بە ڕوونکردنەوەیی بکەیت لەهەمان ڕووتەختی پۆتاندا هێڵی ڕوونکردنەوەیی هەریەکە لە دوو نەخشەی $y = |x-3|$ و $y = 3x+5$ وێنەی بەرامبەرت دەستدەکەوێت.

**هەوڵبدە** هاوکێشەی $|x-4| = x+1$ شیکاربکە.

## ئەو لاسەنگانەی بەهای ڕووتیان تێدایە — Absolute Value Inequalities

دوو خاڵی 3 و $-3$ کۆمەڵە شیکاری هاوکێشەی $|x| = 3$ لەسەر تەوەرەی ژمارەکان دەنوێنن، ئەو دوو ژمارەیە تەوەرەکە بۆ سێ بەش بەشدەکەن.



## لاسەنگەی نەخشەی بەهای ڕووت — Absolute Value Inequality

کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگەی $|x| < a$ کاتێك $a$ ژمارەیەکی ڕاستی موجەبە پێکدێت لەکۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانی $x$ کە ساغکردنەوەی $-a < x < a$ دەکات.

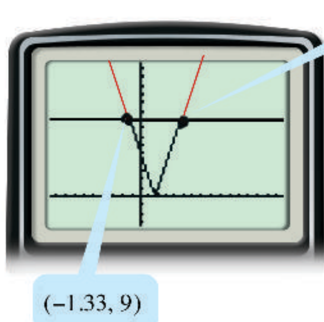
کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەی $|x| > a$ کاتێك $a$ ژمارەیەکی ڕاستی موجەبە پێکدێت لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانی $x$ کە ساغکردنەوەی $x < -a$ یان $x > a$ دەکات.

کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەی $|x| \geq a$ کاتێك $a$ ژمارەیەکی ڕاستی ناموجەبە پێکدێت لە هەموو ژمارە ڕاستییەکاندا. لاسەنگەی $|x| < a$ شیکاری نییە کاتێك $a$ ژمارەیەکی ڕاستی موجەب نەبێت.

دەتوانیت بیرۆکەی وەك ئەوانە بۆ دوو لاسەنگەی $|x| \geq a$ ، $|x| \leq a$ دابڕێژی.

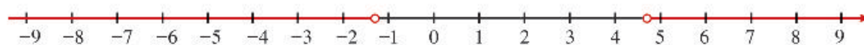
**نموونە 3** لاسەنگەی $|5-3x| > 9$ شیکاربکە و کۆمەڵە شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

**شیکار**




| | | |
|---|---|---|
| $|5-3x| > 9$ | | ( لاسەنگە لە جۆری $|x| > a$ ) |
| $5-3x > 9$ | یان | $5-3x < -9$ |
| $-3x > 4$ | یان | $-3x < -9-5$ |
| $x < -\frac{4}{3}$ | یان | $x > \frac{14}{3}$ |

کۆمەڵە شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان دەنوێنین وەك لە خوارەوە.




**پاسادان**

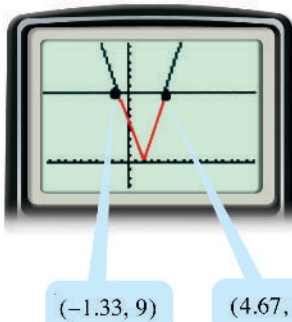
ڕاستی وەڵامەکە بە ڕوونکردنەوەیی پاسادان بکە لەهەمان تەوەرەی پۆتاندا وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=9$ و هێڵی ڕوونکردنەوەی نەخشەی $y=|5-3x|$ بکێشە، وێنەکە دیاردەکات ئەگەر $x < -\frac{4}{3} \approx -1.33$ یان $x > \frac{14}{3} \approx 4.67$ ئەوا ئەو خاڵەی پۆتانی $x$ لەسەر هێڵی ڕوونکردنەوەی بۆ نەخشەی $y=|5-3x|$ بەرزترە لەو خاڵەی پۆتانی $x$ لەسەر هێڵی ڕوونکردنەوەیی $y=9$ ئەمەش ئەوە دەسەلمێنێت کە پۆتانی $y$ یەکەم $(|5-3x|)$ گەورەترە لەپۆی صادی دووەم.

**بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** بۆچی ئاراستەی لاسەنگە لەشیکاری ڕاهێنانی پێشوودا گۆڕا.

**هەوڵبدە** لاسەنگەی $|3x-7| > 1$ شیکاربکە و کۆمەڵەی شیکارەکەش لەسەر تەوەرەی ژمارەکان بنوێنە.

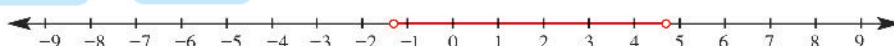
**نموونە 4** لاسەنگەی $|5-3x| < 9$ شیکاربکە و کۆمەڵەی شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

**شیکار**




| | | |
|---|---|---|
| $|5-3x| < 9$ | | ( لاسەنگە لە جۆری $|x| < a$ ) |
| $5-3x < 9$ | و | $5-3x > -9$ |
| $-3x < 4$ | و | $-3x > -14$ |
| $x > -\frac{4}{3}$ | و | $x < \frac{14}{3}$ |

کۆمەڵەی شیکار لەسەر تەوەری ژمارەکان بەم شێوەیە دەبێت.



**پاسادان بکە**

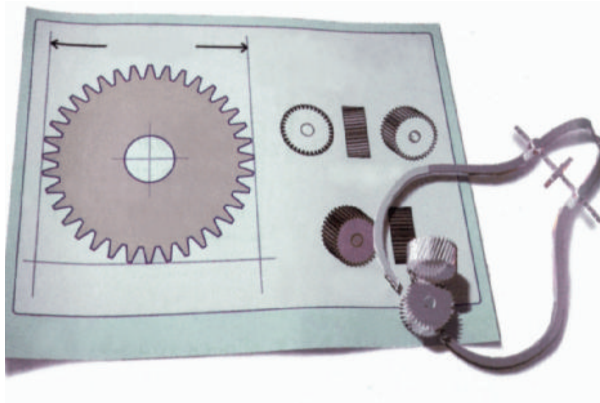
نموونەی پێشوو دیاریدەکات ئەگەر $-\frac{4}{3} < x < \frac{14}{3}$ ئەوا ئەو خاڵەی پۆیەکەی لەسەر هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y = |5 - 3x|$ بێ نزمترە لەپۆی ئەو خاڵەی پۆیەکە لەسەر هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y = 9$ بێ ئەمەش ئەوە دەسەلمێنێ کە تانی یەکەم $(|5 - 3x|)$ بچووکترە لەتانی دووەم 9.

**خاڵی چاودێری** ✔ بەراورد لەنێوان دوو لاسەنگەی دوو نموونەکەی پێشوو بکە؟ ڕوونیبکەرەوە.

## نموونە 5

**جێبەجێکردنەکان**
**پیشەسازی**

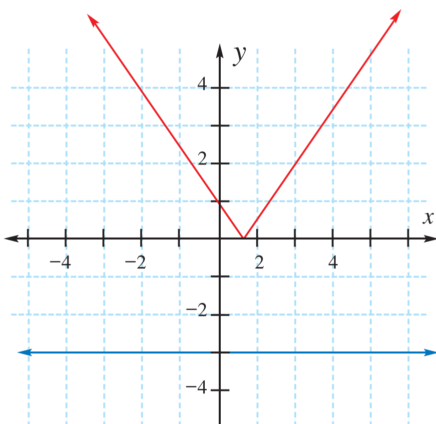
لاسەنگەیەك بنووسە نەخشەی بەهای ڕووت بگرێتەخۆ بۆ دیارکردنی پەراوێزی هەڵەی پەسەندکراو لەپێوانی تیرەی ددانـاوی دیارکراو لەسەرەتای وانەکە، ئەگەر زانیت تیرەی پەیکەکە دەبێت بکاتە 3.5 لەگەڵ پەراوێزی هەڵە کە دەکاتە $\pm0.01$ یە



**شیکار**

با هێمای $d$ بۆ تیرەی پەیکەی ددانـاوی بێت، پێویستە ئەو گۆڕاوە مەرجی $3.5 - 0.01 \le d \le 3.5 + 0.01$ پاسادان بکات، واتە $-0.01 \le d - 3.5 \le 0.01$ لاسەنگەی $|d - 3.5| \le 0.01$ پەراوێزی هەڵەی پەسەند دیاریدەکات.

**هەوڵبدە** لاسەنگەی $12.00 - 0.01 \le a \le 12.00 + 0.01$ لەشێوەی لاسەنگەیەکی نەخشە ڕووت لەخۆبگرێ بنووسە. ئەو لاسەنگانەی نەخشەی ڕووت لەخۆدەگرن هەیانە شیکاری نییە، لەکاتێکدا لاسەنگەی تریان هەیە کۆمەڵە شیکاریان کۆمەڵەی هەموو ژمارە ڕاستییەکان دەبێت، لاسەنگەی $|2x - 1| < -3$ شیکاری نییە، چونکە ژمارە $|2x - 1|$ ناکرێت بچووکتر بێت لە ژمارەیەکی سالب. لەبارێکی تردا وێنەی بەرامبەر دیاری دەدات کە هەر ژمارەیەکی ڕاستی شیکارە بۆ لاسەنگەی $|2x - 1| > -3$ و لەمەوە کۆمەڵەی شیکاری ئەم لاسەنگەیە کۆمەڵەی هەموو ژمارە ڕاستییەکانە.




**خاڵی چاودێری** ✔ لاسەنگەیەکی بەهای ڕووت هێمای $\ge$ لەخۆبگرێت بنووسە و بێ شیکاربێت، لاسەنگەیەکی تربەهای ڕووت هێمای $\le$ لەخۆبگرێت بنووسە، و کۆمەڵە شیکاری کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان بێت.

**بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** ئەگەر لاسەنگەی $|x| \le a$ بێ شیکاربێت، ئەوا چی دەڵێیت دەربارەی بەها توانراوەکانی ژمارە $a$ و دەربارەی کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگەی $|x| > a$ ؟

# ڕاهێنـــــــــان

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 ئایا هاوکێشەی $3 = 4 + |3x - 5|$ شیکاری هەیە؟ ڕوونیبکەرەوە.

2 بۆچی هەموو جارێك پاسادانی ڕاستی شیکاردەکەیت کە هاوکێشەیەك بەهای ڕووتی تیابێ.

3 بۆچی دەشێ هاوکێشەیەك بەهای ڕووتی تیابێ، دوو شیکاری هەبێت؟ ڕوونیبکەرەوە.

4 نواندنی ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە بۆ چۆنیەتی باسکردنی کۆمەڵە شیکاری لاسەنگیەك کە بەهای ڕووتی تیابێ یەکسان بێت بەکۆمەڵەی هەموو ژمارە ڕاستییەکان.

## ڕاهێنانی ئاراستەکراو

ئەم هاوکێشانە شیکاربکە و پاسادانی شیکارەکەش بکە.

5 $|x - 10| = 4$

6 $|2x - 5| = 3$

7 $10 = |7 - 3x|$

8 $x + 4 = |x - 2|$

9 $\frac{1}{2}x + 1 = |x - 2| - 1$

10 $\frac{1}{2}x + 1 = |x + 3|$

ئەم لاسەنگانە شیکاربکە و کۆمەڵە شیکارەکەش لەسەر تەوەرەی ژمارەکان بنوێنە.

11 $2 < |x - 4|$

12 $|2x + 1| \geq 5$

13 $|x + 5| < \frac{1}{2}$

14 $\frac{1}{2}|2x + 1| \geq 2$

15 $3|x + 1| \leq 2$

16 $3|x + 1| + 3 > 2$

17 ئارام تیرێکی گرتە نیشانەیەك کە 9 مەتر لێوەی دوور بوو تیرەکە لە دووری کەمتر لە 60cm لە نیشانەکەوە کەوتەوە.

أ لاسەنگیەك بنووسە کە بەهای ڕووتی تێدابێ و ئەو دووریە دەربڕێ کە تیرەکە بڕیویەتی.

ب ئەو لاسەنگەیە شیکاربکە و کۆمەڵە شیکارەکەش لەسەر ڕاستەهێڵی ژمارەکان بنوێنە.

## ڕاهێنان و جیبەجێکردن

18 هێڵێك بکێشە کە هەریەکە لە هاوکێشەکان یان لاسەنگەکانی لای ڕاست بۆ شیکارەکەی لە لای چەپ بگەیەنێ.

| | |
|---|---|
| $\vert x + 2\vert = 4$ | $-6 < x < 2$ |
| $\vert x + 2\vert < 4$ | $x = 2$ یان $x = -6$ |
| $\vert x + 2\vert < -4$ | $x > 2$ یان $x < -6$ |
| $\vert x + 2\vert > -4$ | شیکاری نییە. |
| $\vert x + 2\vert > 4$ | کۆمەڵە شیکار کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکانە. |
| $\vert x + 2\vert = -4$ | شیکارەکە باس نەکراوە. |

هەریەك لەم هاوکێشانە شیکاربکە.

19 $|x + 4| = 8$

20 $|x - 5| = 12$

21 $|2 + x| = 10$

22 $|8 - x| = 1$

23 $|x - 2| = 9$

24 $|x + 5| = 1$

25 $|2x - 15| = 11$

26 $|3x + 12| = 18$

27 $|10 - 4x| = 28$

28 $|5 + 4x| = 17$

29 $|5x - 6| = 2$

30 $|10 - 3x| + 5 = \frac{1}{2}$

31 $|10x + 2| - 18 = 120$

32 $|4 - 3x| - 9 = 3$

33 $|2x - 8| + 2 = 1$

شیکاری هەریەك لەم لاسەنگانە بکە.

34 $|x-4|>1$

35 $|x+5|\leq 7$

36 $|3x|>15$

37 $|-2x|\leq 12$

38 $|4x|\leq -8$

39 $|3-x|\geq -5$

40 $|2+5x|\leq 3$

41 $|2x-3|<11$

42 $|4x+6|\leq 14$

43 $\left|\frac{2x+3}{-5}\right|<3$

44 $|4x-5|\geq 15$

45 $|2x-1|\geq -5$

46 $|5x+3|>-2$

47 $|7-6x|<-4$

48 $|9x+4|\leq -11$

49 $-2|4x+1|\leq -4$

50 $-2|4x+2|\geq -4$

51 $\left|\frac{3}{2}-\frac{5}{2}x\right|<-7$

## پوختە

**دەتوانیت لاسەنگەیەك بەهای ڕووتی تیابێ بەسێ شێوە دەربڕیت**

| زارەکی | جەبری | ڕوونکردنەوەیی |
|---|---|---|
| دووری نێوان $x$ و ژمارەی 3 کەمترە لە ژمارەی 5 | $|x-3|<5$ | −4 −2 0 2 3 4 6 8 |

**ئەو دوو شێوە دەربڕینەی لە پرسیارەکانی 52 تا 54 دا نیە بیانووسە.**

52 دووری نێوان $x$ و ژمارە 7 کەمترە لە 4

53 $|x-4|<1$

54 2 4 6 8 10 12 14

بەرەنگاری

جێبەجێکردنەکان

55 لاسەنگەی $\left|\frac{4x}{3}\right|\leq 2x+5$ شیکاربکە و کۆمەڵەی شیکارەکەی لەتەوەری ژمارەکان بنوێنە.

**لاسەنگەیەك بنووسە کە بەهای ڕووتی تێدابێت و دەربڕین بۆ هەریەکە لە پرسیاری 56 ، 57 پاشان شیکارەکەی بنووسە.**

56 کێشی ڕزگار 60kg بەڵام پزیشکەکەی پێ ڕاگەیاندوە کە کێشەکەی لەکێشی نموونەییەوە دوورە بەرێژەی 5%، ئەو بەها پەسەندە چەندە بۆ کێشی ڕزگار؟

57 یەکێك لە پەیمانگەکانی ئامار بڵاویکردوەوە کە 68% ئەو کەسانەی سەیری فیلمی سینەمایی دەکەن لەکاتی سەیرکردنەکانیاندا کێك دەخۆن. ڕێژەی سەدی بەرزترین و نزمترین ئەو کەسانە دیاریبکە کێك دەخۆن لەکاتی سەیرکردنیاندا بۆ فلیمەکان ئەگەر بزانیت ڕێژەی هەڵەی بڵاوکراوەکەی پەیمانگاکە 3% بێت.

## ڕوانینێك بۆ دواوە

شیکاری ئەم هاوکێشانە بکە.

58 $\frac{2}{x}=\frac{4}{5}$

59 $\frac{x-3}{4}=\frac{2x}{16}$

60 $\frac{10x}{-60}=\frac{2x-10}{8}$

61 شیکاری هاوکێشەی $P=2v+2w$ بکە بە هەژمێری گۆڕاوی $v$ بەپێی گۆڕاوەکانی تر.

**هەریەك لەم لاسەنگانە شیکاربکە و کۆمەڵە شیکارەکانیشیان لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.**

62 $4x-5<\frac{1}{3}(8x+3)$

63 $x-9\geq\frac{1}{6}(21+x)$

**هەریەکە لەم لاسەنگە ئاوێتانە شیکاربکە و کۆمەڵە شیکارەکانیشیان لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە**

64 $(x>2)\wedge(x\leq -1)$

65 $(x\leq -2)\vee(x>-4)$

## ڕوانینێك بۆ پێشەوە

66 هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $f(x)=(x-3)(x+2)$ بکێشە بە دیاریکردنی یەکتربڕینەکەی لەگەڵ تەوەری ئاسوویی. بەراورد بکە لە نێوان هاوکۆڵکەی ڕادەدارەکە کە لەپێناسەی نەخشەکە دەکات و یەکتربڕینی لەگەڵ تەوەری $x$

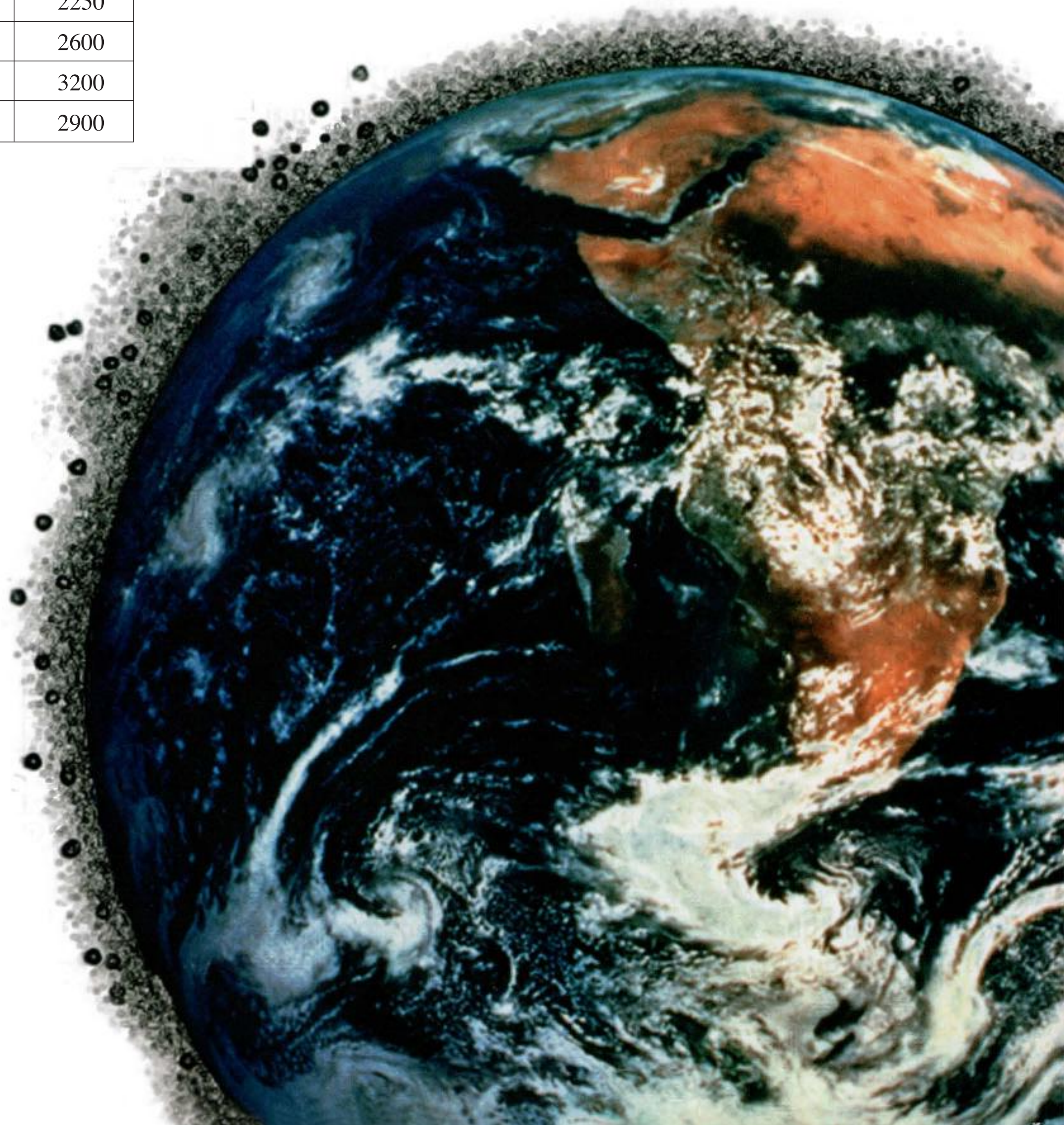
# پاشماوەکانی بۆشایی ئاسمان

مرۆڤ لەساڵی 1957ەوە هەستاوە بەهەزارەها چالاکی لەبۆشاییدا، لەمیانەی ناردنی مانگە دەستکردەکان و هەڵسان بەگەشتی بۆشایی. ئەم ئەرکانە بەملیۆنەها پاشماوەیان بەجێ هێشتووە لەو بۆشاییەی نزیکە لە زەوییەوە. بوونی ئەم پاشماوە قەبارە جیاوازانە وای پێویست کردووە کە لە چالاکیە تازەکاندا لەبەر چاوبگیرێت. ئەگەر پاشماوە قەبارە بچووکەکان ترسناك نەبن لەسەر چالاکیە تازەکان، بێ گومان پاشماوە قەبارە گەورەکان ترسناکن. بۆیە پێویستە ئەو پاشماوانە تۆماربکرێن و پێدراوەکان بەبەردەوامی نوێبکرێتەوە.

ئەم خشتەییەی بەرامبەر ژمارەکانی مەزندەکراو دەنوێنێت بۆ پاشماوەکانی مانگە دەستکردەکان و پارچەبووەکان لەنێوان ساڵانی 1965 و 1990 کە بەسەر ماوەکان بۆ 5 ساڵ بەشکراوە.

**خشتەی پاشماوەکانی بۆشایی**

| ساڵ | مانگەکان | پارچەی لێبووەوە |
|---|---|---|
| 900 | 175 | 1965 |
| 1850 | 350 | 1970 |
| 2250 | 525 | 1975 |
| 2600 | 700 | 1980 |
| 3200 | 875 | 1985 |
| 2900 | 1050 | 1990 |



## چالاکی 1



1 پێدراوەکانی خشتەکەی پێشوو بەکاربهێنە بۆ هەژمێری تێکڕای گۆڕانی ژمارەی مانگە دەستکردەکان لەنێوان ساڵی 1965 و1990 ئەم تێکڕایە لە ماوەکانی 5 ساڵدا هەژماربکە و بەراوردی ئەم تێکڕایانە لەگەڵ تێکڕای گۆڕان لەسەر ماوەی گشتی نێوان 1965 و 1990 بکە.

2 نموونەیەکی بیرکاریانە پێك بێنە لەسەر شێوەی نەخشەیەکی هێڵی بۆ گشت پێدراوەکانی مانگەدەستکردەکان. هێمای $x$ بۆ ساڵ دابنێ و ساڵی 1965 با ساڵی سفر بێت.

پاسادانی نموونەکەت بکە بە بەکارهێنانی پێدراوەکانی خشتەکە.

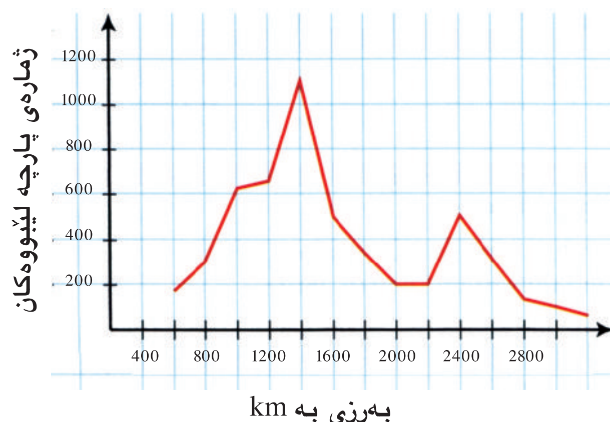
## چالاکی 2

1 پێدراوەکانی پارچە لێبۆوەکان لە خشتەکەدا بنوێنە بەمەرجێ تەوەرەی سینەکان نواندنی ساڵەکان بێت (سفر بۆ ساڵی 1965 دابنێ) و تەوەرەی صادەکان نواندنی پارچە لێبۆوەکان بێت.

2 وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی بکێشە کە بەگونجاوی دەزانی بۆ نواندنی ژمارەی پارچە لێبۆوەکان بەدرێژایی ساڵەکان. ئەو باوە باس بکە کە لە وێنەکەوە هەڵیدەهێنجێ.
ئایا باوەڕت وایە نموونەی دەستکەوتووەکەت ڕێگات پێدەدات بۆ دانانی مەزندەی دوارۆژ کەپشتی پێببەسترێت؟ ئەمە ڕوونبکەوە.

## چالاکی 3

1 وێنەی ڕوونکردنەوەیی بەرامبەرت بەکاربهێنە کە دابەشکردنی پاشماوەکانی بۆشایی بەپێی بەرزی نیشان دەدات ڕوونیبکەرەوە چۆن ژمارەیان دەگۆڕێت بەگۆڕانی بەرزی.




2 تێبینی بکە کە هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە کە ژمارەی پاشماوەکان بەپێی بەرزی دیاری دەکات، بریتین لە چەند پارچە ڕاستەهێڵێك ئەمەش ئەوە دەگەینێ کە ڕێسای ئەم نەخشەیە دەگۆڕێت بەگۆڕینی ماوەکانی بەرزی، کە هێڵین لەهەموو ماوەکاندا، ئەم ماوانە دیاریبکە و هاوکێشەی ئەم پارچە ڕاستەهێڵانە بەسەر ماوەکان دیاریبکە.

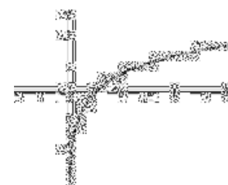
3 هاوکێشەکان بەکاربهێنە کە پێی گەیشتووی بۆ مەزندەکردنی ژمارەی پاشماوەکان لەبەرزی 725km پاشان لەبەرزی 2100km. گفتوگۆبکە لە سوودی ئەو نموونەی دەستکەوتووە.

# 2

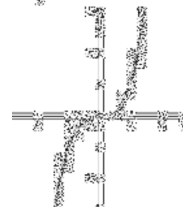
# پێداچوونەوەی بەش

ئایا ئەم وێنە ڕوونكردنەوە نەخشە دەنوێنێ؟

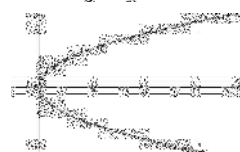
**1**



**2**



**3**



**4** ئایا خشتەی بەرامبەر نەخشە دەنوێنێ؟

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 2 | 3 |
| 1 | -2 |
| 0 | 0 |
| 2 | -5 |
| 3 | 6 |

**بواری نەخشەو مەوداكەی دیاربكە.**

**5** $f(x)=3x^2-2x+1$

**6** $f(x)=11x-2$

**7** $f(x)=3x^2-2$ **8** $f(x)=2-3x$

**دەرون ناسی** زانایانی دەروونناسی پلەی زیرەكی كەسێك دیاردەكەن لەرێگەی هەژمێری ڕێژەی تەمەنی هزری بۆ تەمەنی بە ساڵ، و لێكدانی ئەو ڕێژەیە لە ژمارە 100 لەپاشان نزیكردنەوەی ئەنجام بۆنزیكترین ژمارەی تەواو.

**9** پلەی زیرەكی كەسێك تەمەنی بە ساڵ 15 ساڵ بێت و تەمەنە هزریەكەی بەدواییەكدا 10، 14، 15، 18، 25 .

**10** پەیوەندی نێوان تەمەنی هزری و پلەی زیرەكی بۆ ئەو كەسە دەربرە بەهۆی خشتە و وێنەی ڕوونكردنەوەیی و ڕێسا.

**11** ئایا پەیوەندی نێوان تەمەنی هزری و پلەی زیرەكی نەخشەیە؟

**12** كام نەخشە هێڵی نییە؟

أ $f(x)=-2x+1$ ب $f(x)=11x-2$

ج $f(x)=3x^2-2$ د $f(x)=2-3x$

**هاوكێشەی ڕاستەهێڵ بنووسە لە پرسیارەكانی13 تا 18.**

**13** لاری 3– و بەخاڵی $(5, 8)$ دەبڕوات.

**14** لاری سفر وبەخاڵی$(-5, 4)$دابڕوات.

**15** بەدوو خاڵی$(3, 4)$و$(5, 4)$ دابڕوات.

**16** بەدوو خاڵی$(6.8, 2)$و$(3.6, 6)$ دابڕوات.

**17** بەخاڵی$(4, -1)$ دابڕوات و ستوون بێت لەسەر ڕاستەهێڵی $y=-3x-5$ .

**18** بەخاڵی $(-3, -2)$ دابڕوات و تەریب بێت بە ڕاستەهێڵی $y=3.6x-5$ .

هاوكێشەی هەریەك لەم ڕاستەهێڵە بەشێوەی گشتی بنووسە.

**19** $y+9=4x-8$

**20** $3x+y+6=9$

**بەڕوونكردنەوەیی ئەم سستەمە هێلیە شیكاربكە.**

**21** $\begin{cases} x+6y=3 \\ 3x+y=-8 \end{cases}$

**22** $\begin{cases} 8x+6y=2 \\ x+2y=-3 \end{cases}$

**23** وێنەی ڕوونكردنەوەیی ئەم نەخشەیە دروستبكە.

$f(x)=\frac{1}{2}|x|+1$

**24** ئەو جێگۆڕكیانە چین كە نەخشەی $f(x)=-|x+2|-3$ پەیدادەكەن لەنەخشەی دایك (بنەڕەت)؟

**هاوكێشەكە شیكاربكە.**

**25** $\left|\frac{1}{2}x\right|=20$ **26** $12|2x|=108$

**27** $\frac{3}{2}|x+4|-5=22$

**لاسەنگەكە شیكاربكە.**

**28** $\left|\frac{1}{2}x\right|>20$ **29** $-5|6x-7|\leq 35$

**30** $|6x-7|\leq -35$

**ئەندازە** لە سێگۆشەكانی 90 – 60 – 30 پەیوەندی نێوان درێژی ژێ $(d)$ و درێژی لا $(s)$ بەرامبەر گۆشەی$30^\circ$ پەیوەندی ڕاستەوانەیە واتە ڕێژەی یەكەم بۆ دووەم ناگۆڕێت.

**31** ئەو ڕێژەیە دیاربكە ئەگەر زانیت درێژی ژێ دەكاتە 45 كاتێك درێژی لا 22.5 بێت.

**32** $d$ بەپێی $s$ بنووسە.

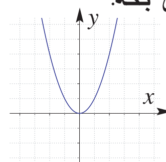
**33** بەهای $s$ هەژمێربكە كاتێك $d=13cm$ .



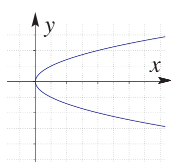
# تاقیکردنەوەی بەش

ئەگەر وێنە ڕوونکردنەوەییەکان نەخشە دەنوێنن باسیان بکە.

**1**




**2**




بەهای هەریەکە لەم نەخشانە هەژماربکە کاتێک $x$ بەهای $-2$، سفر، 2 یەك لەدوایەك وەربگرێت

**3** $f(x)=5x^2-4x+7$

**4** $f(x)=x^2+x-4$

**5** بەکارچوون کارگێڕی زانکۆیەك باجی تۆمارکردنی بەم شێوەیە دانا: 480 هەزار دینار باجی بەئەندام بوون، 900 هەزار دینار بۆ هەر وانەیەك کە خوێندکار هەڵیدەبژێرێ، نەخشەیەك بنووسە کە تێچوونی تۆمارکردنی خوێندکارێك بنوێنێ لە $x$ وانەدا و تێچوونی تۆمارکردن لە 3 وانەدا چەندە؟

**6** بازرگانی کارگێری دەزگایەکی چاککردنی ئۆتومبیل 50 هەزار دینار وەردەگرێ بۆ وەرگرتنی ئۆتومبیلێك و دەست نیشانکردنی هۆی لەکارکەوتنەکەی و 45 هەزار دینار بۆ هەر دەمژمێرێك کە کرێکارەکانی کاری چاکردنی تیادەکەن، نەخشەیەك بنووسە کە تێچوونی چاکردنەوەی ئۆتومبیلێك بەپێی ژمارەی کاتژمێرکانی چاکردنەوە دیاردەکات.

وێنەی ڕوونکردنەوەیی هەریەك لەم نەخشانە بکێشە.

**7** $y=2x$ **8** $y=2x+5$

**9** $y=1$ **10** $x=2$

هاوکێشەی هەریەك لەم ڕاستەهێڵانە لەسەر شێوەی لاری یەکتربڕین و برگەی صادی بنووسە.

**11** لاریەکەی 2 و بەخاڵی $(-1, 5)$ دابڕوات.

**12** لاریەکەی سفر و بەخاڵی $(-5, 7)$ دابڕوات.

**13** بەدوو خاڵی $(3, 5)$،$(4, -7)$ دابڕوات.

**14** بەڕاستەهێڵی $y=4x+3$ تەریب بێت بەخاڵی $(1, 2)$ دابڕوات.

**15** بەخاڵی $(-5, 9)$ دابڕوات، ئەستوون بێت لەسەر ڕاستەهێڵی $2x+3y=4$

**16** نەخشەکان سارا تەماشای نەخشەی عێراقی کرد کە بەپێوەری $\frac{1}{5000\,000}$ کێشرابوو واتە هەریەك سەنتیمەتر لەسەر نەخشەکە لەسەر زەوی 5000 000 cm دەنوێنێ، سارا لەسەر نەخشەکە دووری نێوان هەولێر و کەرکوکی پێوا کە 8.4cm بوو دووری نێوان ئەم دوو شارە لەسەر زەوی چەندە؟

به ڕوونکردنەوەیی هەریەکە لەم سستەمانە بنوێنە و جۆرەکەی (ئەستەمە یان سنوردارە یان بێ سنوورە) دیاری بکە.

**17** $\begin{cases} x+y=1 \\ x-2y=-8 \end{cases}$ **18** $\begin{cases} 4x+2y=24 \\ 2x-12=-y \end{cases}$

**19** $\begin{cases} \frac{1}{3}x-y=4 \\ 2x-6y=12 \end{cases}$ **20** $\begin{cases} 4x+3y=0 \\ y+\frac{4}{3}x=-7 \end{cases}$

**21** ئەندازە کۆی دوو گۆشەی تەواوکەر 90 پلەیە پێوانەی هەریەکە لەو دوو گۆشەیە چەندن ئەگەر پێوانە یەکێکیان 30 پلەی زیاتربێت لەوی تریان؟

شیکاری ڕوونکردنەوەیی بۆ هەریەك لەم سستەمانە جێبەجێ بکە.

**22** $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ y=x-2 \end{cases}$ **23** $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=3 \end{cases}$

هەریەکە لەم هاوکێشانە شیکاربکە.

**24** $|3x+1|=4$ **25** $|5x-7|=7$

**26** $\left|\frac{1}{2}x-4\right|=3$ **27** $|x-5|=2$

هەریەکە لەم لاسەنگانە شیکاربکە.

**28** $|5x+3|\geq -2$ **29** $|2x+13|\leq -3$

**30** $\left|\frac{3}{5}x+6\right|\geq 9$ **31** $\left|\frac{3}{2}x+8\right|<3$

جێگۆڕکێ ئەندازەیی کە وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی بنەڕەتی $y=|x|$ دەگۆڕێت بۆ وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە دیاربکە.

**32** $y=|x-3|$ **33** $y=|x+5|$

**34** $y=|x|+2$ **35** $y=|x|-3$

به ڕوونکردنەوەیی ئەمانە شیکار بکە.

**36** $|x-5|+3=0$

**37** $|x+4|=5$

**38** $|x+13|\leq -3$

# 2

# تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

**1** هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە کامەیە کە بەدوو خاڵی $(3, 8)$ $(-1, -4)$ دا دەڕوات؟

أ $y=\frac{1}{2}x+7$ ب $y=-\frac{1}{3}x+9$

ج $y=3x-1$ د $y=-3x-7$

**2** هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی ئەستوونە لەسەر ڕاستەهێڵی $y=5x-3$ و بەخاڵی $(10, 3)$ دا دەڕوات کامەیە.

أ $y=-\frac{1}{5}x+5$ ب $y=-\frac{1}{5}x-3$

ج $y=-5x-3$ د $y=-5x-5$

**3** کام لەمانەی خوارەوە وەسفی جێگۆڕکێ لەوێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی بەهای ڕووت دەکات بۆ وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە $f(x)=-|x-2|$ .

أ ڕاکێشانی ئاسۆیی بەمەودای 2 بۆ لای ڕاست و بەوێنە دانەوە بەدەوری تەوەرەی صادەکاندا.

ب ڕاکێشانی ئاسۆیی بەماوەی 2 بۆ لای ڕاست پاشان وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری $x$.

ج ڕاکێشانی ئاسۆیی بەماوەی 2 بۆ لای چەپ پاشان وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری $y$.

د ڕاکێشانی ئاسۆیی بەماوەی 2 بۆ لای چەپ پاشان وێنەدانەوە بەدەوری تەوەری $x$ .

**4** نموونەیەك بهێنەوە بۆ پەیوەندییەك نەخشە پێك نەهێنێت، وەباسی بکە لەبەرچی؟

**5** کام لەم نەخشانە نەخشەی هێڵی نین؟

أ $y=-\frac{2}{3}x+\frac{11}{3}$ ب $y=\frac{3-4x}{7}$

ج $y=\frac{7}{3-4x}$ د $y=3-x$

**6** کام لەمانەی خوارەوە لاری و یەکتربڕینی لەگەڵ تەوەری $y$ دیاریدەکەن بۆ ڕاستەهێڵی $2x+3y=2$

أ $-\frac{2}{3};\ \frac{2}{3}$ ب $\frac{2}{3};\ -\frac{2}{3}$

ج $-2;\ 2$ د $2;\ -2$

**7** لاری ئەو ڕاستەهێڵەی بە دووخاڵی $(2,-1)$ $(-5, 0)$ دا دەڕوات کامەیە؟

أ $-7$ ب $-3$

ج $\frac{1}{7}$ د $-\frac{1}{7}$

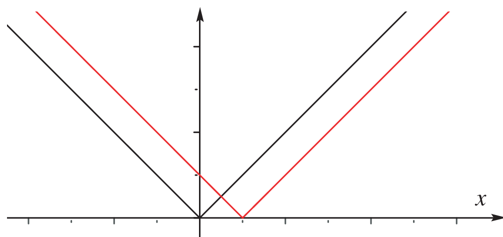
**8** کام لەمانەی خوارەوە ڕاستەهێڵێکە کە تەوەری $y$ نابڕێت

أ $y=4$ ب $x=-4$

ج $x+y=2$ د $y=3x$

**9** هاوکێشەی $|2+3x|=14$ شیکاربکە.

**10** هاوکێشەی ئەو نەخشەیە کامەیە لەوێنە ڕوونکراوەیی بەسوورەکە نوێنراوە.




**11** لاسەنگەی $|2+3x|\geq 14$ شیکاربکە.

**12** کام لەم ڕاستەهێڵانەی خوارەوە تەریبە بە ڕاستەهێڵی $y=-2x-3$

أ $y=-2x+2$ ب $y=2x-2$

ج $y=2x+2$ د $y=-0.5x-2$

**13** ئەو هاوکێشەی بنووسە کە بەدووخاڵی $(-3, 6)$ $(-5, 8)$ دا دەڕوات.

**14** خاڵی یەکتربڕینی ڕاستەهێڵی $3x-5y=2$ لەگەڵ تەوەری $y$ کامەیە؟ بیدۆزەرەوە.

**15** لاری ڕاستەهێڵی $3x-5y=2$ دیاریبکەو وێنەکەی بکێشە.

**16** مەودای نەخشەی $f(x)=-\left(\frac{x}{3}\right)^2$ کامەیە؟

**17** ئایا سستەمی هێڵی $\begin{cases}3y=4x-1\\ x=\frac{4}{3}y\end{cases}$ سنووردارە یان ستەمە یان بێ سنوورە.

**18** هاوکێشەی ئەو نەخشەیەی پەیدادەبێت لە نەخشەی $y=|x|$ بە ڕاکێشانێکی ستوونی بۆ سەرەوە بەمەودای 2 بنووسە.

## بەشی سێیەم

# بڕەکان و نەخشە دووجاکان

# Quadratric Functions and Terms

1. نەخشە دووجاکان.
2. شیتەڵکردنی بڕە جەبرییە دووجاکان.
3. شیکارکردنی نەخشەی دووجا بەڕێگای تەواوکردنی دووجا.
4. شیکارکردنی نەخشەی دووجا بە یاسا (دەستوور).
5. لاسەنگە دووجاکان.

پرۆژەی بەشەکە.

پێداچوونەوە.

تاقیکردنەوەی بەش.

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو .

# بڕەکان و نەخشەی دووجاکان

## Quadratic Functions and Terms

کتێبی (الجبر والمقابلة)ی زانای ئسلامی محمد بن موسی الخوارزمی لە کتێبە بەراییەکان بوو کە باسی جەبری دەکرد. جیهان لەو کتێبە ووشەی جەبری بۆ بەجێما کە دواتر لە زۆربەی زمانەکانی جیهان بەکاردەهات لەگەڵ چەند گۆڕانێك لە دەربڕین. خوارزمی ووشەی «الجبر»ی بەکارهێنا لە مامەڵەکردن لەگەڵ هاوکێشەکان بە مەبەستی شیکارکردنیان. جەبری هاوکێشە بە پێی خوارزمی واتا زیادکردنی ژمارەیەك بۆ هەردوو لای هاوکێشەکە بۆ ئازادکردنی لە نەزانراو و دیاری کردنی بەهاکەی. خوارزمی پشتی بەزانستی جەبر بەست بۆ ئەنجامدانی لێکۆڵینەوەی زانستی لە بوارەکانی جوگرافیاو گەردوون زانی.

## بەشی 3

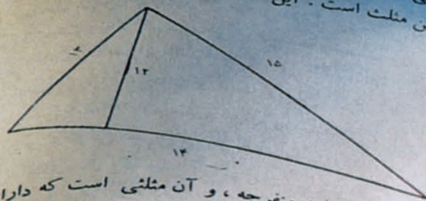
**وانەکان**

1. نەخشە دووجاکان.
2. شیتەڵکردنی بڕە جەبرییە دووجاکان.
3. شیکارکردنی نەخشەی دووجا بەڕێگای تەواوکردنی دووجا.
4. شیکارکردنی نەخشەی دووجا بە یاسا (دەستوور).
5. لاسەنگە دووجاکان.

پڕۆژەی بەش.

ئەستەرلاب سەرەتاییترین ئامێربوو کە زاناکان بۆ لێکۆڵینەوەی شوێنی ئەستێرەکان بەکاریان هێنا.

چەند لاپەڕەیەك لە كتێبی خوارزمی دەربارەی جەبر.



## دەربارەی پڕۆژەی بەش

بێ گومان زۆر نموونەت دیوە نەخشەی دووجای تێدا بەكارهێنراوە، بۆ دروست كردنی نموونەیەكی بیركاری بە مەبەستی لێكۆڵینەوە لە بارێكی ژیانی ڕۆژانەمان. لەم بەشە پەیوەندی نێوان نەخشەی دووجاو جیاوازی نیوان ژمارەیەك و دواییەكەی لە شێوازی ژمارەیت بۆ ڕووندەبێتەوە.

دوای تەواوكردنت بۆ بەشەكە توانات دەبێت لەسەر بەكارهێنانی:

- بەكارهێنانی ڕێگەی جیاوازی دواهاتوو بۆ دیاریكردنی ڕێسای نەخشەكە.



وانەی 1

# نەخشە دووجاکان Quadratic Functions




**ئامانجەکان**

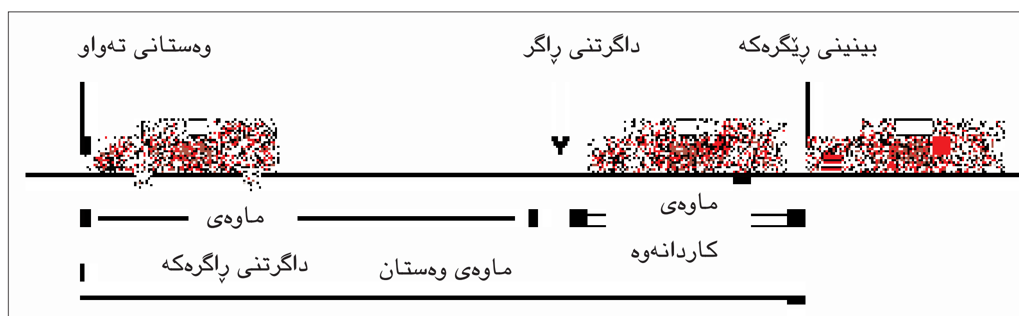
- ناسینەوەی نەخشە دووجای $f(x)=ax^2+bx+c$ ونواندنی بەڕوونکردنەوەیی.
- وێنە ڕوونکردنەوەی نەخشە دووجاکان دەنوێنێت و ناوی (بڕگەی هاوتا) بەکار دەهێنێت بۆ هێڵکاری ڕوونکردنەوەییەکەی.
- سەری بڕگە هاوتاو تەوەرەکەی دەناسێت.
- ڕوو لە زیادبوون و ڕوو لەکەمبوونی نەخشە دیاری دەکات بەڕوونکردنەوەیی.
- باری کراوەیی بڕگە هاوتا دیاریدەکات بەپێی نیشانەی هاوکۆلکەی a

**جێبەجێکردنەکان**

فیزیا

## برە جەبرییە دووجاکان Quadratic Algebraic Expressions

ئەو دوورییەی کە ئۆتۆمبیلێك دەیخایەنێت لە کاتی تێبینیکردنی شوفێرەکەی بۆڕێگرێك تاوەستانی بە تەواوەتی لە دوو دووری پێکدێت وەك لەم وێنەیەدا دیارە:




دەتوانین ماوەی پێویست بۆ وەستانی ئوتۆمبیلەکە بەم برە جەبریە دەربڕین $d(x)=\frac{1}{5}x+\frac{1}{160}x^2$ ، کاتێك $x$ خێرایی ئۆتۆمبیلەکە بە km/h ،
$d(x)$دووری وەستانی تەواوبێت بەمەتر، برِی $d(x)$ پێکدێت لە کۆی ڕادەی $\frac{1}{5}x$ کە دووری کاردانەوەکە و ڕادەی $\frac{1}{160}x^2$ دووری شیلانی ڕاگرەکە دەنوێنێت.
ئەگەر خشتەیەکت دروستکرد بۆ بەهای $d(x)$ بە بەکارهێنانی بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی، سەرنجی ئەوە دەدەیت کە دووری پێویست بۆ وەستانی تەواو25m کاتێك خێرایی 50km/h و 82m ، کاتێك خێرایی 100km/hبەو پێیە دووری تەواوی پێویست بۆ ڕاوەستان سێ ئەوەندە زیادی کرد کاتێك خێراییەکە دوو ئەوەندە زیاد بکات.

**تەکنەلۆجیا**



بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی

**بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە**

ئایا پەیوەندی نێوان خێرایی $x$ ودووری وەستان $d$ پەیوەندیەکی هێڵییە؟ ڕوونیبکەرەوە.

### Quadratic Expressions بڕە دوجاییەکان

بڕە دووجاییەکان ئەو بڕانەن کە بە شێوەی : $ax^2 + bx + c$ دەنوسرێن کاتێك کە $a$ ، $b$ ، $c$ ژمارەی ڕاستیین و $a \neq 0$ و بە $a$ ، $b$ ، $c$ دەوترێت هاوکۆلکەکانی بڕە دووجاکە.

سادەترین بڕی دووجا $x^2$ . بە شێوەیەکی گشتی ئەگەر بڕێکی هێڵی لە بڕێکی هێڵی تر بدەیت ئەوا بڕێکی دووجات دەستدەکەوێت وەك لەم چالاکییەدا دەبینرێت.

## چالاکی 1

### Quadratic and Linear Expressions بڕە دووجاکان و بڕە هێڵییەکان

1. ئەم خشتەیە تەواو بکە.

| بڕی یەکەم | بڕی دووەم | ئەنجامی لێکدانی هەر دوو بڕەکە |
|---|---|---|
| $2x-2$ | $2x+1$ | $(2x-2)(2x+1)=4x^2-2x-2$ |
| $x+1$ | $x+1$ | |
| $2x$ | $-2x+1$ | |
| $-x+2$ | $0.5x+1$ | |

2. هاوکۆلکەکانی بڕە دووجاکە لەهەر بارێکی پرسیاری پێشوو دیاربیکە.
3. بڕی $(mx+n)$ لە بڕی $(px+q)$ بدە. ئەنجامەکە بە شێوەی بڕێکی دووجا بنووسە، هاوکۆلکەکانی بڕی ئاماژە بە پێی $n$ ، $m$ ، $p$ ، $q$ دیاربیکە.

خاڵی چاودێری ✔

## Quadratic Functions نەخشەی دووجا

لەبەشی پێشوودا نەخشە هێڵییەکان فێربوویت ولەم بەشەدا جۆرێکی نوێ لە نەخشەکان فێردەبیت کە نەخشەی دووجایە، بیرت بێ شێوەی گشتی $f(x)=mx+b$ نەخشەی هێڵییە بە بڕەهێڵ ناسراوە، بەڵام نەخشەی دووجا وەك بڕیکی دووجا دەناسرێت.

### Quadratic Function نەخشەی دووجا

نەخشەی دووجا نەخشەیەکە ڕێساکەی بەهۆی بڕێکی دووجای یەك گۆڕاو دەنووسرێت و بەشێوەی $f(x)=ax^2+bx+c$ کاتێك $a$ و $b$ و $c$ ژمارەی ڕاستین و $a \neq 0$ و بە $a$ و $b$ و $c$ دەوترێت هاوکۆلکەکانی نەخشە دووجاوە.

سادەترین شێوەی نەخشە دووجاکان $f(x)=x^2$ یە، دەتوانرێت هەموو نەخشەیەکی دووجا لەم نەخشەیەوە پێك بهێنرێت بە بەکارهێنانی جێگۆڕکێی سادە یان ئاوێتە بۆیەش بە $f(x)=x^2$ نەخشەی بنەڕەت دادەنرێت بۆ هەموو نەخشە دووجاکان. نەخشەی $d(x)=\frac{1}{5}x+\frac{1}{160}x^2$ نموونەیەکی نەخشە دووجاکانە.

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە
هاوکۆلکەی ڕادەکانی نەخشە دووجاکە کامانەن کە دووری ڕاوەستانی ئۆتومبیلەکە دەنوێنێت؟

## نموونە 1

ڕوونیبکەوە نەخشەی $f(x)=(2x-1)(3x+5)$ نەخشەیەکی دووجایە هاوکۆلکەکانی

**شیکار**

| ڕێگای یەکەم | ڕێگای دووەم |
| --- | --- |
| $f(x)=(2x-1)(3x+5)$ | $f(x)=(2x-1)(3x+5)$ |
| $=2x(3x+5)-(3x+5)$ | $=(2x-1)3x+(2x-1)5$ |
| $=6x^2+10x-3x-5$ | $=6x^2-3x+10x-5$ |
| $=6x^2+7x-5$ | $=6x^2+7x-5$ |

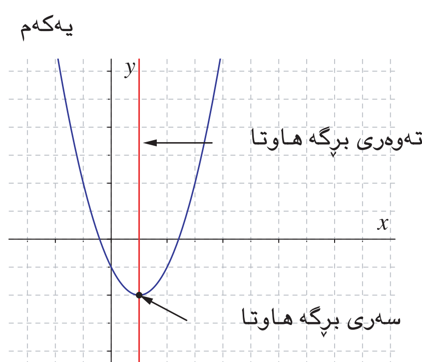
لەبەر ئەوەی $f(x)=6x^2+7x-5$ نەخشەیەکی دووجایە وهاوکۆلکەکانی بریتین لە
$a=6$ ، $b=7$ ، $c=-5$

**هەوڵ بدە** ڕوونیبکەوە کە $f(x)=(2x-5)(x-2)$ نەخشەیەکی دووجایەو هاوکۆلکەکانی ڕادەکانی دیاریبکە.

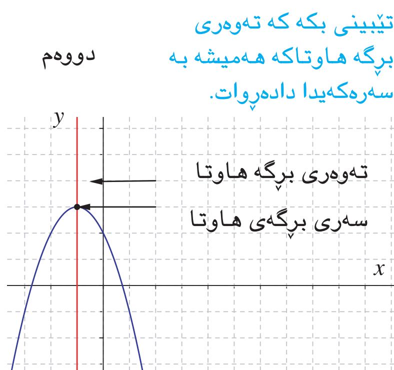
وێنەی ڕونکردنەوەیی نەخشەی دووجا ناوێکی تایبەتی هەیە کە **برگە هاوتایە** ***Parabola***
ئەم وێنانە دوو جۆری جیاواز لە برگەی هاوتا پیشان دەدات.

تێبینی بکە کە تەوەری برگە هاوتاکە هەمیشە بە سەرەکەیدا دادەڕوات.

یەکەم




دووەم




تێبینی ئەوە بکە برگەی هاوتا خاڵێکی ناسراوی هەیە کە پێی دەوترێت سەر و تەوەرەیەکی هاوجێبوونی هەیە. کە برگەکە دەکات بە دوو بەشی جووتبوو. هەروەها سەری برگەکە لە وێنەکەدا، گەورەترین یان بچووکترین بەهای نەخشەکە دیاریدەکات.
ئەگەر لە نەخشەی دووجای $f(x)=ax^2+bx+c$ وردبیتەوە. بۆت دەردەکەوێت بەهای $f(x)$ بە پێی $x$ هەژمێر دەکرێت. واتا بواری نەخشە دووجاکە کۆمەڵەی هەموو ژمارە ڕاستییەکانە و بەڵام مەوداکەی وەك لە دوو وێنە ڕوونکردنەوەیەکەی سەرەوە دەردەکەوێت بریتییە لەکۆمەڵەی ئەو ژمارە ڕاستییانەی کەمترنین لە بچوکترین بەهای نەخشەکە( جۆری یەکەم) یان ژمارە ڕاستییەکانی بچووکتر لە گەورەترین بەهای نەخشەکە (جۆری دووەم).

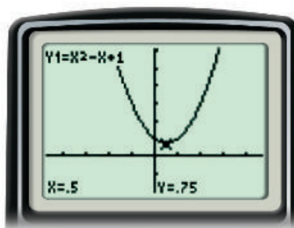
**نموونە** 2

ئایا سەری ئەم نەخشە دووجایە $f(x)=x^2-x+1$ گەورەترین یان بچووکترین بەها دەنوێنێت؟
دەتوانیت بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی یان خشتەی بەهاکان بەکاربهێنێت.

**شیکار**

**ڕێگای یەکەم**

دەتوانیت بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی «ئەگەر هەبێت» بەکاربهێنیت بۆ ئەوەی بۆت دەربکەوێت نەخشەکە بەهای بچووکترینی هەیە.




ئەگەر لە هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە وردبینەوە دەردەکەوێت کە پۆوتانی سەرەکەی $(0.5, 0.75)$

**ڕێگای دووەم**

دەتوانیت بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنیت بۆ دروست کردنی خشتەی بەهاکانی نەخشەکە. لەخشتەکەوە دەردەکەوێت نەخشەکە دەگاتە بچووکترینی بەهاکەی کاتێك $x=0.5$ ، بێت و ئەم بچوکترین بەهایەش دەکاتە $0.75$ .

| X | Y1 |
|---|---|
| -2.00 | 7.00 |
| -1.50 | 4.75 |
| -1.00 | 3.00 |
| -.50 | 1.75 |
| 0.00 | 1.00 |
| .50 | .75 |
| 1.00 | 1.00 |

X=.5

لەخشتەکەوە دەردەکەوێت سەری برگە هاوتاکە بریتییە لە خاڵی $(0.5, 0.75)$




**هەوڵ بدە**

ئایا سەری نەخشە دووجای $f(x)=-2x^2-4x+1$ گەورەترین یان بچووکترین بەها دەنوێنێت؟

**بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە**

ئایا دەتوانیت هاوکێشەی تەوەری هاوجێبوونی نەخشەی دووجای $f(x)=x^2-x+1$ دیاری بکەیت ئەگەر زانیت کە $f(0)=f(1)$ ؟

دەتوانیت بە سەرنجدان لە نیشانەی هاوکۆلکەی $a$ ،بزانیت کە نەخشە دووجای $f(x)=ax^2+bx+c$ بەهای گەورەترین یان بچووکترین هەیە.

**بەهای گەورەترین یان بچووکترین؟ Maximum and Minimum values**

- ڕوونکردنەوەیی نەخشە دووجای $f(x)=ax^2+bx+c$ کاتێك $a$ و $b$ و $c$ ژمارەی ڕاستی بن و $a \neq 0$ بریتییە لە برگەی هاوتا.
- ئەگەر $a$ هاوکۆلکەی $x^2$ موجەب بێت ئەوا برگە هاوتاکە کراوەیە بەرەوە سەرەوە. و سەرەکەی نزمترین خاڵی برگەکەیە وبەهای $y$ تیایدا بچووکترین بەهای نەخشەکەیە.
- ئەگەر $a$ هاوکۆلکەی $x^2$ سالب بێت ئەوا برگە هاوتاکە کراوەیە بەرەوە خوارەوە. و سەرەکەی بەرزترین خاڵی برگەکەیە وبەهای $y$ تیایدا گەورەترین بەهای نەخشەکەیە.
- بەهای $y$ ی سەری برگە هاوتاکە دەبێتە ئەوپەڕی بەهای نەخشەکە، بەهای ئەوپەڕییەکە دەبێتە گەورەترین یان بچووکترین بەها.

**نموونە** 3

ئەم برگە هاوتایانە بەرەو سەرەوە یان خوارەوە کراوەن. ئایا سەرەکەشی گەورەترین یان بچووکترین بەها دەنوێنێت؟

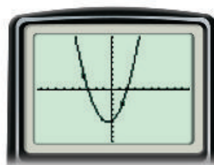
أ $f(x)=x^2+x-6$

ب $f(x)=5+4x-x^2$

### شیكار

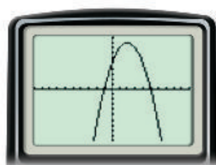
أ  هاوكۆلكەی $x^2$ لەنەخشەی
$f(x)=x^2+x-6$ موجەبە بۆیە برگە
هاوتاكە كراوەیە بۆ سەرەوەی نەخشەكە و
بچووكترین بەهای هەیە لە سەرەكەیدا.

پاسەدان بكە



ب  هاوكۆلكەی $x^2$ لە نەخشەی
$f(x)=5+4x-x^2$ سالبە $-1$ بۆیە برگە
هاوتاكە كراوەیە بۆ خوارەوەی نەخشەكە و
گەورەترین بەهای هەیە لە سەرەكەیدا.

پاسەدان بكە



## چالاكی 2

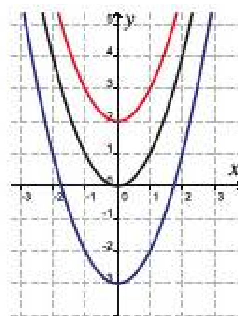
### جێگۆڕكێی نەخشە دووجای بنەڕەتی $x^2$ Transforming Quadratic Base Function

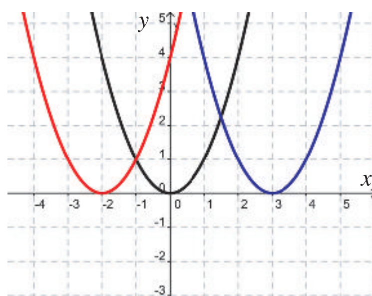
پێویستیت بە پەڕەی ڕوونكردنەوەیی یان بژمێری ڕوونكردنەوەیی دەبێت.

1. خشتەی بەهاكان دروست بكە، پاشان هێڵكاری ڕوونكردنەوەیی ئەم نەخشانە بكێشە.
$y=x^2$ $\quad y=x^2+1$ $\quad y=x^2-1$
2. چ گۆڕانێك بەسەر هێڵكاری نەخشەی بنەڕەتی دێت، ئەگەر 1 مان زیاد یان كەمكرد لە نەخشەكە؟
3. خشتەی بەهاكان دروست بكە،پاشان هێڵكاری ڕوونكردنەوەیی ئەم نەخشانە بكێشە.
$y=x^2$ $\quad y=(x+2)^2$ $\quad y=(x-2)^2$
4. چ گۆڕانێك بەسەر هێڵكاری نەخشەی بنەڕەتی دادێت،ئەگەر 2 مان زیاد یان كەمكرد بۆ گۆڕاوە سەربەستەكە؟
5. خشتەی بەهاكان دروست بكە، پاشان هێڵكاری ڕوونكردنەوەیی ئەم نەخشانە بكێشە
$y=x^2$ $\quad y=(x-2)^2+1$ $\quad y=(x-2)^2-1$ $\quad y=(x+2)^2+1$
6. چ گۆڕانێك بەسەر هێڵكاری نەخشەی بنەڕەتی دادێت كاتێك 2 لە $x$ كەمبكرێت و 1 بۆ نەخشەكە زیادبكرێت؟ زیاد كردنی 2 بۆ $x$ و كەمكردنی 1 لەنەخشەكە.

خاڵی چاودێری ✔

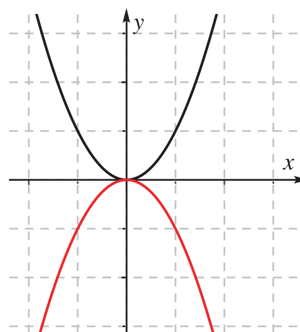
خاڵی چاودێری ✔



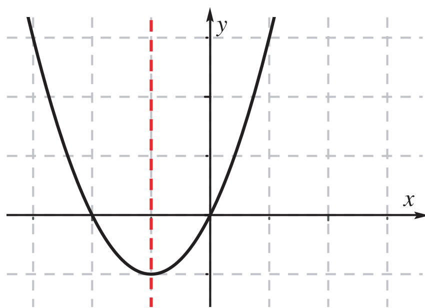


هەریەك لە دوونەخشەی $y=x^2+2$ و $y=x^2-3$ كشانەوەیەكی ستوونی **Vertical** هێڵی ڕوونكردنەوەیی نەخشەی بنەڕەتی $y=x^2$ دەنوێنن كە لە زیادكردنی یان كەمكردنی ژمارەیەك بۆ نەخشەكە دروست بوون. بەمەش هێڵە ڕوونكردنەوەییەكە بەرەو **سەرەوە** یان بەرەو **خوارەوە** دەكشێت.

هەر یەك لە دوونەخشەی $y=(x+2)^2$ و $y=(x-3)^2$ كشانەوەیەكی ئاسۆیی **Horizontal** هێڵی ڕوونكردنەوەیی نەخشەی بنەڕەتی $y=x^2$ دەنوێنێت، كە لە زیادكردنی یان كەمكردنی ژمارەیەك بۆ گۆڕاوە سەربەستەكە دروستبوون. بەمەش هێڵە ڕوونكردنەوەییەكە ئاسۆیی بەرەو لای **ڕاست** یان **چەپ** دەكشێت.




هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=-x^2$ وێنەدانەوەی هێڵکاری نەخشەی بنەڕەتییە بە دەوری تەوەرەی سینی بەڵام سەری برگە هاوتای نەخشەی بنەڕەت بچووکترین بەهای دەنوێنێت و هەمان سەر گەورەترین بەهای نەخشەی $y=-x^2$ یە.




ئەو ڕاستەهێڵە ستوونییەکەی کەبەسەری برگە هاوتاکەدا دەڕوات تەوەرەی هاوجێبونی وێنە ڕوونکردنەوەیەکەیە، لەبەر ئەوەی ئەو ڕاستەهێڵە برگە هاوتاکە دەکات بە دوو بەشی جووتبوو بە ڕاستەهێڵەکەش دەوترێت تەوەرەی برگە هاوتاکە **Axis of Parabola**.

# ڕاهێنان

## بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

**1** جیاوازی نێوان هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی هێڵە نەخشە و هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی دووجا ڕوونبکەرەوە.

**2** جیاوازی نێوان بڕی جەبری هێڵە نەخشە وبڕی جەبری نەخشەی دووجا ڕوونبکەرەوە.

**3** چۆن دەزانیت سەری برگە هاوتا بەهاکەی گەورەترین یان بچووکترینی نەخشەی دووجایە؟

**4** پەیوەندی چییە لە نێوان هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی بنەڕەتی وهێڵکاری ڕوونکردنەوەیی $y=x^2-8$.

**5** پەیوەندی چییە لە نێوان هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی بنەڕەتی وهێڵکاری ڕوونکردنەوەیی $y=(x-8)^2$.

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

**ڕوونبیکەوە ئەم نەخشانە، نەخشەی دووجان، هاوکۆلکەکانیان دیاریبکە.**

**6** $f(x)=(x+1)(x-7)$

**7** $f(x)=(x+2)(x+5)$

**8** $f(x)=(2x+5)(3x+1)$

**گەورەترین یان بچووکترین بەها؟** وەڵامی پرسیارەکانی 9 تا 14 بدەوە؟

أ ئایا ئەم برگە هاوتایە کراوەیە بۆ سەرەوە یان بۆ خوارەوە؟

ب ئایا بەهای ئەو پەڕی ئەم نەخشانە، گەورەترینە یان بچووکترینە؟

**9** $f(x)=x^2-3x+5$

**10** $f(x)=2-3x-x^2$

**11** $f(x)=x^2+5x+3$

**12** $f(x)=x^2-2x+7$

**13** $f(x)=-x^2+8x+14$

**14** $f(x)=-2x^2-5x+1$

## ڕاهێنان وجێبەجێکردن

ڕوونیبکەوە ئەم نەخشانە دووجان، هاوکۆلکەی ڕادەکانیش دیاریبکە.

**15** $f(x)=(x-3)(x+8)$ **16** $f(x)=(4-x)(7+x)$

**17** $f(x)=-(x-2)(x-6)$ **18** $f(x)=(2x+3)(4-x)$

**19** $f(x)=x(x-3)$ **20** $f(x)=(x-6)(x+6)$

ئایا ئەم نەخشانە دووجان یان نا؟ ڕوونیبکەوە؟

**21** $y=3-x^2$ **22** $y=3-x$

**23** $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}$ **24** $y=\frac{2x^2+5}{x+3}$

**25** $y=x^2-x^2(x+7)$ **26** $y=|x^2+5x-2|$

ئەم برگە هاوتایانە بەرەوە سەرەوە یان بەرەو خوارەوە کراوەن. بەهای ئەوپەڕی نەخشەکە بچووکترینە یان گەورەترینە؟

**27** $y=2x^2-2x$ **28** $y=-8x^2-x$

**29** $y=3-x^2$ **30** $y=4-x^2-2x$

هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە و بەنزیکەیی بەهای پۆوتانی سەری برگە هاوتاکان دیاریبکە.

**31** $y=x^2-x+9$ **32** $y=-x^2-2x+9$

**33** $y=4x^2-2x-2$ **34** $y=-0.5(x+4)^2$

**35** $y=(x-2)^2-1$ **36** $y=-(x-2)(x+6)$

چۆن هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی بنەڕەتی دەگۆڕێت بۆ هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە.

**37** $y=(x-2)^2+3$ **38** $y=(x-5)^2-2$

**39** $y=-(x-2)^2+1$ **40** $y=-(x+6)^2-2$

**41** $y=-(x-3)^2-2$ **42** $y=(x+4)^2-7$

**43** بە چ ڕێگایەك پۆوتانی سەری برگە هاوتای $y=(x+a)(x-a)$ دیاریدەکەیت؟ڕوونیبکەوە.

**44** جیگۆڕکێ هێڵکاری ڕوونکردنەوەییە ئەم نەخشانە بکێشە پاشان وەڵامی پرسیارەکان بدەوە.

أ $y=(x+2)(x-4)$ ب $y=2(x+2)(x-4)$

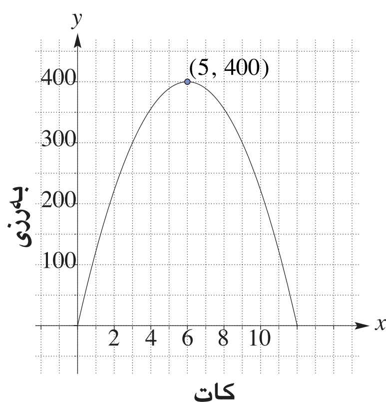
ج $y=\frac{1}{2}(x+2)(x-4)$ د $y=-(x+2)(x-4)$

ھ $y=-2(x+2)(x-4)$ و $y=-\frac{1}{2}(x+2)(x-4)$

- ئەو شەش هێڵکاریە ڕوونکردنەوەیی لە چی هاوبەشن؟
- کامیان کراوەیە بەرەو خوارەوە؟
- کامیان کراوەیە بەرەو سەرەوە؟



**45** **فیزیا** ئەو هێڵە ڕوونکردنەوەییەی بەرامبەر پەیوەندی نێوان کات بە چرکە وبەرزی گوللە تۆپێك بە مەتر کە بۆ سەرەوە هەڵدراوە دیاریدەکات. گەورەترین بەرزی کە گوللە تۆپەکە دەیگاتێ چەندە؟




**46** بە چەند چرکە دەگاتە گەورەترین بەرزی؟ تەوەری هێڵکاریە ڕوونکردنەوەیەکە دیاریبکە؟

**47** **فیزیا** جوامێر تیرێکی بۆ سەرەوە بە خێرایی 40 مەتر لە چرکەیەك هاویشت، بەرزی تیرەکە دوای 5 چرکە چەندە بە بەکارهێنانی نەخشەی $y = 40x - 5x^2$ کاتێك کە $x$ کات بێت بە چرکە و $y$ بەرزی بێت بە مەتر، وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەش لە دە نزیکبکەوە.

## ڕوانینێك بۆ دواوە

برِی $2(x-3)^2 + 1$ لێکدان وکرداری لێدەرکردن لە ناوکەوانەکە وبەرزکردنەوەی بۆ توانی 2 و کرداری کۆکردنەوەی تێدایە.

**48** کام لەم کردارانە پێشتر ئەنجام دەدەین؟

**49** دووەم کردار چی ئەنجام دەدەین؟

**50** سێیەم کردار چی ئەنجام دەدەین؟

ئەمانە شیکاربکە.

**51** $\begin{cases} 3y + 2x = 2 \\ y = x \end{cases}$

**52** $\begin{cases} y = 4 \\ 3y = 2x \end{cases}$

**53** ئەو ژمارە دوو ڕەنووسە کامەیە کە دووی لە سێ ئەوەندەی سەرجەمی هەردوو ڕەنووسەکەی زیاترە، ڕەنووسی دەیانی 4 لە ڕەنووسی یەکانی کەمترە؟

## ڕوانینێك بۆ پێشەوە

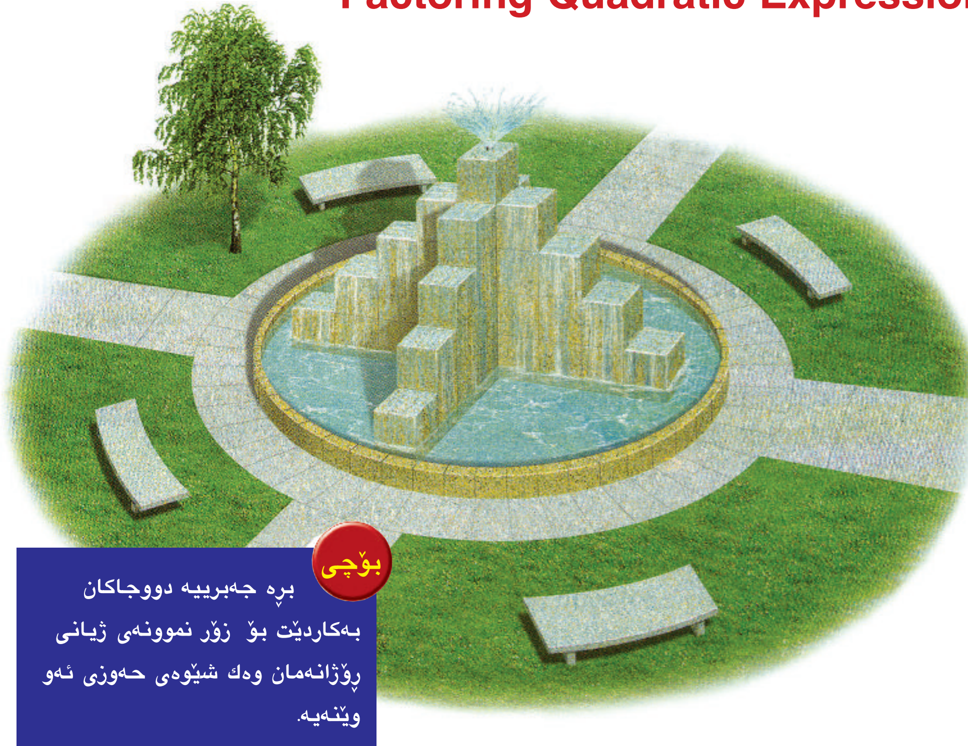
جێبەجێکردنەکان

**54** لە ڕووتەختی پۆوتانەکاندا هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە بکێشە $y = x^2 - 3x + 5$ و $y = x^2 + 7x + 6$ و $y = x^2 - 14x + 49$ خاڵە هاوبەشەکانی نێوان برِگە هاوتاکان و تەوەری سینی دیاریبکە؟

وانەی
2

# شیتەڵکردنی بڕە جەبرییە دووجاکان

## Factoring Quadratic Expressions



**بۆچی**

بڕە جەبرییە دووجاکان بەکاردێت بۆ زۆر نموونەی ژیانی ڕۆژانەمان وەک شێوەی حەوزی ئەو وێنەیە

**ئامانجەکان**

- بڕە جەبرییە دووجاکان شیتەڵدەکات.
- شیتەڵکردن بەکاردەهێنێت بۆ شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا و دۆزینەوەی سفرەکانی نەخشەی دووجا.

**جێبەجێکردنەکان**

ئەندازەی تەلارسازی

ئەندازیارێکی تەلارسازی حەوزێکی لە باخچەیەکی گشتیدا دروستکرد، وەک وێنەی سەرەوە لەناویدا چەند خشتەکێکی هاوشێوەی لەسەر شێوە هێمای X ڕیز کرد بە چەند ئاستێکی جیاواز، بە جۆرێك کە ژمارەی خشتەکانی هەر باڵێکی شێوە هێماکەیەکی کەمتربێت لەوەی ژێر خۆی. ڕێسای $m = 2n^2 - n$ هەژمێری ژماری خشتەکانی $n$ مان بۆدەکات بۆ دروستکردنی حەوزێك لە $n$ ئاستدا. ژمارەی ئاستەکانی ناو حەوزێك چەندە کە 66 خشتەکی تیا بێت.

## شیتەڵکردنی بڕە جەبرییە دووجاکان Factoring Quadratic Expressions

کاتێك فێری لێکدانی دوو بڕی جەبری وەك $2x$ و $x+3$ بویت ، ئەنجامی لێکدانەکەت گۆڕی بۆ سەرجەمی کۆمەڵێك ڕادە. شیتەڵکردن کرداری پێچەوانەی لێکدانە، واتە دەتوانیت سەرجەمی کۆمەڵێك ڕادە بگۆڕیت بۆ ئەنجامی لێکدان.

لێکدان

$3x^2 + 6x = 3x(x+2)$

شیتەڵ

بۆ شیتەڵکردنی بڕێکی دوو ڕادەیی یان زیاتر، گەورەترین کۆلکەی هاوبەش ( گ.ك.هـ)دەربێنە (ئەگەر هەبوو) بۆ دوو ڕادەکە وەك لەم نموونانەدا دەیبینیت.

**نموونە** 1

ئەم بڕە دووجایانە شیتەڵبکە.

أ $3m^2 - 12m$

ب $3x(4x+5) - 5(4x+5)$

**شیکار**

گەورەترین کۆلکەی هاوبەش دەربێنە:

أ $3m^2 - 12m = 3m \times (m) - 3m \times (4)$

گ. ك. هـ. بریتیە لە $3m$

$= 3m(m-4)$

ب گەورەترین کۆلکەی هاوبەش بریتیە لە $(4x+5)$

$3x(4x+5) - 5(4x+5) = (3x-5)(4x+5)$

**هەوڵبدە** ئەم دوو بڕە شیتەڵبکە $5x^2 + 15x$ و $x(2x-1) + 4(2x-1)$

## شێوەی گشتی برێکی دووجا بریتییە لە $ax^2+bx+c$ کاتێک $a\neq 0$

دەتوانیت زۆر لە برە جەبرییە دووجاکان شیتەڵبکەیت. سەرنجی شیتەڵکردنی ئەم برانەی خوارەوە بدە کاتێک $a=1$

**شیکاری پرسیار** **بگەڕێ بەدوای شێوازێك** سەیری شێوەی شیتەڵکردنی ئەم برە دووجایانە بکە، سەرنج بدە کە کۆی دوو رادە نەگۆڕەکە لە کۆلکەکاندا یەکسانە بە هاوکۆلکەی $x$ لەو برە دووجایەدا پێش شیتەڵکردن و ئەنجامی لێکدانیان یەکسانە بە رادە نەگۆڕەکە.

$x^2+7x+10=(x+5)(x+2)$

5+2=7 | 5×(2)=10

$x^2-7x+10=(x-5)(x-2)$

(-5)+(-2)=-7 | (-5)×(-2)=10

$x^2+3x-10=(x+5)(x-2)$

5+(-2)=3 | 5×(-2)=-10

$x^2-3x-10=(x-5)(x+2)$

(-5)+2=-3 | (-5)×(2)=-10

سەرنجدان لەو شێوازانەی پێشوو وا دەکات رێسایەکمان بۆ شیتەڵکردنی بڕی $x^2+bx+c$ دەستدەکەوێت.

بۆ شیتەڵکردنی بڕی $x^2+bx+c$ کاتێك $b$ و $c$ دوو ژمارەی تەواوبن، بگەڕێ بۆ دوو ژمارە $r$ و $s$ کەسەرجەمیان $b$ بێت و لێکدانیان $c$ بێت پاشان برەکە بەم شێوەیە شیتەڵبکە.

$$x^2+bx+c=(x+r)(x+s)$$

کاتێك $c$ ژمارەیەکی موجەب بێت، بۆ ئەنجامی لێکدانی دوو ژمارە شیتەڵبکە کە هەمان نیشانەیان هەبێت.

**نموونە** 2

برِی $x^2+5x+6$ شیتەڵبکە.

**شیکار**

**بخەملێنە وساغبکەوە** دەست بە نووسینی $(x\quad)(x\quad)$ بکە. بگەڕێ بە دوای دوو هاوکۆلکەی ژمارە 6 هەمان نیشانەیان هەبێت وسەرجەمیان 5 بێت.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(x+1)(x+6)$ | $(x+2)(x+3)$ | $(x-1)(x-6)$ | $(x-2)(x-3)$ |
| $1\times x+6x$ | $2x+3x$ | $(-1)x+(-6)x$ | $(-2)x+(-3)x$ |
| $\overset{?}{=}$ | $\overset{?}{=}$ | $\overset{?}{=}$ | $\overset{?}{=}$ |
| $7x$ | $5x$ | $-7x$ | $-5x$ |
| هەڵەیە | راستە | هەڵەیە | هەڵەیە |

کەواتە، $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

**هەوڵبدە** برِی $x^2-10x-11$ شیتەڵبکە.

کاتێك $c$ ژمارەیەکی سالب بێت لە $x^2+bx+c$ .بەدوای دوو کۆلکەی جیاواز لە نیشانەدا بگەڕێ.

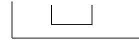
## نموونە 3

بڕی $x^2-7x-30$ شیتەڵبکە.

شیکار

بخەملێنە وپاسەدان بکە. دەست بە نووسینی ( $x$ )( $x$ ) بکە. بگەڕێ بەدوای دوو هاوکۆلکە لەهاوکۆلکەکانی ژمارە (−30) بگەڕێ کە سەرجەمیان بکاتە−7 ئاگاداربە دوو هاوکۆلکەکە لەنیشانە جیاواز بن.

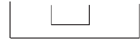
$(x-1)\,(x+30)$



$(-1)x+30x \overset{?}{=} 29x$

هەڵەیە

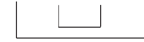
$(x+1)\,(x-30)$



$1\times x+(-30)x \overset{?}{=} -29x$

هەڵەیە

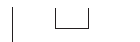
$(x-2)\,(x+15)$



$(-2)x+15\times x \overset{?}{=} 13x$

هەڵەیە

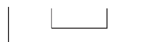
$(x+2)(x-15)$



$2x+(-15)\times x \overset{?}{=} -13x$

هەڵەیە

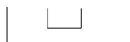
$(x-3)+(x+10)$



$(-3)x+10\times x \overset{?}{=} 7x$

هەڵەیە

$(x+3)(x-10)$



$3\times x+(-10)\times x \overset{?}{=} -7x$

ڕاستە

کەواتە ، $x^2-7x-30=(x+3)(x-10)$

**هەوڵبدە** بڕی $3x^2+11x-20$ شیتەڵبکە.

لە لێکدانی دوو بڕی $x+3$ و $x-3$ ووردببەوە.

جیاوازی دوو دووجا

$$(x+3)(x-3)=x^2+3x-3x-9=x^2-9=x^2-3^2$$

### شیتەڵکردن بە جیاوازی نێوان دوو دووجا

**Factoring The Difference Of Two Squares**

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

لە ئەنجامی دووجای $x+3$ و $x-3$ بپشکنە

$$(x+3)^2=(x+3)(x+3)$$
$$=x^2+3x+3x+9$$
$$=x^2+2\times 3\times x+3^2$$
$$=x^2+6x+9$$

$$(x-3)^2=(x-3)(x-3)$$
$$=x^2-3x-3x+9$$
$$=x^2-2\times 3\times x+3^2$$
$$=x^2-6x+9$$

دووجای تەواو

### شیتەڵکردن بە دووجای تەواو

**Factoring Perfect Squares**

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

نمـــونـــه 4

ئەم برانە شیتەڵبکە

أ $x^4-16$

ب $4x^2-24x+36$

شیکار

أ $x^4-16=(x^2+4)(x^2-4)$
$=(x^2+4)(x+2)(x-2)$

ب $4x^2-24x+36=4(x^2-6x+9)$
$=4\left[x^2-2\,(3)x+3^2\right]$
$=4(x-3)^2$

هەوڵبدە ئەم برانە شیتەڵبکە $9x^2-49$ و $3x^2-6x+3$

## شیکارکردنی هاوکێشە دووجاکان بە بەکارهێنانی شیتەڵکردن Using Factoring to Solve Quadratic Equations

هەندێك جار دەتوانیت شیتەڵکردن بەکاربهێنین بۆ شیکارکردنی هاوکێشە یان بۆ دۆزینەوەی سفرەکانی نەخشەکە..سفری نەخشەی $f(x)$ بریتییە لە هەر ژمارەیەکی وەك $r$ کە پاسەدانی $f(r)=0$ بکات.

**سیفەتی لێکدانی سفری Zero Product Property**

ئەگەر $p\times q=0$ ئەوا $p=0$ یان $q=0$

**شێوەی گشتی هاوکێشەی** دووجا بەم شێوەیە دەنووسرێت $ax^2+bx+c=0$ ئەگەر توانیت بڕی $ax^2+bx+c$ شیتەڵ بکەیت، ئەوا بە جێبەجێکردنی سیفەتی سفری دەتوانیت هاوکێشەکە شیکار بکەیت **چۆن لێکدانی سفر جێبەجێ دەکەیت**؟ بڕەکە شیتەڵبکە وئەنجامی لێکدانیان یەکسان بکە بە سفر.

نمـــونـــه 5

هاوکێشەی $x^2+6x=-5$ شیکاربکە.

شیکار

هاوکێشەکە بە شێوەی گشتی بنووسە $x^2+6x+5=0$ لەسەرەتادا بڕی $x^2+6x+5$ شیتەڵبکە، دەستدەکەوێت $x^2+6x+5=(x+5)(x+1)$ پاشان $(x+5)(x+1)=0$ یەکسان بکە بە سفر. چۆن ڕەگەکانی هاوکێشەکە $(x+5)(x+1)=0$ دیاری دەکەیت. لە هاوکێشەکەی پێشووەوە دوو هاوکێشەی $(x+5)=0$ یا ن $(x+1)=0$ مان دەست دەکەوێت و ڕەگەکانیان $x=-5$ یان $x=-1$ دەبێت واتە ڕەگەکانی هاوکێشەکە بریتییە لە $-1$ و $-5$ .

نمـــونـــه 6

سیفەتی لێکدانی سفری بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی سفرەکانی نەخشەکە.

أ $f(x)=2x^2-11x$

ب $g(x)=x^2-14x+45$

شیکار

أ $2x^2-11x=0$
$x(2x-11)=0$
$x=0$ یان $2x-11=0$
$x=0$ یان $x=\frac{11}{2}$

ب $x^2-14x+45=0$
$(x-5)(x-9)=0$
$x-5=0$ یان $x-9=0$
$x=5$ یان $x=9$

هەوڵبدە  سیفەتی لێکدانی سفری بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی سفرەکانی نەخشەکە.

أ $f(x)=3x^2+12x$  ب $g(x)=x^2+4x-21$

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە  بیسەلمێنە نەخشەی $f(x)=ax^2+bx$ کاتێك $a\neq 0$ دوو ڕەگی هەیە کە 0 و $-\frac{b}{a}$-یە.

**نموونە**

7 بەگەڕانەوە بۆ نموونەی حەوزەکەی سەرەتای وانەکە، ژمارەی ئاستەکانی حەوزەکە چەندە؟ کاتێك ژمارەی خشتەکەکان 66 بێت.

شیکار

هاوکێشەی $2n^2-n=66$ شیکاربکە بە شیتەڵکردن.

$2n^2-n-66=0$ — هاوکێشەکە بە شێوەی گشتی بنووسە

$(2n+11)(n-6)=0$ — $2n^2-n-66$ شیتەڵبکە

$2n+11=0$ یان $n-6=0$ — سیفەتی لێکدانی سفری بەکاربێنە

$n=-5.5$ یان $n=6$

ژمارەی ئاستەکان = 6 چونکە ژمارەی ئاستەکان تەنها دەبێت ژمارەی تەواوی موجەب بن.

# ڕاهێنان

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 چۆن $b$ و $c$ دەدۆزیتەوە ئەگەر $x^2+34x+285=(x+b)(x+c)$ .

2 چی دەزانی دەربارەی شیتەڵکردنی بڕە دووجای $x^2+bx+c$ کاتێك $c$ موجەب بێت؟ کاتێك $c$ سالب بێت؟ نیشانەی $b$ چ زانیاریەکت پێ دەبەخشیت لەهەر یەکە لەوبارانەدا.

3 ئەگەر لێکدانی $b$ و $c$ سفر بێت $(bc=0)$ چی دەڵێیت سەبارەت بە $b$ و $c$

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

یارمەتی
دەستپێبکە بە دەرهێنانی کۆڵکەی هاوبەش ئەگەر هەبوو.

ئەم بڕە دووجایانە شیتەڵبکە.

4 $2x^2-8x$
5 $2x^2-6x$
6 $5x^2-15x$
7 $4x(x+3)-7(x+3)$
8 $3(4b+7)-2b(4b+7)$
9 $8d(9d-5)+3(9d-5)$
10 $x^2+5x+6$
11 $x^2+8x+7$
12 $x^2-5x+4$
13 $x^2-4x-12$
14 $x^2-9x-36$
15 $x^2+10x-24$
16 $2x^2+9x+10$
17 $3x^2+5x+2$
18 $5x^2+13x-6$
19 $8x^2+24x-14x-42$
20 $12x^2+21x-8x-14$
21 $72x^2-56x-36x+28$
22 $x^2-81$
23 $2x^2-8$
24 $16x^2-25$
25 $x^2+8x+16$

سیفەتی لێکدانی سفری بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی دوو سفری هەر نەخشەیەك.

**26** $f(x)=x^2+7x$ **27** $f(x)=x^2+6x+9$ **28** $f(x)=x^2+3x-10$

**29** **ئەندازە** کەژاڵ بۆ بەیەك گەیاندنی چەند خاڵێك 36 پارچە ڕاستەهێڵی کێشا ژمارەی خاڵەکان چەندن؟ ئەگەر بزانیت گەیاندنی $n$ خاڵ پێویستی بە $\frac{n(n-1)}{2}$ پارچە ڕاستەهێڵ هەیە.

## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ئەم برانە شیتەڵبکە.

**30** $3x+6$ **31** $3x^2+18$

**32** $10n-n^2$ **33** $x-4x^2$

**34** $6x-2x^2$ **35** $3x^2-15x$

**36** $5x(x-2)-3(x-2)$ **37** $(x+3)(2x)+(x+3)\times 7$

ئەم برانە شیتەڵبکە.

**38** $x^2-16x+15$ **39** $x^2+8x+16$

**40** $x^2-26x+48$ **41** $x^2+4x-32$

**42** $x^2+7x-30$ **43** $x^2-10x-24$

**44** $-22x-48+x^2$ **45** $2x+x^2-24$

**46** $x^2-56-10x$ **47** $56+10x-x^2$

**48** $30+x-x^2$ **49** $24+10x-x^2$

**50** $3x^2+10x+3$ **51** $2x^2+5x+2$

**52** $2x^2+3x+1$ **53** $3x^2+7x+2$

**54** $12x^2-3x-9$ **55** $3x^2-5x-2$

سیفەتی لێکدانی سفری بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی ئەم هاوکێشانە.

**56** $15x^2=7x+2$ **57** $3x^2-5x=2$

**58** $4x-4=-15x^2$ **59** $3x^2+3=10x$

**60** $2x^2-15=-7x$ **61** $6x^2-17x=-12$

**62** $x^2-36=0$ **63** $t^2-9=0$

**64** $x^4-81=0$ **65** $x^4-1=0$

**66** $4x^2-9=0$ **67** $25x^2-16=0$

**68** $x^2-2x+1=0$ **69** $x^2+4x+4=0$

**70** $9x^2=-6x-1$ **71** $4x^2+1=4x$

**72** $-4+20x-25x^2=0$ **73** $40x+25=-16x^2$

**74** $64+16x+x^2=0$ **75** $9-6x+x^2=0$

شیتەڵکردن وسیفەتی لێکدانی سفری، بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی دوو سفری نەخشە دووجاکان.

76 $f(x)=x^2-7x+10$ 77 $g(x)=t^2-2t-15$

78 $f(x)=4x^2+4x-24$ 79 $g(x)=6x^2+3x-9$

80 $f(x)=t^2+7t-60$ 81 $k(x)=x^2-15x+56$

82 $f(x)=x^2+8x+12$ 83 $g(x)=x^2-3x-40$

84 $g(x)=6x^2+20x-16$ 85 $k(x)=4x^2-8x+3$

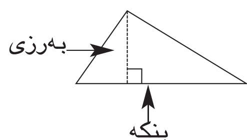
ئەمانە شیتەڵبکە.

**بەرنگاری**

86 $(a+b)^4-(a-b)^4$ 87 $x^{2n}-1$ 88 $x^{2n}-2x^n+1$

**بەستنەوە**

89 ئەندازە ڕێسای هەژمارکردنی ڕووبەری سێگۆشە بریتییە لە $A=\frac{1}{2}bh$ کە $A$ ڕووبەر و $b$ درێژی بنکە و $h$ بەرزی بێت. ئەم ڕێسایە بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 89 و 90 . بەرزی ئەو سێگۆشەیە بدۆزەوە کە ڕووبەرەکەی $42cm^2$ یە بنکەکەی 5cm زیاتر بێت لەبەرزییەکەی.




90 درێژی بنکەی ئەو سێگۆشەیە بدۆزەوە کە ڕووبەرەکەی $12cm^2$ و بەرزییەکەی 5cm کەمترە لە لە درێژی بنکەکەی.

**جێبەجێکردن**

91 وەرزش شەق لێدانی گوڵچیەك لە تۆپێکی پێ کە لەسەر زەوییە بە نەخشەی $h(t)=-4.9t^2+19.6t$ دەنوێنرێت بۆ پێوانی بەرزی تۆپەکە لە ڕووی زەوییەوە بە مەتر. پاش $t$ چرکە، بە چەند چرکە تۆپەکە بەر زەوی دەکەوێت جارێکی تر؟

## تێڕوانینێك بۆ دواوە

ئەم لاسەنگانە شیکاربکە وکۆمەڵە شیکار لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

92 $2x-4>12+5x$ 93 $2x-\frac{3}{4}\geq 7$

94 $3(3x+7)-12\leq 8-(\frac{1}{2}x+9)$ 95 $-2(\frac{2}{3}x+5)-13<0$

لێکبدە.

96 $(3x+4)(-x-5)$ 97 $(-2x+9)(-4x+7)$

98 $(\frac{1}{3}x+\frac{1}{4})(-5x-2)$

## تێڕوانینێك بۆ پێشەوە

ئەگەر توانرا ئەم برە دووجایانە شیتەڵبکە.

99 $(x+2)^2-4$ 100 $(x+9)^2+36$ 101 $(x-1)^2-16$

وانەی 3

# شیکارکردنی نەخشەی دووجا بەڕێگای تەواوکردنی دووجا

## Solving Quadratic Function by Completing The Square

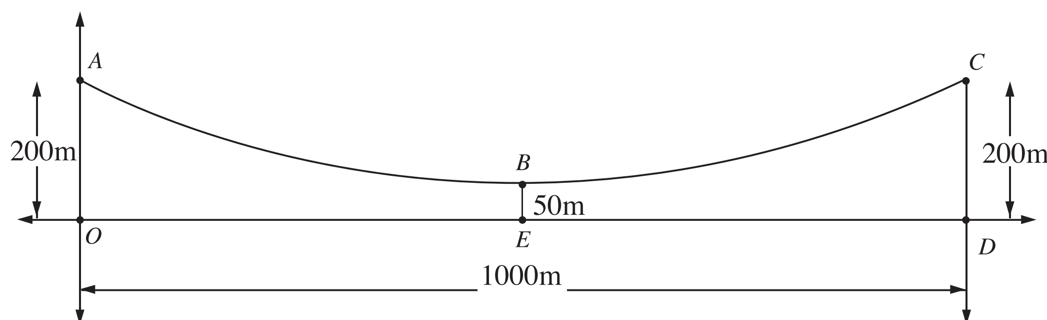



**ئامانجەکان**

- هاوکێشەی دووجا بە تەواو کردنی دووجا شیکار دەکات.
- سەری برگەی هاوتا دەناسێتەوە و پۆتانەکانی دیاریدەکات.
- بە ڕوونکردنەوەیی هاوکێشەی دووجا شیکار دەکات.

**جێبەجێکردنەکان**

ئەندازەی پردەکان




ئەندازیاران نەخشەی پردێکی هەڵواسراو دەکێشن وەك لە وێنەی سەرەوە دەردەکەوێت. لەوێنەکە شێوەی تەلێکی کانزایی دەردەکەوێت کە پردەکەی هەڵگرتووە. ئەو شێوەیە نزیکە لە هێڵکاری ڕوونکردنەوەی نەخشەیەکی دووجا،دەتوانرێت شێوەی ئەو سیمەی پردەکەی هەڵگرتووە بەنزیکەیی وەك نەخشەی $f(x)=\frac{3}{5000}x^2-\frac{3}{5}x+200$ کاتێك $0\le x\le 1000$ بنوێنرێت ئەم نەخشە دووجایە بە شێوەیەك بنووسە کە بتوانرێت پۆتانی خاڵی بچووکترینی بە ئاسانی دیاریبکەیت، بەرزی خاڵەکەش دیاریبکە.

لەبیرمەکە هاوکێشەی $x^2=k$ بە دیاری کردنی ڕەگە دووجاکانی شیکاردەکرد.

لەبیرت بێ کە لە پۆلی نۆیەم فێربویت کە چۆن هاوکێشەیەك لە جۆری $x^2=k$ شیکار دەکەیت بە دیاریکردنی ڕەگی دووجا.

**نموونە** 1

هاوکێشەی $x^2=9$ شیکاربکە.

**شیکار**

$$x^2=9$$

$$x=\pm\sqrt{9}$$

$$x=\pm 3$$

دەتوانیت هەمان ڕێگا بەکاربهێنێت بۆ شیکارکردنی هاوکێشەی لە جۆری $(a+x)^2=k$

**نموونە** 2 هاوکێشەی $(x+3)^2=16$ شیکاربکە

شیکار

$$(x+3)^2=16$$
$$x+3=\pm\sqrt{16}$$
$$x+3=\pm 4$$
$x=-7$ یان $x=1$

کاتێك برە جەبرییەکە لە هاوکێشەدووجاکەدا دووجای تەواو نەبێت. دەتوانیت بیکەیت بە دووجای تەواو، ئەم ڕێگایە یارمەتیت دەدات بۆ شیکارکردنی هاوکێشەکان بە شیتەڵکردن.

لە پەیوەندی نێوان ڕادەکانی دووجا تەواوەکە ووردببەوە.



ڕادە نەگۆڕی $c$ لە دووجا تەواوەکەدا بریتییە لە دووجای نیوەی هاوکۆلکەی $x$ کە یەکسانەبە $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ ئەگەر $a=1$.

**نموونە** 3 ژمارەیەك بۆ هەر بڕێك زیادبکە تا ببێتە دووجای تەواو.

أ $x^2-6x$ | ب $x^2 \pm 15x$

شیکار

أ لەبەر ئەوەی هاوکۆلکەی $x^2=1$ وهاوکۆلکەی $x=-6$ کەواتە $\frac{1}{2}(-6)=-3\rightarrow(-3)^2=9$

کەواتە دووجا تەواوەکە:

$$x^2-6x+9=(x-3)^2$$

ب لەبەر ئەوەی هاوکۆلکەی $x^2=1$ وهاوکۆلکەی $x=15$ کەواتە $\frac{1}{2}(15)=\frac{15}{2}\rightarrow\left(\frac{15}{2}\right)^2$

کەواتە دووجا تەواوەکە

$$x^2+15x+\left(\frac{15}{2}\right)^2=\left(x+\frac{15}{2}\right)^2$$

**هەوڵبدە** ئەو ژمارەیە زیادبکە کەوا دەکات ئەمانە ببنە دووجای تەواو

أ $x^2-7x$ | ب $x^2+16x$

## شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا بە تەواوکردنی دووجا تەواو
## Solving Quadratic Equation by Completing The Square

**نموونە** 4 هاوکێشەی $x^2+6x-16=0$ شیکاربکە

شیکار

$$x^2+6x-16=0$$
$$x^2+6x=16$$
$$x^2+6x+\left(\frac{6}{2}\right)^2=16+\left(\frac{6}{2}\right)^2$$ بە زیاد کردنی $\left(\frac{6}{2}\right)^2$ بۆ هەر دوو لای هاوکێشەکە.
$$x^2+6x+9=16+9$$
$$(x+3)^2=25$$

$$x+3=\pm 5$$

$x+3=-5$ یان $x+3=5$

$x=-8$ یان $x=2$

**هەوڵبدە** هاوکێشەی $x^2+10x-24=0$ شیکاربکە.

**نموونە 5** هاوکێشەی $2x^2+6x=7$ شیکاربکە

**شیکار**

ڕێگای یەکەم: بەجەبری هاوکێشەکە بە تەواوکردنی دووجا شیکاربکە.

$$2x^2+6x=7$$

$$2(x^2+3x)=7$$

$$x^2+3x=\frac{7}{2}$$

$$x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

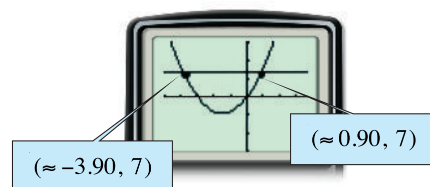
$$(x+\frac{3}{2})^2=\frac{7}{2}+\frac{9}{4}$$

$$x+\frac{3}{2}=\pm\sqrt{\frac{23}{4}}$$

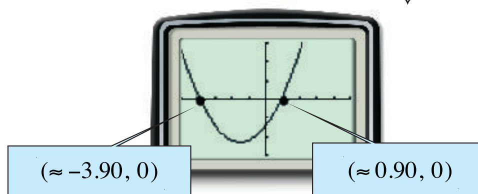
$x=-\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{23}{4}}$ یان $x=-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{23}{4}}$

$x\approx -3.90$ یان $x\approx 0.90$

ڕێگای دووەم: بە ڕوونکردنەوەیی، ڕوونکردنەوەیی دوو نەخشەی $y=7$ و $y=x^2+6x$ بکێشە وپاشان خاڵی یەکتربڕینەکان دیاریبکە




یان وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی دووجای $y=2x^2+6x-7$ بکێشە وخاڵەکانی یەکتربڕینی لەگەڵ تەوەرەی سینی دیاریبکە.




**هەوڵبدە** هاوکێشەی $2x^2+10x=6$ شیکاربکە.

## شێوەی پێوانەیی هاوکێشەی برگەی هاوتا Standard Form Equation of Parabola

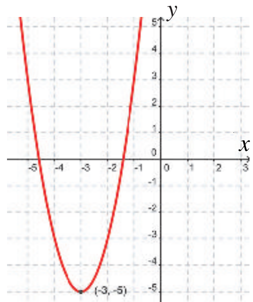
دەزانیت هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=ax^2+bx+c$ برگەی هاوتا دەنوێنێت. ڕێگای تەواوکردنی دووجا بەکاردەهێنیت بۆ بەدەست هێنانی شێوەیەك کە پۆتانی سەری برگەکەت بەڕوونی دەست بکەوێت.

**شێوەی پێوانەیی هاوکێشەی برگەی هاوتا**

دەتوانیت هاوکێشەی $y=ax^2+bx+c$ لە باری پێوانەیی $y=a(x-h)^2+k$ بنووسین لەم بارەرەشدا خاڵی $h$، $k$ پۆتانی سەری برگە هاوتاکەیە و $x=h$ هاوکێشەی تەوەرەکەیەتی.

## نموونە 6

هاوکێشەی برگە هاوتای $y=2x^2+12x+13$ بەشێوەی پێوانەیی بنووسە وهاوکێشەی تەوەرەکەی بنووسە.



شیکار

$$y=2x^2+12x+13$$
$$=2(x^2+6x)+13$$
$$=2(x^2+6x+9-9)+13$$
$$=2(x^2+6x+9)-18+13$$
$$=2(x+3)^2-5$$
$$=2\left(x-(-3)\right)^2+(-5)$$

سەری برگە هاوتاکە بریتییە لە $(-3,-5)$ هاوکێشەی تەوەرەکەی $x=-3$.

**هەوڵبدە** هاوکێشەی برگە هاوتای $y=3x^2-9x-2$ بە شێوەی پێوانەیی بنووسە و هەروەها هاوکێشەی تەوەرەکەی بنووسە.

## نموونە 7

بە گەڕانەوە بۆ سەرەتای وانەکە هاوکێشەی $f(x)=\frac{3}{5000}x^2-\frac{3}{5}x+200$ بە شێوەی پێوانەیی بنووسە و پۆتانی نزمترین خاڵ لەسەر تەلە کانزاییەکە بدۆزەوە.

شیکار

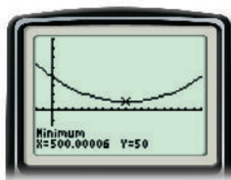
ڕێگای یەکەم : بە جەبری

$$f(x)=\frac{3}{5000}x^2-\frac{3}{5}x+200$$
$$=\frac{3}{5000}(x^2-1000x)+200$$
$$=\frac{3}{5000}\left[x^2-1000x+\left(\frac{1000}{2}\right)^2\right]+200-\frac{3}{5000}\times\left(\frac{1000}{2}\right)^2$$
$$=\frac{3}{5000}(x-500)^2+50$$

نزمترین خاڵی سەر تەلەکە سەری برگە هاوتاکەیە وبریتییە لە $(500, 50)$

ڕێگای دووەم : بە ڕوونکردنەوەیی

وێنەی چەماوەی برگە هاوتای $y=\frac{3}{5000}x^2-\frac{3}{5}x+200$ بکێشە.
و پۆتانی نزمترین خاڵ دیاربکە.




تەکنەلۆژیا



بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی

# ڕاهێنان

## بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1 ڕوونیبکەرەوە چۆن هاوکێشەی $x^2+4x-13=0$ بە ڕێگای تەواوکردنی دووجا شیکار دەکەیت.

2 ڕوونیبکەوە چۆن هاوکێشەی $2x^2+4x=15$ بە ڕێگای تەواوکردنی دووجا شیکار دەکەیت.

3 بەسوود وەرگرتن لە ڕێگای شیکاری نموونە 5 چۆن هاوکێشەی $2x^2+4x=15$ بە ڕوونکردنەوەیی شیکار دەکەیت.

4 ڕوونیبکەرەوە $h$ ، $k$ چی دەنوێنن لە باری پێوانەیی هاوکێشە دووجاکاندا.

## ڕاهێنانی ئاراستەکراو

ژمارەیەك زیادبکە بۆ ئەم هاوکێشە دووجایانە بۆ ئەوەی ببنە دووجای تەواو.

**5** $x^2-12x$ **6** $x^2+5x$

**7** هاوکێشەی $x^2-4x-21=0$ بە ڕێگای تەواوکردنی دووجا شیکار بکە.

**8** هاوکێشەی $2x^2+5x=3$ شیکاربکە.

بەستنەوە

**9** جیۆگرافی نەخشە دووجای $y=x^2+12x+20$ بە شێوەی پێوانەیی بنووسە، هاوکێشەی تەوەری برگە هاوتاکە بنووسە.

**10** نەهرۆ هاوکێشەی برگەیەکی هاوتا بە شێوەی $y=-16x^2+32x+5$ نووسی. هاوکێشەکە بە شێوەی دووجای تەواو بنووسە پاشان هاوکێشەی برگە هاوتاکە بە شێوەی پێوانەی بنووسە.

## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ژمارەیەك بۆ برە دووجاکە زیادبکە بۆ ئەوەی دووجای تەواوت دەستبکەوێت.

**11** $x^2+10x$ **12** $x^2-14x$ **13** $x^2-8x$

**14** $x^2+2x$ **15** $x^2+13x$ **16** $x^2+7x$

ئەم هاوکێشانە بە ڕێگای تەواوکردنی دووجا شیکاربکە.

**17** $x^2-8x=4$ **18** $x^2+2x=13$

**19** $x^2-5x-1=4-3x$ **20** $0=x^2-6x+3$

**21** $0=x^2+7x-26$ **22** $0=x^2-3x-6$

**23** $x^2+7x+10=0$ **24** $x^2+10x+16=0$

**25** $x^2-x=30$ **26** $3x^2-2x-12=0$

**27** $-2x^2+14x+60=0$ **28** $0=3x^2-11x+6$

**29** $-10=x^2-8x+2$ **30** $x^2+16x=2$

**31** $4-x^2=10x$ **32** $x^2=23-15x$

**33** $8x-2=x^2+15x$ **34** $-32x=16-x^2$

**35** $2x^2=22x-11$ **36** $4x^2-8=-13x$

هەریەك لەم نەخشە دووجایانە بە پێوانەیی بنووسە. پۆتانی سەری برگە هاوتاکەو هاوکێشەی تەوەرەکەی بدۆزەوە.

**37** $y=3x^2$ **38** $y=-x^2+2$

**39** $y=x^2-5$ **40** $y=x^2+8x+11$

**41** $y=x^2-6x-2$ **42** $y=-x^2+4x+2$

**43** $y=x^2+7x+3$ **44** $y=-3x^2+6x-9$

**45** سێ نەخشەی دووجا بنووسە، سەرەکانی بکەونە سەر خاڵی $(2, 5)$

جێبەجێکردنەکان

**46** هاوکێشەی ئەو نەخشە دووجایە بنوسە بە خاڵی $(1, 8)$دا دەڕوات و سەرەکەی خاڵی $(2, 5)$ بێت.

**لە پرسیارەکانی 47 و 48 وەڵامە تەواوەکان بنووسە پاشان بۆ نزیکترین دە نزیکیبکەوە.**

**47** **ئەندازە** درێژی لاکێشەیەك $6m$ مەتری لە پانیەکەی زیاترە. درێژی وپانیەکەی بدۆزەوە کاتێك ڕووبەرەکەی $50m$ دووجا بێت.

**48** نەخشەی $w = x^2 - 12x + 210$ ئەو ووزەیە (بە میگاوات) دەنوێنێت کە ویستگەیەکی بەرهەمهێنانی کارەبا بە دەستی دێنێت، کاتێك $x$ کاتە بە کاتژمێر (لە سفر تا 24)

أ لە کام کاتژمێردا بەرهەمی ویستگەکە کەمترین دەبێت؟

ب هێزی بەرهەم هاتوو چەندە لەوکاتەدا؟

ج لە کام کاتژمێردا ووزەی بەرهەمی ویستگەکە دەکاتە 187 میگاوات؟

**49** **کۆکردنەوەی یارمەتی** کۆمەڵەی خاوەن پێداویستییە تایبەتیەکان ساڵانە هەڵدەستێت بە سازدانی ئاهەنگێك بۆ کۆکردنەوەی یارمەتی نەخشەی $P(t) = -16t^2 + 800t - 4000$ پوختەی بەهای یارمەتییەکان (پاش خەرجییەکان) دەنوێنێت. $p$ هێمای بەهای یارمەتیەکانە بە هەزار دینار و $t$ هێمای نرخی بلیتی هاتنە ژوررەوەیە.

أ نرخی بلیتێك چەندە بۆ ئەوەی گەورەترین قازانج بە دەست بێنێت.

ب بەهای گەورەترین قازانجەکە چەندە؟

ج کۆمەڵەکە بە چ نرخیك بلێت بفرۆشێت، بۆ ئەوەی پوختەی یارمەتیەکە 5424 هەزار دینار بێت.



## تێڕوانینێك بۆ دواوە

**ئەم هاوکێشانە شیکاربکە.**

**50** $5x + 3 = 2x + 18$ 

**51** $\frac{2(x+3)}{5} = x - 3$ 

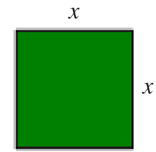
**52** $20 = 6x - 10$

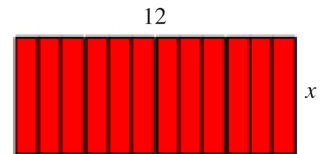
**53** بەهای نەخشەی $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$ هەژمێر بکە کاتێك $x = 2$ وکاتێك $x = -2$

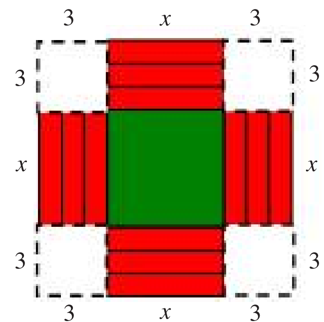
**54** بەهای نەخشەی $f(x) = 7 - 4x$ هەژمێر بکە کاتێك $x = 2$ وکاتێك $x = -3$



## تێڕوانینێك بۆ پێشەوە




### دەروازەیەك لەسەر ڕۆشنبیری ئیسلامی

کتێبی (الجبر والمقابلە)ی زانای ئیسلامی خوارزمی بە پێشەنگی کتێبەکانی بەرایی جەبر دادەنرێت لە جیهاندا. لە کتێبەکەیدا ڕێگایەکی بۆ شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا بەکارهێناوە، هاوشێوەی ڕێگای تەواوکردنی دووجایە.

بۆ شیکارکردنی هاوکێشەی $x^2 + 12x = 45$ بە تەواوکردنی دووجا، هەڵدەستیت بە وەرگرتنی چوار گۆشەیەك درێژی لایەکی $x$ بێت و 12 لاکێشە درێژی یەکێکیان $x$ ویانییەکەی 1 بێت.

**هەنگاوی یەکەم** : لاکێشەکانی دابەش کردووە بۆ 4 کۆمەڵەی 3 دانەیی، پاشان هەر کۆمەڵەیەك لە لایەك لە لایەکانی چوار گۆشەکە دادەنرێت وەك لە وێنەکەدا دیارە. ڕووبەری ئەو شێوەی دەردەچێت. بریتیە لە $x^2 + 12x$ واتا 45 .

هەنگاوی دووەم: بۆ تەواوکردنی دووجا، تەنیا پێویستیت بە زیادکردنی چوار گۆشەیەکە ڕووبەرەکەی $3 \times 3$ واتا 9 لە هەر گۆشەیەك لە گۆشەکانی شێوەکەوە.

$$9 \times 4 = 36$$

ڕووبەری چوار گۆشە گەورەکە یەکسانە بە $45 + 36 = 81$ لەوەوە بۆمان دەردەچێت کە درێژی لایەکی چوار گۆشە گەورەکە 9 یە ولە هەمان کاتدا درێژی لا گەورەکە یەکسانە $3 + x + 3 = 6 + x$

کەواتە $6 + x = 9$ لەوەشەوە $x = 3$

**ڕێگای خوارزمی بەکاربێنە بۆ شیکارکردنی ئەم هاوکێشانە.**

**55** $x^2 + 20x = 125$

**56** $x^2 + 32x = 33$

**57** $x^2 + 56x = 116$

# وانەی 4

# شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا بە یاسا (دەستوور)

## Solving Quadratic Function By Formula

**ئامانجەکان**

- یاسا بۆ دۆزینەوەی ڕەگە ڕاستییەکانی هاوکێشەی دووجا بەکاردێنێت.
- ڕەگەکانی هاوکێشەکە بۆ دۆزینەوەی تەوەری برگەی هاوتا بەکاردێنێت.

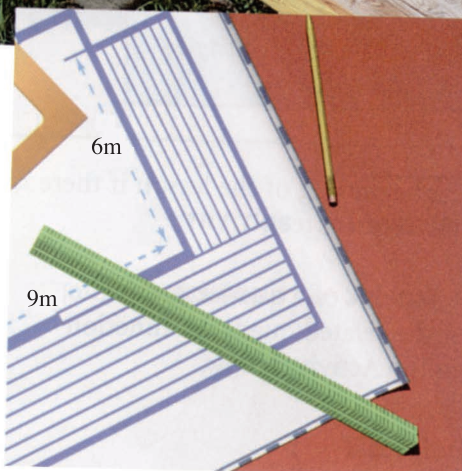
**جێبەجێکردنەکان**

بیناسازی



**بۆچی**

دەتوانین یاسای شیکاری هاوکێشەی دووجا بەکاربێنین بۆ شیکاری زۆر لە پێداویستیەکانی ژیانی ڕۆژانەمان وەك دۆزینەوەی دوو دووری ڕێڕەوی خانوو.




خێزانی مام جوامێر بڕیاریدا ڕێڕەوێك دروست بکات بەهەر دوو لاتەنیشتی ماڵەکەیدا بڕوات بە پانیەکی نەگۆڕ. ئەم خێزانە ئەوەندە کەرەستەی هەیە کە $45\ m^2$ لە ڕێڕەوەکە تەواو بکات. پانی ڕێڕەوەکە پێویستە چەند بێت؟ دەتوانیت یاسای هاوکێشەی دووجا بەکاربێنیت بۆ شیکاری ئەم پرسیارە ئەگەر بزانیت 9m ، 6m دوو دووری خانوەکەیە، دەتوانیت ڕێگای تەواو کردنی دووجا بەکاربێنیت بۆ داتاشینی یاسای شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا لە شێوە گشتییەکەیەوە.

$$ax^2+bx+c=0 \qquad a\neq 0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$ هاوکێشەکە دابەشبکە بەسەر $a$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$ لەهەردوو لا دەربکە $\frac{c}{a}$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$ بەزیاد کردنی دووجای نیوەی هاوکۆلکەی x بۆ هەر دوولا

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$ کورتبکەوە.

ئەگەر $b^2-4ac$ ژمارەیەکی سالب بێت، واتا هیچ ژمارەیەکی ڕاستی نییە پاسادانی $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ بکات لەم بارەدا هاوکێشەکە ڕەگی نییە لە ژمارە ڕاستییەکاندا.

ئەگەر $b^2-4ac=0$ ، ئەوا $x+\frac{b}{2a}=0$ لەمەوە $x=-\frac{b}{2a}$. هاوکێشەکە دوو ڕەگی ڕاستی یەکسانی هەیە، بەهای هەریەکەیان دەکاتە $-\frac{b}{2a}$ .

ئەگەر $b^2-4ac$ ژمارەیەکی موجەب، بێت ئەوا: دوو ڕەگی ڕاستی جیاوازی هەیە بەم شێوەیە:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$ ڕەگی دووجای هەر دوو لا وەربگرە.

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ کورتبکەوە

$$x=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ $\frac{b}{2a}$ لەهەر دوولا کەمبکەوە

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ کورت بکەوە

بەم یاسایەش دەوترێت «**یاسای دەستوور**»

**Discriminator Of Quadratic Equation** **بڕی جیاکەرەوەی هاوکێشەی دووجا**

بە بڕی $\Delta=b^2-4ac$ دەوترێت بڕی جیاکەرەوەی هاوکێشەی دووجای $ax^2+bx+c=0$ کاتێك $a\neq0$.

**Solving Quadratic Equation** **شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا**

| بڕی جیاکەرەوە | ژمارەی ڕەگەکان لە کۆمەڵەی ژمارەی ڕاستییەکان |
|---|---|
| $\Delta<0$ | هاوکێشەکە ڕەگی نییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان |
| $\Delta=0$ | هاوکێشەکە دوو ڕەگی یەکسانی هەیە $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$ |
| $\Delta>0$ | هاوکێشەکە دوو ڕەگی جیاوازی هەیە $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ |

**نموونە** 1 یاسا بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی هاوکێشەی $x^2+5x-14=0$

**شیکار**

ئەگەر $x^2+5x-14=0$ بەراورد بکەیت لەگەڵ شێوەی گشتی هاوکێشەی $ax^2+bx+c=0$

دەبینین $a=1$ و $b=5$ و $c=-14$ .

هاوکێشەکە بەم شێوەیە شیکاربکە:

1. هەژمێری بڕی جیاکەرەوە بکە بە لەجیاتیدانانی هاوکۆلکەکان $\Delta=b^2-4ac$

$$\Delta=5^2-4\times1\times(-14)=25+56=81$$

2. لەبەر ئەوەی بڕی جیاکەرەوە موجەبە، کەواتە هاوکێشەکە دوو ڕەگی جیاوازی هەیە کە ئەمانەن:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad و \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-5+\sqrt{81}}{2} \quad و \quad =\frac{-5-\sqrt{81}}{2}$$

$$=2 \quad و \quad =-7$$

**هەوڵبدە** بە بەکارهێنانی یاسا $x^2-7x+6=0$ شیکاربکە.

**خاڵی چاودێری** ✓ هاوکێشەی $x^2+5x-14=0$ بە شیتەڵکردن شیکاربکە، بۆ دڵنیابوون لە ڕاستی وەڵامەکەت سەیری نموونەی 1 بکە.

## نموونە 2

**بە بەکارهێنانی یاسا هاوکێشەی $4x^2=8-3x$ شیکاربکە. دوو ڕەگەکە بە تەواوەتی بنووسە، پاشان بۆ نزیکترین دە نزیکیبکەوە.**

شیکاری پرسیارەکان

**شیکار**

هاوکێشەی $4x^2=8-3x$ بە شێوەی گشتی بنووسە بەمەش هاوکێشەی $4x^2+3x-8=0$ مان دەست دەکەوێت کە هاوکۆلکەکانی بریتین لە $a=4$ و $b=3$ و $c=-8$

هەژمێری بڕی جیاکەرەوە دەکەین بە لەجیاتیدانان

$$\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times4(-8)=9+128=137$$

بڕی جیاکەرەوە موجەبە کەواتە دوو ڕەگی جیاوازی هەیە

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2} \quad \text{و} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2}$$

$$=\frac{-3+\sqrt{137}}{8} \quad \text{و} \quad =\frac{-3-\sqrt{137}}{8}$$

$$\approx 1.1 \quad \text{و} \quad \approx -1.8$$

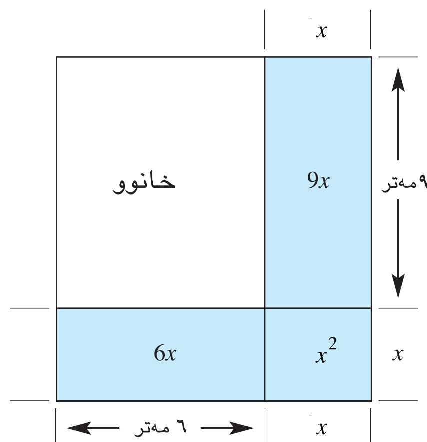
**هەوڵبدە** بە بەکارهێنانی یاسا هاوکێشەی $2x^2-6x=-3$ شیکار بکە. ڕەگەکان بە تەواوی بنووسە. پاشان بۆ نزیکترین دە نزیکیبکەوە.

## نموونە 3

**بەگەڕانەوە بۆ سەرەتای وانەکە. پانی ڕێڕەوەکە دیاربکە. ئەگەر زانیت خێزانی جوامێر بەشی دروست کردنی $54m^2$ کەرەستەی پێویستی هەیە.**

جێبەجێکردنەکان

**شیکار**




ئەو بڕەی کە ڕووبەری ڕێڕەوەکەی دەنوێنێت بریتییە لە:

$$A(x)=x^2+9x+6x=x^2+15x$$

داواکراو: شیکاری هاوکێشەی $x^2+15x=54$ بکە

هاوکێشەکە بە شێوەی گشتی بنووسە و هاوکۆلکەکانی دیاریبکە .

$a=1$ و $b=15$ و $c=-54$

بڕی جیاکەرەوەی هاوکێشەکە هەژمێربکە.

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$=225-4\times1\times(-54)=441$$

هاوکێشەکە دوو ڕەگی جیاوازی هەیە. چونکە بڕی جیاکەرەوە موجەبە

$$x_1=\frac{-15+\sqrt{441}}{2} \quad \text{و} \quad x_2=\frac{-15-\sqrt{441}}{2}$$

$$=3 \quad \text{و} \quad =-18$$

وەڵامی ڕاست 3 یەچونکە $-18$ ناگونجێت، درێژی بەسالب ناپێورێت.

**هەوڵبدە** بە گەڕانەوە بۆ سەرەتای وانەکە پانی ڕێڕەوەکە بدۆزەوە ئەگەر بەشی $34m^2$ کەرستەی پێویست هەبێت. لەوانەکانی پێشووەوە ئەوەت بۆ ڕوونبووەوە کە ڕەگەکانی هاوکێشەی $ax^2+bx+c=0$ بریتین لە پۆتانی ئاسۆیی خاڵی یەکتر بڕینی هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشە دووجاکەی $f(x)=ax^2+bx+c$ و تەوەری سینەکان.

## چالاکی

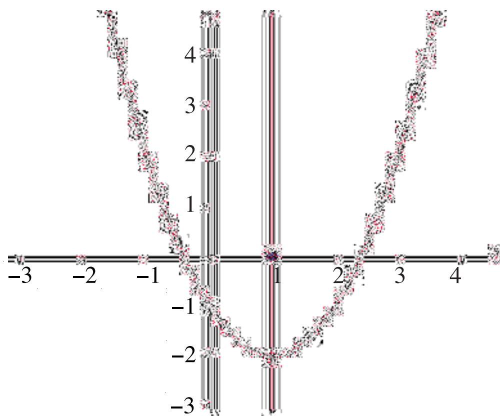
**Exploring Roots of Equations** — **دۆزینەوەی ڕەگی هاوکێشەکان**

1. خشتەکە بنووسەوە وستونی دووەم وسێیەم تەواو بکە. هەردوو ڕەگی هاوکێشەکە دیاریبکە.
2. هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە، کە ڕێساکەی لای چەپی هاوکێشەکەیە بکێشە، پۆتانی ئاسۆیی سەرەکەی دیاریبکە پاشان ادوا دوو ستوونی خشتەکە تەواوبکە.

| جێکەوتەی سینی سەرەکەی | نەخشەی پێناسەکراو بە هاوکێشەکە | ناوەندی دوو ڕەگەکە | دوو ڕەگەکە | هاوکێشە |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | $d(x)=x^2+2x$ | $-1$ | $0,-2$ | $x^2+2x=0$ |
| | | | | $-x^2+4=0$ |
| | | | | $x^2+4x+4=0$ |
| | | | | $2x^2+5x-3=0$ |
| | | | | $-x^2-x+4=0$ |

3. بە کورتی باسی دۆزینەوەی پۆی سینی سەری هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەیەکی دووجابکە.

خاڵی چاودێری ✓




لەوانەکانی پێشوو ئەوە فێربوین کە ئەگەر k پۆی سینی سەری برگە هاوتاکە بێت ئەوا$(x = k)$ هاوکێشەی تەوەرەکەیەتی، لە لایەکی تریشەوە بە هۆی هاوجێبونی برگە هاوتاکە بە دەوری تەوەرەکەیدا ،دەتوانیت هاوکێشەی تەورەکەی بدۆزیتەوە، لە ڕێگەی هەژمێرکردنی ناوەندی هەردوو ڕەگەکەی

$$k=\frac{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}{2}=\frac{-b}{2a}$$

هاوکێشەی تەوەرەی برگە هاوتا بریتییە لە $x=-\frac{b}{2a}$

## نموونە 4

هاوکێشەی تەوەرەی هاوجێبوون و پۆتانی سەری نەخشەی $f(x)=19+8x+2x^2$ بدۆزەوە.

**شیکار**

ڕێسای نەخشەکە بە شێوەی گشتی بنووسە $f(x)=2x^2+8x+19$ دەبینین کە $a=2$ و $b=8$

هاوکێشەی تەوەرەی هاوجێبوون $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{8}{4}=-2$

پۆوتانی سەری برگە بریتین لە $x=-2$ و $y=f(-2)=2(-2)^2+8(-2)+19=11$

خاڵی $(-2, 11)$ سەری برگە هاوتاکە دەنوێنێت.

**هەوڵبدە** هاوکێشەی تەوەری هاوجێبوون وپۆتانی سەری نەخشەی $f(x)=x^2-4x+1$ بدۆزەوە.

**بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** چی دەڵێیت دەربارەی بڕی جیاکەرەوەی هاوکێشەیەکی دووجا دوو ژمارەی تەواو بن.

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 دوو ڕێگای جیاواز باسبکە بۆ دیاریکردنی پۆی سینی بۆ خاڵەکانی یەکتربڕینی برگە هاوتای $y = x^2 + 2x - 3$ لەگەڵ تەوەری سینی.

2 ڕێگەیەك باسبكە بۆ دیاریکردنی سەری برگە هاوتا.

3 پەیوەندی چییە لە نێوان سەری برگەی هاوتا وتەوەرەکەی؟

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

**بە بەکارهێنانی یاسا، ڕەگەکانی ئەم هاوکێشانە دیاریبکە.**

4 $x^2 - 5x + 4 = 0$

5 $2x^2 - 5x = 3$

6 بە بەکارهێنانی یاسا هاوکێشە دووجای $3x^2 - 3x = 4$ شیکاربکە، ڕەگەکان بە تەواوی بدۆزەرەوە، پاشان بۆ نزیکترین دە نزیکیبکەوە.

**سەری برگە هاوتاکە وهاوکێشەی تەوەری هاوجێبوونی بدۆزەرەوە.**

7 $f(x) = x^2 - x - 2$

8 $f(x) = 2x^2 - 12x + 11$

## ڕاهێنان وجێبەجێکردن

**ڕەگەکانی ئەم هاوکێشانە بە تەواوی بە بەکارهێنانی یاسا بدۆزەوە (نزیکی مەکەوە).**

9 $x^2 + 7x + 9 = 0$

10 $x^2 + 6x = 0$

11 $(x+1)(x-2) = 5$

12 $(x-4)(x+5) = 7$

13 $t^2 - 9t + 5 = 0$

14 $x^2 - 3x - 1 = 0$

15 $x^2 + 9x - 2 = -16$

16 $x^2 - 5x - 6 = 18$

17 $5x^2 + 16x - 6 = 3$

18 $4x^2 = -8x - 3$

19 $3x^2 - 3 = -5x - 1$

20 $x^2 + 3x = 2 - 2x$

21 $x^2 + 6x + 5 = 0$

22 $x^2 + 10x = 5$

23 $-2x^2 + 4x = -2$

24 $5x^2 - 2x - 3 = 0$

25 $-6x^2 + 3x + 19 = 0$

26 $-x^2 - 3x + 1 = 0$

**پۆتانی سەری برگە هاوتاکان وهاوکێشەی تەوەرەی هاوجێبون بنووسە.**

27 $y = 7x^2 + 6x - 5$

28 $y = x^2 + 9x + 14$

29 $y = 3 + 7x + 2x^2$

30 $y = 10 - 5x^2 - 15x$

31 $y = 3x^2 + 6x - 18$

32 $y = 14 + 8x - 2x^2$

33 $y = 4 - 10x + 5x^2$

34 $y = -x^2 - 6x + 2$

35 $y = 3x^2 + 21x - 4$

36 $y = -2x^2 + 3x - 1$

37 $y = 3x^2 - 18x + 22$

38 $y = -2x^2 + 8x + 13$

39 $y = 3x - 2x^2 + 2$

40 $y = -1 - 8x + 12x^2$

41 $y = 7x^2 - 12x + 2$

42 $y = 2x - 2 + x^2$

43 $y = 4x^2 - 3x - 8$

44 $y = 9 - 3x^2$

45 $y = 5x - x^2$

46 $y = 5x^2 + 2x - 3$

47 ئەگەر یەكێك لە ڕەگەكانی هاوكێشەی $ax^2 + bx + c = 0$ هەڵگەڕاوی ڕەگەكەی تری بێت ئەوا بیسەلمێنە $a = c$ .

48 **بۆ خوشی** كاڵێ چەند یارییەكی ئاگرینی بە شێوەیەكی ستوونی بۆ ئاسمان هەڵدا بە خێرایی سەرەتایی $58.8\ m/t$ دەتوانیت نەخشەی $h(t) = -4.9t^2 + 58.8t$ ڕێسای بەرزی بێت پاش $t$ چركە.

أ كاتی پێویست چەندە؟ بۆ ئەوەی یارییە ئاگرینەكە گەورەترین بەرزی هەبێت.

ب گەورەترین بەرزی چەندە؟ كە یارییە ئاگرینەكە دەیگاتێ.

49 **پیشە سازی** سەرۆكی دەستەی بەڕێوەبردنی كارگەیەك داوای لە یەكێك لە ڕاوێژكەرەكانی كرد بەهای فرۆشتنی گوڵدانێكی بۆ دیاریبكات. ڕاوێژكارەكە دوای شیكردنەوەی تێچوون وداواكاری بەكاربەرەكان لەسەر گوڵدان. ئەویش گەیشتە دانانی نەخشەیەك كە قازانجی كارگە بنوێنێت: نەخشەكە بریتی بوو لە $P(x) = -0.3x^2 + 75x - 2000$ كاتێك $x$ بەهای فرۆشتنی یەك گوڵدان بێت.

أ نرخی فرۆشتنی یەك گوڵدان چەندە؟ بۆ ئەوەی زۆرترین قازانج دەستبكەوێت.

ب نرخی گەورەترین قازانج چەندە؟

ج نرخەكانی فرۆشتن چەندن كاتێك قازانج دەبێت بە سفر.

د بەهاكانی $x$ چەندن بۆ ئەوەی كارگەكە قازانج بكات؟

هـ بەهاكانی $x$ چەندن كە كارگەكە توشی زەرەر دەكات؟

## ڕوانینێك بۆ دواوە

هاوكێشەی ئەو ڕاستەهێڵانە بە شێوی $y = mx + b$ بنووسە كە بەخاڵی دراودا دەڕوات و ستوونە لەگەڵ ڕاستەهێڵە دراوەكە.

50 $(-2, 3)$ و $y = x - 5$

51 $(4, -6)$ و $2x - y = 1$

هاوكێشەی ئەو ڕاستەهێڵانە بە شێوەی $y = mx + b$ بنووسە كە بەخاڵی دراودا دەڕوات و تەریبە بە ڕاستەهێڵە دراوەكە.

52 $(8, -1)$ و $y = -3x + 12$

53 $(-4, -2)$ و $5x = 4 - y$

ئەم لاسەنگانە شیكاربكە و كۆمەڵەی شیكار لەسەر تەوەرەی ژمارەكان بنوێنە.

54 $|x + 6| > 2$

55 $|x - 3| < 5$

56 $|-4x| \le 8$

57 $|8 - 2x| \ge 6$

## ڕوانینێك بۆ پێشەوە

58 ئایادەتوانیت كۆمەڵە شیكارێك بۆ هاوكێشەی $2x^2 + 5x + 6 = 0$ بدۆزیتەوە لە كۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەكاندا؟ ئەمە باسبكە بە پشت بەستن بە یاسا( دەستوور)ی شیكاری هاوكێشە دووجاكان.

وانەی

# 5

# لاسەنگە دووجاکان Quadratic Inequalities



**بۆچی**

زۆر لە پێداویستییەکانی ڕۆژانەمان وەک ئەوانەی پەیوەندیان بە قازانجی بازرگانیەوە هەیە بە پێی تێچوون وداهات دەتوانین لە ڕێگای لاسەنگەیەکی دووجاوە چارەسەریان بکەین.

**ئامانجەکان**

- لاسەنگە دووجاکان دەناسێت وشیکاریان دەکات و کۆمەڵە شیکاریان بە ڕوونکردنەوەیی دەنوێنێت.

**جێبەجێکردنەکان**

**بازرگانی**

سۆزان کراس دەدورێت ودەیانفرۆشێت. براکەی لێکوڵینەوەیەکی ئەنجامدا لەسەر تێچوون ونرخ وداهات بە دینار، بینی تێچوونی مانگانە $p$ ونرخی کراس $c$ ئەم پەیوەندیە دەبەسترێنەوە:

$$C(p) = 75p + 2500$$

هەروەها داهات $R$ ونرخ $P$ ئەم پەیوەندیە دەیانبەستێتەوە $R(p) = -25p^2 + 700p$ بەم شێوەیە قازانجی سۆزان بە پێی پەیوەندی نێوان قازانج $G$ و نرخی فرشتن $P$ دیاری دەکرێت:

$$\begin{aligned} G(p) &= R(p) - C(p) \\ &= -25p^2 + 700p - (75p + 2500) \\ &= -25p^2 + 625p - 2500 \end{aligned}$$

پێویستە سۆزان چۆن نرخی کراسێك دیارییبکات بۆئەوەی قازانجی دەستکەوێت. یان بیرکاریانە، سۆزان چۆن بەهای گۆڕاوی $p$ هەڵدەبژێریت بۆ پاسەدانی ئەم لاسەنگە $-25p^2 + 625p - 2500 > 0$

**چالاکی**

## دۆزینەوەی لاسەنگە دووجاکان Exploring Quadratic Inequalities

**تەکنەلۆجیا**



بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی

پێویستیت بە بژمێری ڕوونکردنەوەیی دەبێت .
خشتەی بەرامبەر بەهاکانی نەخشەی $f(x) = x^2 - 2x - 3$ دیاریدەکات کە گۆڕاوی $x$ وەردەگرێت لە نێوان $-2$ و $4$
ئەگەر لەخشتەکە ووردببینەوە سێ باری جیاواز دەبینرێت:

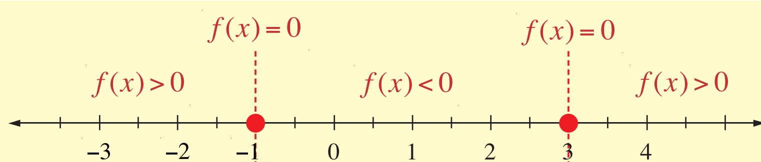
| X | Y1 |
|---|---|
| -2 | 5 |
| -1 | 0 |
| 0 | -3 |
| 1 | -4 |
| 2 | -3 |
| 3 | 0 |
| 4 | 5 |

Y1 ■X²-2X-3

$f(x) = 0$ ئەگەر $x = -1$ یان $x = 3$

$f(x) > 0$ ئەگەر $x < -1$ یان $x > 3$

$f(x) < 0$ ئەگەر $-1 < x < 3$




**1.** ئەم خشتەیە بنووسەوە وتەواوی بکە بەهاکانی $x$ کامانەن کە پاسادانی هاوکێشەکە دەکەن.
بەهاکانی $x$ کامانەن کە پاسەدانی لاسەنگەکە دەکەن.

| نەخشە | ژمارەی خاڵەکانی یەکتر برینی هێڵی ڕوونکردنەوەیەکە لەگەڵ تەوەرەی سینیەکان | بەهاکانی $x$ کاتێك $f(x)=0$ | بەهاکانی $x$ کاتێك $f(x)>0$ | بەهاکانی $x$ کاتێك $f(x)<0$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)=x^2-4$ | 2 | | | |
| $f(x)=-x^2+2x+3$ | | | | |

**2.** هەمان کاری پێشوو دووبارەبکەوە.

| نەخشە | ژمارەی خاڵەکانی یەکتر برینی هێڵی ڕوونکردنەوەیەکە لەگەڵ تەوەرەی سینیەکان | بەهاکانی $x$ کاتێك $f(x)=0$ | بەهاکانی $x$ کاتێك $f(x)>0$ | بەهاکانی $x$ کاتێك $f(x)<0$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)=x^2$ | 1 | | | |
| $f(x)=-x^2$ | | | | |

**3.** هامان کاری پێشوو دووبارەبکەوە.

| نەخشە | ژمارەی خاڵەکانی یەکتر برینی هێڵی ڕوونکردنەوەیەکە لەگەڵ تەوەرەی سینیەکان | بەهاکانی $x$ کاتێك $f(x)=0$ | بەهاکانی $x$ کاتێك $f(x)>0$ | بەهاکانی $x$ کاتێك $f(x)<0$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)=-x^2+x-1$ | 0 | | | |
| $f(x)=x^2+x+3$ | | | | |

**خاڵی چاودێری** ✔

أ ئەگەر هێڵکاری نەخشەیەك تەوەری سینی لە دوو خاڵدا ببڕێت، ئەوا تەوەرەی سینی دابەش دەکات بۆ ______ ماوەی جیاواز.

ب ئەگەر هێڵکاری نەخشەیەك تەوەری سینەکان لە یەك خاڵدا ببڕێت، ئەوا تەوەرەکە دابەش دەکات بۆ ______ ماوەی جیاواز.

ج ئەگەر هێڵکاری نەخشەیەك تەوەری سینی نەبڕێت، ئەوا تەوەرەی سینی دابەش دەکات ______ بۆ ماوەی جیاواز.

دەتوانیت کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگە دووجاکە بە هۆی دیاریکردنی ڕەگەکانی هاوکێشە دووجاکە یان لە ڕێگای هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشە دووجاکەوە بدۆزیتەوە.

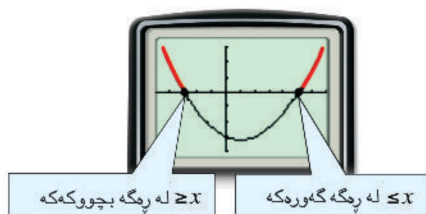
نموونە ① لاسەنگەی $x^2-2x-15 \geq 0$ شیکاربکە. کۆمەڵەی شیکار لەسەر هێڵی ژمارەکان بنوێنە.




شیکار

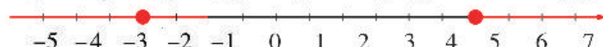
هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشە دووجای پەیوەست بە لاسەنگەکەوە دیاردەخات کە کۆمەڵەی شیکار لەدوو بەش پێکدێت.

$\geq x$ ڕەگە بچووکەکە یان $\leq x$ ڕەگە گەورەکە.




$$x^2-2x-15=0$$
$$(x+3)(x-5)=0$$
$$x=5 \quad \text{یان} \quad x=-3$$

کەواتە کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەکە بریتییە لە کۆمەڵەی بەهایەکانی $x$ کەپاسادانی $x \leq -3$ یان $x \geq 5$




هەوڵبدە لاسەنگەی $x^2-8x+12 \geq 0$ شیکاربکە و کۆمەڵەی شیکارەکە لەسەر هێڵی ژمارەکان بنوێنە.

نموونە ② بەگەڕانەوە بۆ سەرەتایی وانەکە، پێویستە چۆن سۆزان نرخی کراسی **p** دیاریبکات بۆ دەستکەوتنی قازانج؟



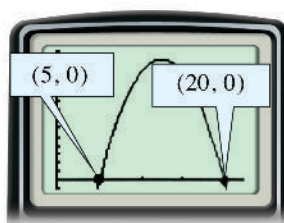

شیکار

هاوکێشە دووجاکە شیکاربکە $-25p^2+625p-2500=0$

بەبەکار هێنانی یاسا. $\Delta = 625^2-4\times(-25)\times(-2500)=140625$

بڕی جیاکەرەوەی هاوکێشەکە:

هەردوو ڕەگەکە بریتین لە $p=\dfrac{-625\pm 375}{-50}=\begin{cases}5\\20\end{cases}$



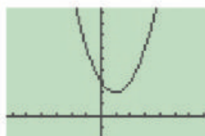

لە هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەکەوە $y=-25x^2+625x-2500$ دەردەکەوێت سۆزان قازانج دەکات ئەگەر نرخی کراسێك لە نێوان 5 و 20 هەزار دیناردا دابنێت.

خاڵی چاودێری  ئایا سۆزان قازانج دەکات ئەگەر نرخی کراسێك بە 20 هەزار دینار دابنێ؟

نموونە ③ لاسەنگەی $x^2-2x+3 \leq 0$ شیکاربکە وکۆمەڵەی شیکار لەسەر هێڵی ژمارەکان بنوێنە.




شیکار



هێڵکاری ڕونکردنەوەیی نەخشە دووجای پەیوەست بە لاسەنگەکەوە دەریدەخات کە بەهای نەخشەکە موجەبە، بەهای گۆڕاوی $x$ هەرچەندێك بێت.

واتە هیچ بەهایەك بۆ گۆڕانی $x$ نییە پاسادانی لاسەنگەکە بکات. دەتوانین بڵێن کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگەکە، کۆمەڵەی بەتاڵە.

# ڕاهێنان

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 ڕوونیبکەوە چۆن لاسەنگەی $x^2-2x-8\geq 0$ شیکاردەکەیت.

2 ڕوونیبکەوە چۆن هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی بۆ شیکاری لاسەنگەی $x^2-2x-8>0$ یارمەتیت دەدات.

3 ڕوونیبکەوە چۆن شیکاری لاسەنگەی $(x-2)^2<0$ بە بێ بەکارهێنانی هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی دەدۆزیتەوە.

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

4 لاسەنگەی $x^2-7x+12\geq 0$ شیکاربکە وکۆمەڵەی شیکار لەسەر هێڵی ژمارەکان بنوێنە.

5 بەها تەواوەکانی $x$ کامانەن؟ کە پاسادانی $-2x^2+25x-72>0$ دەکەن.

## ڕاهێنان وجێبەجێکردن

ئەم لاسەنگانە شیکاربکە وکۆمەڵەی شیکار لەسەر هێڵی ژمارەکان بنوێنە.

6 $x^2-1\geq 0$

7 $-x^2+5x-6>0$

8 $x^2-8x+12\leq 0$

9 $x^2-4x-5<0$

10 $x^2-7x+10\leq 0$

11 $50-15x>-x^2$

12 $x^2\leq\frac{3}{4}+x$

13 $x^2-x-12\leq 0$

14 $-x^2+\frac{3}{4}x-\frac{5}{9}>0$

15 $x^2-4x-12>0$

16 $x^2-2x-99>0$

17 $x^2+x-6\leq 0$

18 $x^2-x+20<0$

19 $x^2\leq 7x-6$

20 $x^2+35>-12x$

21 $10-x^2\geq 9x$

22 $x^2+10x+25>0$

23 $x^2+3x-18>0$

24 $x^2-2>x$

25 $x^2+6x\geq 7$

26 $15-8x\leq -x^2$

27 $-x^2+3x+6<0$

28 $4x-1>8-x^2$

29 $x^2+5x-7<4x$

**بەرەنگاربوونەوە**

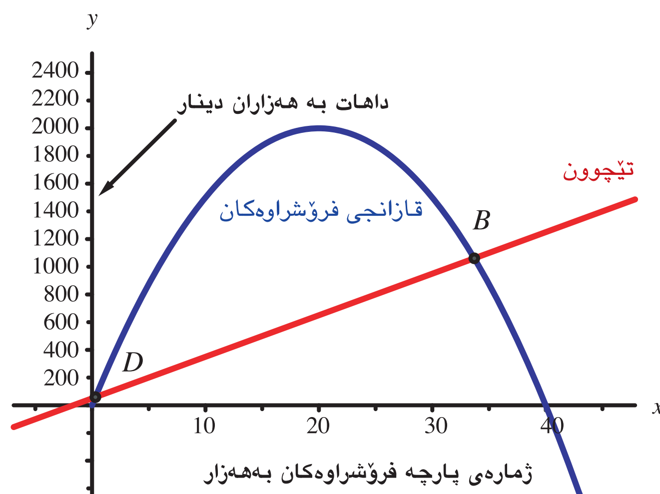
30 نەخشەیەکی دووجا بنووسە کە پاسادانی $f(x)\geq 0$ بکات بۆ بەهاکانی $x$ کە دەکەوێتە نێوان 2 و 6 بە بەهای هەردوو ژمارەکەشەوە.

31 لاسەنگەیەکی دووجا بنووسە کاتێك کۆمەڵەی شیکارەکەی ئەو بەهایانەی $x$ بن کە پاسادانی $x<3$ یان $x>7$ دەکەن.

**32** **وەرزش** لەسەرەتای دەست پێکردن لە یاری سەبەتەدا، ناوبژیوان تۆپەکە بە شێوەیەکی ستوونی هەڵدەدا. نەخشەی دووجای $h(t) = -16t^2 + 24t + 5$ نموونەیەکی بیرکارییە بۆ بەرزی تۆپەکە بە پێی کات، کاتێك $h$ بەرزی تۆپەکە و $t$ کات بنوێنێت، دیاریبکە لەکام دوو چرکەدا بەرزی تۆپەکە لە 9m بەرزتر دەبێت؟

**33** **بازرگانی** نەخشەی $y = -0.1x^2 + 8x - 50$ نموونەیەکی بیرکاریانەیە کە قازانج لە فرۆشتنی $x$ یەکە لەبەرهەمێکی پیشەسازی دەنوێنێت. کەمترین یەکەی فرۆشراو چەند بێت بۆ ئەوەی فرۆشیارەکە قازانج بکات؟

**34** **بازرگانی** یەکێك لە کۆمپانیاکان لێکۆڵینەوەیەکی ئەنجامدا بۆ تێچوونی بەرهەم و فرۆشتنی یەکێك لە بەرهەمەکانی، گەیشتە ئەوەی کە نەخشەی $C(x) = 50 + 30x$ نموونەیەکی بۆ تێچوونی بەرهەم هێنان ونەخشەی $R(x) = 5x(40 - x)$ نموونەیەکی بۆ داهاتی فرۆشتن، کاتێك $x$ ژمارەی پارچە فرۆشراوەکان بێت بە هەزاران. بەڵام قازانجی بە دەستهاتوو ئەم نەخشەیە دەینوێنێت $P(x) = R(x) - C(x)$ ئەم هێڵکاریە بەکاربهێنە بۆ وەڵام دانەوەی پرسیارەکان.




أ ژمارەی پارچە فرۆشراوەکان لە نێوان کام دوو بەهایەدا دەبن بۆ دەست کەوتنی قازانج.

ب ژمارەی پارچە فرۆشراوەکان چەند دەبن بۆ ئەوەی زۆرترین قازانج بکرێت.

ج ئایا گەورەترین تێچوون هەیە کە ناکرێت لێی تێپەربێت؟ ڕوونیبکەوە.

د هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی قازانج بکێشە.

هـ لەسەرەتای کام هێندەی فرۆشراو کۆمپانیاکە دەست بە زەرەرکردن دەکات.

## ڕوانینێك بۆ دواوه

هێڵكاری ڕوونكردنەوەیی ئەم پەیوەندیانە بكێشە، ئایا پەیوەندییەكە نەخشە دەنوێنین یان نا

**35** $y = |x|$

**36** $x = |y|$

**37** $x = y^2$

ئەم هاوكێشانە شیكاربكە بە هۆی نووسینی ڕەگە كە بە تەواوی.

**38** $-2x^2 = -16$

**39** $-3x^2 + 15 = -6$

**40** $32 = 2x^2 - 4$

## ڕوانینێك بۆ پێشەوه

**41** بەهای $b$ دیاریبكە بە جۆرێك هێڵكاری نەخشەی $y = x^3 - 2x^2 + 3x + b$ بەخاڵی $(1,9)$ دابڕوات.
پاسادانی وەڵامەكەت بكە بە لە جیاتیدانانی بەهای $b$ بە بەها دیاریكراوەكە. هێڵكاری ڕوونكردنەوەیی نەخشەكە بكێشە.

بەش پرۆژەی

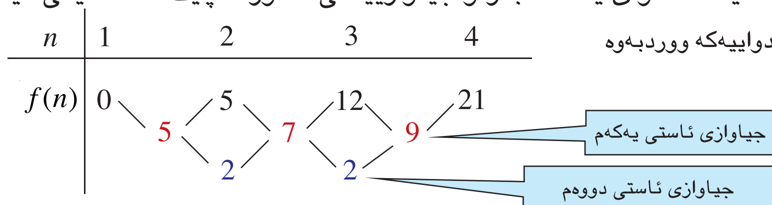
# جیاوازی چییە؟

زۆر لەیەك بەدوایەکە ژمارەییەکان لە نەخشەیەك پێك دێت کە پیناسەکراون. لەیەك بە دوایەکی دووجای ژمارەکان ووردببەرەوە.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | . . . | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S(n)$ | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | . . . | $n^2$ |

ڕادە یەکەمەکان لەم یەك لە دوای یەکەدا بریتین لە $1^2$، $2^2$، $3^2$، $4^2$، $5^2$، $6^2$، $7^2$ لە ڕادە یەکەمەکانی ئەم یەك بە دوای یەکە دەبینین ئەو ڕادەیەی ژمارەکەی $n$ بێت بریتییە لە $n^2$، لەوەشەوە دەتوانین بلێین نەخشەی $f(x)=x^2$ ئەو یەك بەدوای یەکە دروست دەکات کە ڕادە نونییەکەی $f(n)=n^2$ ئەویش بە لەجیاتیدانانی ژمارەی سروشتی $n$ بە گۆڕاوی $x$.

چۆن نەخشەك پێکدەهێنی لەیەك بەدواییەکێکەوە کە ڕادە یەکەمەکانی زانراوبێت؟ یەکی لەو ڕێگایانە، ڕێگای کۆتاییە جیاوازییەکانە. دەتوانیت ئەم ڕێگایە بەکاربێنیت کاتێ تێبینی دەکەیت کە یەك لە دوای یەکەکە بەرەو جیاوازییەکی نەگۆر دەچێت لە ئاستێکی دیاریکراودا. لەم یەك لە دواییەکە ووردببەوە




سەرنجی ئەوە بدە کە جیاوازییەکان لە ئاستی دووەمدا یەکسانن.ئەمەش وامان لێدەکات لەم بارەدا بە داوی نەخشەیەکی دووجادا بگەرێین بۆ پێکهێنانی یەك لەدوای یەکەکە.

بنووسە وەەوڵبدە بەهای هاوکۆلکەکان بە بەکارهێنانی بەهاکانی $n$ وڕادەکانی بەرامبەری بدۆزیتەوە.

$$f(n)=an^2+bn+c$$
$$f(1)=a(1)^2+b(1)+c=a+b+c$$
$$f(2)=a(2)^2+b(2)+c=4a+2b+c$$
$$f(3)=a(3)^2+b(3)+c=9a+3b+c$$
$$f(4)=a(4)^2+b(4)+c=16a+4b+c$$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $f(n)$ | $a+b+c$ | $4a+2b+c$ | $9a+3b+c$ | $16a+4b+c$ |
| | $3a+b$ | $5a+b$ | $7a+b$ | |
| | | $2a$ | $2a$ | |

بەراورد کردنی ئەم خشتەیە لەگەڵ خشتەی جیاوازییەکان ڕێگەدەدات بە نووسینی ئەو هاوکێشە کە هاوکۆلکەی نەخشە دووجاکان پاسادانی دەکەن.

$a+b+c=0$ $\qquad$ $3a+b=5$ $\qquad$ $2a=2$

سیستەمی ئەو هاوکێشانە بەدەستت هێناوە بە لەجیاتیدانان شیکاربکە.

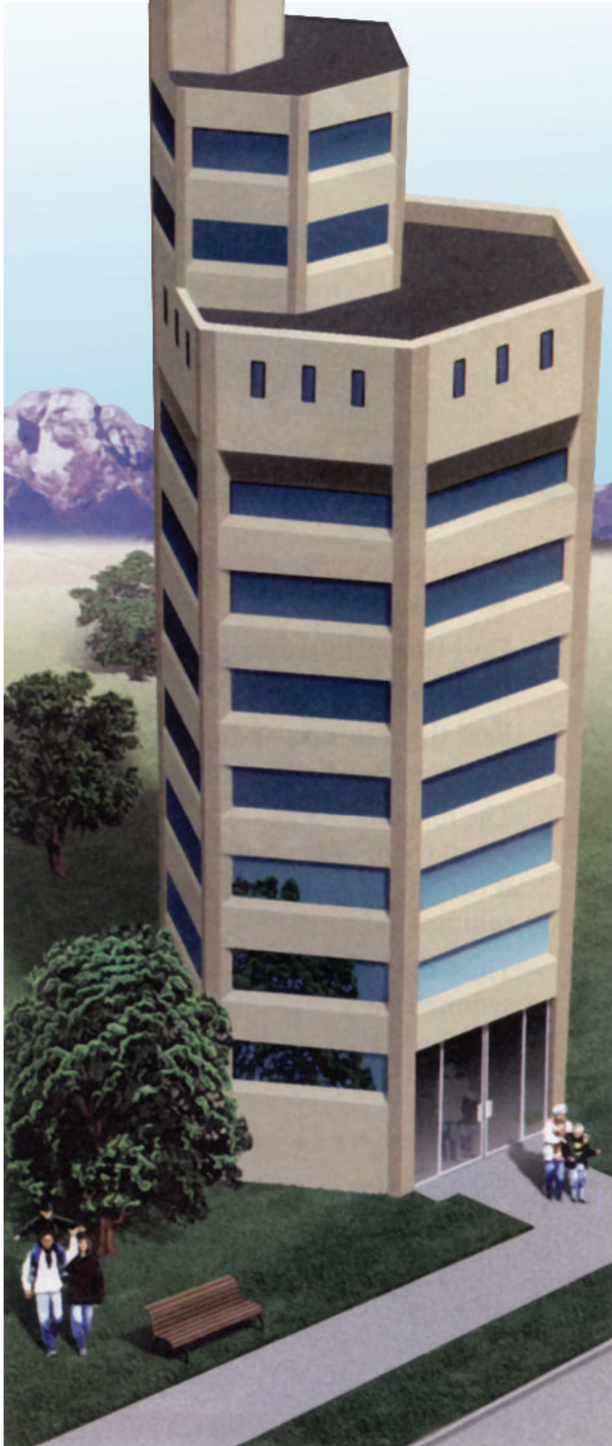
- $2a=2$ کەواتە $a=1$
- $3a+b=5$ کەواتە $b=2$

$3+b=5$

- $a+b+c=0$ کەواتە $c=-3$

$1+2+c=0$

پوختەی ئەمانەی پێشوو نەخشەی $f(n)=n^2+2n-3$ پێکدێنیت کەیەك لەدوای یەکە دراوەکەی لێوە دروست دەبێت.



لەئەنجامەکە دڵنیا بە بە لەجیاتی دانانی بەهای $n$ بە بەهاکانی 5 وە 6 وە 7 ئەگەر بزانیت یەك لە دوای یەکەکە بریتیە لە $0, 12, 21, 32, 45, 60,...$

## چالاکی 1 دیاریکردنی نەخشە دووجاکان

چەند کۆمەڵەیەك لە دوو خوێندکار یان زیاتر پێکبهێنە وسەرۆکێك بۆ هەر یەکێکیان دابنێ.سەرۆکەکە دوور لە هاورێکانی، نەخشەیەکی دووجا هەڵدەبژێرێت کە هاوکۆلکەکانی ژمارەی تەواو بن و بەکاری دەهێنێت بۆ دروستکردنی یەك بەدوای یەکێکی 5 ژمارەیی. سەرۆکەکە یەك بەدوای یەکەکە پیشاندانی ئەندامانی کۆمەڵەکە دەدات، داوای دۆزینەوەی نەخشەکەیان لێدەکات.

## چالاکی 2 دیاریکردنی هاوکێشەی دووجا بۆ ژمارە شەشیەکان

ئەندازیاریەکی تەلار سازی دیزاینی تەلارێکی واکێشاوە وەك لە وێنەکەدا دیارە ئەگەر سەیری تەلارەکە بکەیت شەش لارێکەکانی تیا دەبینێت کە هەر یەکێکیان لەناو ئەوی تریاندایە ئەم دیمەنەش وەك یەك بە دوایەکێك لە ژمارەکاندا دەنوێنێت. ئەگەر $n$ ژمارەی خاڵەکان بێت لە هەر لایەکی شەش لاکاندا، ئەوا ژمارەکانی یەکبەدوای یەکەکە ژمارەی خاڵەکان دەنوێنێت لە هەر شێوەیەك لە شێوە ئەندزەییەکان.



چوار ژمارەی یەکەم لەم یەك بەدوایەکە بنووسە ورێگای کۆتایی جیاوازەکان بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی نەخشەیەك کە لە یەك بەدوایەکەکە پەیدا دەبێت.

# 3

# پێداچوونەوەی بەش

ئەم نەخشانە لەسەر شێوەی گشتی بنووسە و دیاریکە کە نەخشەی دووجان.

1 $f(x)=-(x+1)(x-4)$

2 $f(x)=4(2x-1)(3x+2)$

وێنەی ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە بکێشە و پۆتانی سەری نەخشەکە بەنزیکراوەیی دابنێ:

3 $f(x)=-x^2+3x-1$

4 $f(x)=5x^2-x-12$

ئایا ئەم برگە هاوتایانە بۆ سەرەوە یان خوارەوە کراون؟ ئایا نەخشەکە بەهای گەورەترین یان بچووکترینی هەیە؟

5 $f(x)=-x^2-x-1$

6 $f(x)=(x-3)(x+2)$

ئەم هاوکێشانە شیکاربکە وشیکاری تەواو بنووسە کە نزیکرابێتەوە بۆ نزیکترین بەش لە سەد.

7 $x^2=8$

8 $3x^2=60$

9 $x^2-3=46$

10 $x^2+4=9$

11 $(x-3)^2=64$

12 $(x-5)^2=48$

13 $7(x+1)^2=54$

14 $6(x+2)^2=30$

ئەم هاوکێشانە بە شیتەڵکردن شیکاربکە.

15 $x^2-10x+24=0$

16 $2x^2-3x-2=0$

17 $6t^2+11t-10=0$

ئەم هاوکێشانە بە تەواوکردنی دووجا شیکاربکە.

18 $x^2-10x+21=0$

19 $x^2-7x-8=0$

20 $4x^2+4=17x$

ئەم نەخشانە بە شێوەی پێوانەیی بنووسە وپۆتانی سەرەکانی بنووسە.

21 $f(x)=2x^2-16x+33$

22 $f(x)=-3x^2-6x-7$

ئەم هاوکێشانە بە ڕێگای یاسا شیکاربکە.

23 $x^2-7x=-10$

24 $6x=2-5x^2$

25 $x^2=1-x$

26 $2x+1=2x^2$

27 $x^2+6x=-8$

28 $11x=5x^2-3$

29 $x=6x^2-3$

30 $3=x^2+5x$

پۆتانی سەری ئەم برگانە دیاریکە.

31 $f(x)=x^2+7x+6$

32 $f(x)=x^2-x-12$

33 $f(x)=x^2+2x-3$

34 $f(x)=x^2+12x+5$

ژمارەی ڕەگەکانی ئەم هاوکێشانە دیارییکە بە بەکارهێنانی جیاکەرەوە

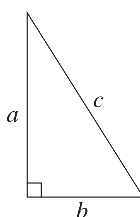
35 $4x^2-20x=-25$

36 $9x^2+12x=-2$

37 $x^2=21x-110$

38 $-x^2+6x=10$

درێژی لا نەزانراوەکە لەم سێگۆشە وەستاوە بدۆزەوە. وەڵامەکەت بۆ نزیکترین دە نزیکبکەوە.




39 $b=5;\ a=4$

40 $a=1;\ c=4$

41 $c=12;\ b=7$

42 $c=15;\ a=12$

43 $b=5;\ c=25$

44 $a=6;\ b=6$

45 $c=5.8;\ b=3.2$



# تاقیکردنەوەی بەش

ڕێسای ئەم نەخشانە بەشێوە گشتی $f(x)=ax^2+bx+c$ بنووسە وهاکۆلکەکانی دیاریبکە. ڕووی کرانەوەی برگە هاوتاکە دیاریبکە وئایا سەرەکانی گەورەترین یان بچووکترین بەهای هەیە.

**1** $f(x)=(x+3)(x-4)$

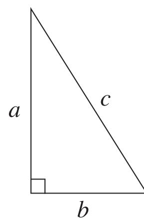
**2** $f(x)=-5(x+1)(x-7)$

**3** $f(x)=-2(x+3)(3x)$

هەر یەك لەم هاوکێشانە شیکاربکە بە نووسینی ڕەگە تەواوەکەی، پاشان نزیکیبکەوە بۆ نزیکترین بەش لە سەد.

**4** $3x^2=81$ **5** $(x-7)^2=12$

درێژی لای سێیەمی ئەم سێگۆشە گۆشە وەستاوە بدۆزەوە بۆ نزیکترین دە نزیکبکەوە.




**6** $a=7$ ؛ $b=9$

**7** $a=2$ ؛ $c=4$

**8** $b=8$ ؛ $c=9.2$

شیتەڵکردن ولێکدانی سفری بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی سفری ئەم نەخشە دووجایانە.

**9** $f(x)=-x^2-9x$

**10** $f(x)=4x^2-64$

**11** $f(x)=4x^2-4x+1$

**12** $f(x)=x^2-3x-10$

**13** **بیردۆزی ژمارەکان**: ئەگەر ئەنجامی لێکدانی دوو ژمارە 90 بێت ژمارەیەکیان 3 ی زیاتر بێت لە دوو ئەوەندی ئەوی تریان . هاوکێشەیەکی دووجا بنووسە کە ڕەگەکانی ئەم دوو ژمارەیە بن، پاشان بە شیتەڵکردن و بە بەکارهێنانی لێکدانی سفری هاوکێشەکە شیکار بکە.

ئەم هاوکێشە دووجایانە بە تەواوکردنی دووجا شیکاربکە

**14** $x^2-8x+4=0$

**15** $2x^2-11x+5=0$

**16** **ئەندازە**: ئەگەر ڕووبەری سێگۆشەیەك 30 مەتر دووجا بێت، وبەرزیەکەی 4 مەتر لە درێژی بنکەکەی کەمتر بێت.درێژی بنکەو بەرزییەکەی بدۆزەوە.

ئەم هاوکێشە دووجایانە بە یاسا شیکاربکە.

**17** $x^2-2x-5=0$

**18** $-3x^2+15=12x$

هاوکێشەی تەوەرەی هاوجێبوون و پۆتانی سەری برگە هاوتایەکان بنووسە.

**19** $y=x^2-7x+10$

**20** $y=3x^2+18x+6$

بڕی جیاکەرەوە بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی ژمارەی ڕەگەکانی ئەم هاوکێشە دووجایانە.

**21** $x^2-8x+4=0$

**22** $-3x^2=5+3x$

**23** $4x^2=27$

ئەم لاسەنگە دووجایانە شیکاربکە وشیکارەکە لەسەر تەوەرەی ژمارەکان بنوێنە.

**24** $x^2-x-12>0$

**25** $-2x^2+4x+6\geq 0$

**26** $2\leq x^2+4x-3$

**27** $1>-x^2-2x-6$

# 3 تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

**1** ژمارەی ڕەگەکانی هاوکێشەی $5x^2+2x+1=0$ لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستیەکاندا چەندن؟

أ $2$ ب $0$
ج $1$ د جگە لەمانە

**2** کام لەم جووتە ڕێکخراوانە شیکاری سیستمی ئەم هاوکێشەهێڵییە دەکات

$$\begin{cases}5x+y=11\\3x+2y=8\end{cases}$$

أ $(2, 1)$ ب $(3, 2)$
ج $(-1, 2)$ د $(5, 6)$

**3** بڕی $\frac{x^2y^{-1}}{x^{-3}y^2}$ کورت بکەرەوە.

**4** شیتەڵکردنی ڕادەداری $x^2+5x+6$ بریتییە لە

أ $(x+1)(x+6)$
ب $(x-2)(x-3)$
ج $(x-1)(x-6)$
د $(x+2)(x+3)$

**5** کام لەو ووشانە باسی شیکاری سیستمی دوو هاوکێشەی $\begin{cases}2x+5y=3\\4x+10y=6\end{cases}$ دەکات.

أ ئەستەمە ب سنووردراو نییە
ج سنووردراوە د هیچ لەمانە

**6** بەڕوونکردنەوەیی لاسەنگەی $-\frac{1}{3}x\le 6$ شیکاربکە.

**7** سیستمی هاوکێشەی هێڵی $\begin{cases}3x-2y=2\\x+y=4\end{cases}$ شیکاربکە.

**8** هاوکێشەی $x^2+3x+1=0$ شیکار بکە.

**9** ڕێسایەکی نەخشە بنووسە هێلکاری ڕوونکردنەوەکەت دەست دەکەوێت لە هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی $f(x)=x^2$ کە بە شێوەیەکی ئاسۆیی 3 یەکە بەرەو لای چەپ بکێشەوە.

**10** بەهای نەخشەی $f(x)=11-\frac{1}{2}x$ چەندە کاتێك $x=-6$ ؟

**11** **کیمیا** زانایەك دەیەوێت 60 مل لە گیراوەیەك ئامادە بکات، کە ڕێژەی سوێرییەکەی تیایدا 5% بێت بە بەکارهێنانی دوو گیراوە کە ڕێژەی سوێری لەیەکەمیاندا 2% و لە دووەمیاندا 12% یە پێویستە چەند لەهەریەکێك لەو دوو گیراوەیە بەکاربێت؟

**12** بەهای $8^{\frac{2}{3}}$ چەندە؟

**13** بڕی $\frac{(3^2-7)^2}{3^{(2^2-1)}}$ کورتبکەوە.

**14** بڕی جیاکەرەوەی هاوکێشەی $x^2+4x+1=0$ هەژماربکە.

**15** جۆری ئەوپەڕی بەهای نەخشەی $f(x)=-x^2+2x+1$ دیاری بکە (گەورەترین یان بچووکترینە) پاشان بەهاکەی بدۆزەوە.

**16** **فیزیا** دیلان تۆپێکی لەبەرزی 3 م بەردایەوە بە نزیکەیی بۆ نزیکترین دەیەك لە چرکەیەکدا کاتی پێویستە چەندە؟ بۆ ئەوەی تۆپەکە بگاتە سەر زەوی. نەخشەی $h(t)=-5t^2+3$ بەکاربێنە کاتێك $h$ بەرزی بێت بە مەتر و t کات بێت بە چرکە.

**17** **بازرگانی** کۆمپانیایەکی کوردستان جۆرێکی تایبەت لە بژمێر دەفرۆشێت نەخشەی :

$$P(x)=-x^2+90x+497975$$

کاتێك کە $x$ نرخی بژمێرە و $P$ قازانجی کۆمپانیاکە بێت. ئەو نرخە چەندە کە زۆرترین قازانج بۆ کۆمپانیاکە دەستەبەردەکات وەڵامەکەت بە نزیککراوەی بە دینار بنووسە.

## بەشی چوارەم

# بڕەكان و نەخشە ڕادەدارەكان

# Polynomial Functions and Expressions

1. ڕادەدارەكان.
2. نەخشە ڕادەدارەكان.
3. لێكدان و دابەشكردنی ڕادەدارەكان.
4. هاوكێشە و لاسەنگە ڕادەدارەكان.

پڕۆژەی بەشەكە

پێداچوونەوە

تاقیكردنەوەی بەش

تاقیكردنەوەی كەڵەكەبوو

# بڕەکان و نەخشە ڕادەدارەکان

## Polynomial Functions and Expressions

بەشی

4

زۆرجار ڕادەدارەکان بەکاردەهێنین بۆ هەژمێرکردنی یاسای ڕووبەر و قەبارەکان، بەکاریش دێت بۆ ئەو پێداویستییانەی کە پەیوەندیان بە هێزی کێشکردن و بەکاربەرەوە هەیە. هەروەها بەکاریش دێت لە زۆر پێداویستی تری ژیانی ڕۆژانەمان. نموونەش بۆ ئەوە بەکارهێنانی لە هەژمێرکردنی قەبارەی ئەو تەلارە نارێکانەی کە لەوێنەکەوە دەیبینیت.

لەم بەشەدا ئەوە فێردەبیت کەچۆن کردارەکان لەسەر نەخشە ئەنجام دەدرێت و چۆن هێڵکاری ڕوونکردنەوەییەکەی دەکێشین و ڕەگەکانی دیاریدەکەین.

**وانەکان**

1. ڕادەدارەکان.
2. نەخشە ڕادەدارەکان.
3. لێکدان و دابەشکردنی ڕادەدارەکان.
4. هاوکێشە و لاسەنگە ڕادەدارەکان.

پڕۆژەی بەشەکە

## دەربارەی پرۆژەی بەش

لەم بەشەدا نەخشەی ڕادەدار بەکاردێنین بۆ پێکهێنانی چەند نموونەیەك بۆ بارەکانی ژیانی ڕۆژانە. پەیوەندییەکەش کاتێك نموونەیی دەبێت کە وەڵامی تەواوی پێداویستییەکانمان بداتەوە. لەکاتی ئیشکردنت لەم بەشە، ئەو شێوە دەفرانە دەخەمڵێنیت بە بەکارهێنانی نەخشەی ڕادەدار کە پێکیدێنیت لەپەیوەندی نێوان قەبارەی ئەو ئاوەی لە دەفرەکەدایە لەگەڵ بەرزییەکەی.

دوای تەواوبوونت لە بەشەکە توانای ئەمانەی خوارەوەت دەبێت:

- کۆکردنەوە وڕێکخستنی پێدراوەکان.
- نەخشەیەکی ڕادەدار پێکبێنیت کە نزیك بێت لە پەیوەندی نێوان پێدراوەکان.
- دڵنیا دەبیت لە ڕاستی نموونەکە.



وانەی 1

# ڕادەدارەکان

# Polynomials

## ئامانجەکان

- ڕادەدارەکان دەناسێت وپلە و هاکۆلکەکانیان جیادەکاتەوە.
- بەهای ڕادەدارەکان بە لەجیاتیدانان دەدۆزێتەوە.
- ڕادەدارەکان کۆدەکاتەوە ولێکیان دەردەکات.



**بۆچی**

ڕادەدارەکان بەکاردێت بۆ دروست کردنی زۆر لە نموونەی پێداویستییەکانی ژیانی ڕۆژانەمان.

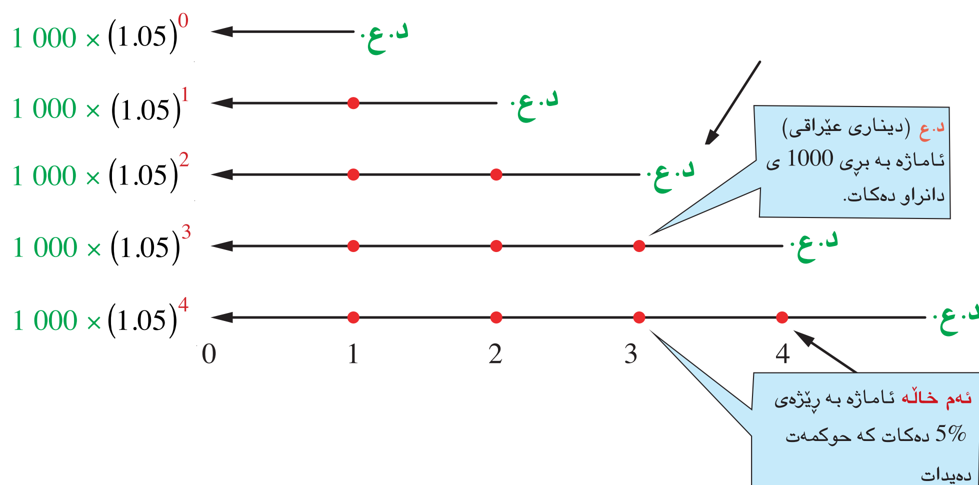
**جێبە جێکردنەکان**

**پاشەکەوت**

لە یەکێك لە وڵاتەکان حکومەت سندوقێکی تایبەتی داناوە کە هانی کرێکاران دەدات پارە دابنێن و بۆیان کۆبێتەوە، تاوەکو لە پیریدا کەڵکی لێوەربگرن. هەرکرێکارێك لە سەرەتای هەموو ساڵێکدا 1000 دینار دادەنێت وحکومەتیش5% ئەو پارەیە لە سندوقەکەدا بۆ هەر کرێکارێك دادەنێت کە لە ساڵی سفرەوە دەست پێدەکات.

هێڵکاری خوارەوە زیادبوونی پارەی دانراوی ڕزگار دەنوێنێت لەماوەی 4 ساڵدا.

خشتەی خوارەوە پارەی دانراوی رزگار لە کۆتایی هەر ساڵێکدا دیاریدەکات.




10 000

| کۆتایی ساڵ | پارەی دانراو |
|---|---|
| سفر | 1000 |
| 1 | $1000 + 1000(1.05)$ |
| 2 | $1000 + 1000(1.05) + 1000(1.05)^2$ |
| 3 | $1000 + 1000(1.05) + 1000(1.05)^2 + 1000(1.05)^3$ |
| 4 | $1000 + 1000(1.05) + 1000(1.05)^2 + 1000(1.05)^3 + 1000(1.05)^4$ |

ئەگەر حکومەت ڕێژەی 6% یان 7% یان 8% لە جیاتی 5% دابنێت تەنها ئەوەت لەسەرە کە ژمارەی 1.05 بگۆڕێت بۆ ژمارەی 1.06 یان 1.07 یان 1.08 .

ئەگەر هێمای $x$ دابنێی بۆ ئەو ژمارە گۆڕاوە، دەتوانیت پارەی دانراوی ڕزگار بەم شێوەیە بنوسیت:

$$1000 + 1000x + 1000x^2 + 1000x^3 + 1000x^4$$

بەم جۆرە برانەش پێیان دەوترێت بڕی زۆر ڕادەدار **Polynomial Expression** کە بریتییە لە کۆی کۆمەڵێك بڕی سادەتر کە پێی دەوترێت ڕادە

ڕادە **Term** بریتییە لە هێندێکی جەبری پێکدێت لە ئەنجامی لێکدانی ژمارەیەك لە گۆڕاوێك یان زیاتر وەك: بڕی $3x^2b$ لەوانەیە تەنها یەك گۆڕاوی تێدابێت. وەك $5x^2$ یان تەنها ژمارە بێت وەك ژمارە 10 لەم کاتەدا پێی دەوترێت ڕادەی **نەگۆڕ Constant Term** ژمارە لە ڕادەی جەبری پێی دەوترێت **هاوکۆلکە** یان **بەشە نەگۆڕەکە Constant Part** بەڵام بەبەشەکەی تر دەوترێت **گۆڕاو Variable Part** . بۆ نموونە:

- هاوکۆلکەی $x$ بریتییە لە 1 و بەشە گۆڕاوەکەی $x$ .
- هاوکۆلکەی $-2xb$ بریتییە لە $-2$ و بەشە گۆڕاوەکەی $xb$ .
- هاوکۆلکەی $\frac{-b^3x^2}{2}$ بریتییە لە $-\frac{1}{2}$ و بەشە گۆڕاوەکەی $b^3x^2$ .
- هاوکۆلکەی $-bc$ بریتییە لە $-1$ و بەشە گۆڕاوەکەی $bc$ .

**پلەی ڕادەکە Degree of Term** بریتییە لە توانی گۆڕاوەکە ئەگەر تاکانە بێت. بەڵام ئەگەر لە گۆڕاوێك زیاتر بێت بریتییە لە کۆی توانی گۆڕاوەکان، بۆ نموونە پلەی ڕادەی $\frac{-b^3x^2}{2}$ بریتییە لە 5 .

ڕادەدار **Polynomial** بریتییە لە کۆی چەند ڕادەیەك، لەم وانەیەدا فێری ڕادەداری یەك گۆڕاو دەبێت. هەندێك ڕادەدار بەناوی تایبەتی دەناسرێنەوە. ئەو ڕادەدارەی لە دوو ڕادە پێکدێت پێی دەوترێت ڕادەداری **دوانی Bionomial** و ئەوەی لە سێ ڕادە پێکدێت پێی دەوترێت ڕادەداری **سیانی Trinomial** . **پلەی ڕادەدار Degree of Polynomial** بریتییە لە گەورەترین توانی ڕادەکانی کە ئەو ڕادەدارە پێك دەهێنن دەتوانین ڕادەدارەکان بە پێی پلەکانیان پۆلین بکەین وەك لەم خشتەیەدا ڕووندەبێتەوە.

| پۆلێنکردنی ڕادەدارەکان بە پێی پلەکانیان | | |
|---|---|---|
| **پلە** | **ناوەکەی** | **نموونە** |
| سفر | نەگۆڕە | 3 |
| 1 | هێڵییە | $5x+4$ |
| 2 | دووجاییە | $-x^2+5x-11$ |
| 3 | سێجاییە | $4x^3+x^2+2x+3$ |

**نموونە** 1

پلەی ئەم ڕادەدارانە چەندە؟

أ $4x^2-3x+6x^5$

ب $-2x^3+3x^4+4x^3+5$

أ پلەی هەر ڕادەیەك لە ڕادەکانی ڕادەدارەکە یەك لەدوای یەك بریتیە لە 2 و 1 و 5 لەوەشەوە پلەی ڕادەدارەکە ( 5 )ە.

ب پلەی هەر ڕادەیەك لە ڕادەکانی ڕادە دارەکە یەك لەدوای یەك بریتیە لە 3 و 4 و 3 و سفر لەوەشەوە پلەی ڕادەدارەکە ( 4 )ە.

**هەوڵبدە** پلەی ئەم ڕادەدارانە دیاریبکە.

أ $4x^2+4-8x-4x^3$

ب $3x^3+2x^3-6x^5$

## Evaluating Polynomials هەژمارکردنی بەهای ڕادەدارەکان

لە نموونەی(2) وە بۆت دەردەکەوێت چۆن ڕادەدار لە ژیانی ڕۆژانەدا بەکاردێت.

**نموونە** 2

پارەی دانراوی ڕزگار لە کۆتایی ساڵی چوارەمدا چەندە؟ ئەگەر حکومەت ڕێژەی **6%** ی دانا لە جیاتی **5%** ؟

**شیکاری**

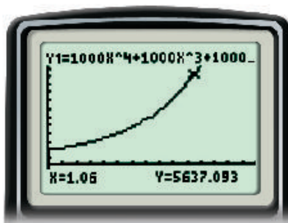
**لە جیاتیدانان بەکاربێنە**

$$y=1000+1000x+1000x^2+1000x^3+1000x^4$$

$$1000+1000(1.06)+1000(1.06)^2+1000(1.06)^3+1000(1.06)^4=5637.09$$

**ڕێگای دووەم : بە بەکارهێنانی بژمێرەی ڕونکردنەوەیی (ئەگەر هەبێت)**

نەخشەی $y=1000+1000x+1000x^2+1000x^3+1000x^4$ لە ناو بژمێرەکەدا بنووسە بۆ بەدەستهێنانی خشتەی بەهاکان یان وێنەی ڕونکردنەوەیی نەخشەکە.




بەهای $y$ بریتیەلە 5637.07 بەنزیکەیی

**هەوڵبدە** بەهای ڕادەدار $3x^4+2x^2+2x-5$ هەژماربکە کاتێك $x=1.5$

## Adding and Subtracting Polynomials کۆکردنەوە و لێکدەرکردنی ڕادەدارەکان

بۆ کۆکردنەوە و لێکدەرکردنی ڕادەدارەکان تەنها هاوکۆلکەی ڕادە لە یەکچووەکان کۆ دەکەرێتەوە یان لەیەکیان دەردەکەین. ڕادە لە یەکچووەکان ئەوانەن کە توانی گۆڕاوەکانیان یەکسانن. پاش کرداری کورت کردنەوە ڕادەدارەکە بە شێوەی گشتی بنووسە.

شێوەی گشتی **Standard Form** بریتییە لە ڕیزکردنی ڕادەکان لە توانی گەورە بۆ بچووك.

نموونه 3 $(-2x^2-3x^3+5x+4)+(-2x^3+7x-6)$ کۆبکەوە.

شیکار

$$(-2x^2-3x^3+5x+4)+(-2x^3+7x-6) = (-3x^3-2x^3)+(-2x^2)+(5x+7x)+(4-6)$$
$$= -5x^3-2x^2+12x-2$$

هەوڵبدە $(2x^4+4x^3+5x-2)+(-2x^4-7x^2+8x-10)$ کۆبکەرەوە.

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە رادەداری $p$ بدۆزەوە کە پاسەدانی $(2x^2-3x+5)+p=0$ دەکات.

نموونه 4 $(-6x^3-6x^2+7x-1)-(3x^3-5x^2-2x+8)$ لێدەربکە.

شیکار

$$(-6x^3-6x^2+7x-1)-(3x^3-5x^2-2x+8) = (-6x^3-3x^3)+(-6x^2+5x^2)+(7x+2x)+(-1-8)$$
$$= -9x^3-x^2+9x-9$$

هەوڵبدە $(3x^3-12x^2+5x+1)-(-x^2+5x+8)$ لێدەربکە.

# ڕاهێنان

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 بە دەربڕینی خۆت ڕادەدار پێناسەبکە.

2 چۆن پلەی ڕادەدارێك دیاریدەکەیت، ئەوە ڕوونبکەرەوە.

3 ڕوونیبکەوە چۆن دوو ڕادەدار کۆدەکەیتەوە و لەیەکتریان دەردەکەیت.

4 ڕوونیبکەوە چۆن هەژمێری بەهای ڕادەدار دەکەیت ئەگەر بەهای گۆڕاوەکەیت زانی.

5 ڕوونیبکەوە چۆن ڕادەدار بە شێوەی گشتی دەنووسیت.

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

پلەی هەر ڕادەدارێك چەندە؟

6 $3x^3-12x^2-5x-12x^5+1$

7 $3x^{10}+3x^2+2$

8 بەهای ڕادەداری $x^3+2x^2-x+1$ هەژماربکە کاتێك $x=2$ .

9 $(2x^3+3x^2-x+2)+(-3x^2+4x+5)$ کۆبکەوە.

10 $(6x^3-5x^2+14x+3)-(3x^3-2x^2+7x-2)$ لێدەربکە.

## ڕاهێنان وجێبەجێکردن

ئەم ڕادەدارانە بە شێوەی گشتی بنووسە.

11 $5x^3+4x+2x^2+1$

12 $4x^4+x^2+x^3+x+1$

13 $2.7x^3+3.3x^8+4.1x^2$

14 $\frac{13}{25}x^4+\frac{5}{7}x^3+\frac{3}{5}x^5+\frac{1}{2}$

ئایا ئەم برانە ڕادەدار دەنوێنن؟ ئەگەر وەڵامەکە بەڵێیە پلەی ڕادەدارەکە دیاریبکە.

15 $7x^5+3x^3-2x+4$

16 $-4x^2+3x^3-5x^6+4$

17 $x^3+2^x-x-7$

18 $4x^2+5x^2-x+1$

19 $0.35x^4+2x^2+3.8x$

20 $7.81x^4+8.9x^3+2.5x^2$

21 $\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x}+6$

22 $\frac{8}{x^3}-\frac{7}{x^2}+x$

23 $\frac{5}{7}x^6+\frac{2}{3}x^4+5$

24 $\frac{x^5}{7}-\frac{x^3}{3}$

25 $\sqrt{x}-1$

26 $7x\sqrt{x}+4$

هەژمێری بەهای ڕادەدارەکە بکە کاتێك $x$ بەها پێدراوەکە وەربگرێت.

27 $x=-3$ ؛ $x^3+x^2+1$

28 $x=-2$ ؛ $x^4+2x^3+2$

29 $x=4$ ؛ $-2x^3-3x+2$

30 $x=3$ ؛ $-4x^3+1+x$

31 $x=5$ ؛ $3x^3+x^2+2x+4$

32 $x=6$ ؛ $5x^3+2x^2-5x+2$

33 $x=2.5$ ؛ $1+x^2-3x^3$

34 $x=3.8$ ؛ $5x^3+4x+2x^2+1$

35 $x=2$ ؛ $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{8}x+\frac{7}{8}$

36 $x=10$ ؛ $\frac{3}{10}x^3+\frac{7}{10}x^2+\frac{1}{10}x+\frac{9}{10}$

ئەمانە کۆبکەوە یان لەیەکتریان دەربکە، پاشان ئەنجامەکەت لەسەر شێوەی گشتی بنووسە ویلەکەی دیاریبکە.

37 $(x^3+x^2+x+1)+(2x^3+3x^2+x+3)$

38 $(x^5+x^3+x)+(x^4+x^2+1)$

39 $(1-5x+x^3)-(2x^4+5x^3-10x^2)$

40 $(5x^3+3x^2+8x+2)-(2x^2+4x+7)$

41 $(2x^2-5x+3)+(4x^3+6x^2-2x+5)$

42 $(x^2-5x^3+7)-(6x+x^3+3x^2)$

43 $(x^4+5x^2+x)-(x^4+2x^3+x-4)$

44 $(8x^2+x^3+1-3x)+(2x^3+11x^4)$

45 $(\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}x^3+1)+(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x)$

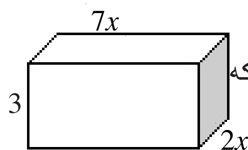
46 $(-3.2x^2+2.7x^3+7.8x)+(4.9x^3+2.5x^4)$

بەهای $a, b, c, d$ دیاریبکە تا یەکسانییەکە ڕاست بێت.

47 $(11x^3+ax^2-x+b)-(4x^3-3ax+5)=cx^3-2x^2+dx-1$

48 $(ax^3+2x^2+cx+1)$ بە $(5x^3-3)$ زیاترە لە $(3x^3+bx^2+d-7x)$ .

بەستنەوە




49 ئەندازە بەپێی $x$ بڕی جەبری بۆ ڕووبەری گشتی پاکەتێك هەژماربکە کە درێژی بنکەکەی $7x$ وپانییەکەی $2x$ و بەرزیەکەی 3 بێت.

جێبە جێکردنەکان

50 پیشە سازی بەزۆری ڕادەدارەکان بەکاردەهێنرێت بۆ دەربڕینی تێچوونی بەرهەمێك لە بەرهەمەکانی پیشەسازی.$10^{11}$

ئەگەر تێچووی بەرهەمی $x$ پارچە لە $C(x)=x^3-15x+15$ بێت، تێچوونی 10 000 پارچە چەندە؟

51 پیشە سازی ئەگەر تێچوونی بەرهەمی $x$ پارچە $c(x)=3x^3-18x+45$ بێت تێچوونی 20 000 پارچە چەندە؟

## ڕوانینێك بۆ دواوە

ئەمانە شیتەڵبکە.

52 $6(x^2-4x)$

53 $8(x^2+6x)$

ئەم هاوکێشانە شیکاربکە.

54 $\frac{6x-12x+18}{3}=1$

55 $-2(b+3)=5-6(2b-7)$

56 سستەمی هێڵی $\begin{cases}6x=4-2y\\12x-4y=16\end{cases}$ شیکاربکە.

ئەم ژمارانە بە شێوەی زانستی بنووسە.

57 7 100 000

58 8 900 000 000

## ڕوانینێك بۆ پێشەوە

59 چوارگۆشەیەك ڕووبەرەکەی دەکاتە $x^2+6x+9$ درێژییەکەی بەپێی $x$ هەژمێربکە.

وانەی
2

# نەخشە ڕادەدارەکان Polynomial Functions



بۆچی

هەردوو ڕێسای هەژمارکردنی قەبارە و ڕووبەری گشتی دوو نموونەن بۆ نەخشەی ڕادەدار بەکاردێت بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی ژیانی ڕۆژانەدا وەک لە پیشەسازیدا.

**ئامانجەکان**

- نەخشەی ڕادەدار دەناسێتەوە.
- هێڵکاری ڕونکردنەوەیی نەخشەی ڕادەدار دەکێشێت و باسی شێوەکەی دەکات.
- ئەو پرسیارانە شیکاردەکات کە نەخشەی ڕادەداری تێدایە .
- بەهای ئەوپەڕی نەخشە دەناسێت.
- لە گۆڕانی نەخشەی ڕادەدار دەکۆڵێتەوە.

لاڤە کە بەڕێوەبەری کۆمپانیایەکی بەرهەمهێنانی پاکژکەرەوەیە، دەیەوێ دوورییەکانی قوتوی هەڵگرتنی پاکژکەرەوەکان دەستکاری بکات.

لەبەشەکانی پێشوو هەندێك نەخشەی وەك نەخشەی هێڵی و نەخشەی دووجات ناسی، ئەوانە دوو باری تایبەتی نەخشەبوون لە نەخشە ڕادەدارەکان.

**نەخشە ڕادەدارەکان Polynomial Functions**

نەخشەی ڕادەدار: ئەو نەخشەیە کە بە شێوەی ڕێسایەکی ڕادەداری یەك گۆڕاو دەنوسرێت.

## چالاكی

## Exploring Polynomial Functions دۆزینەوەی نەخشەی ڕادەدار

کۆمپانیایەکی بەرهەمهێنانی پاکژکەرەوە بەرهەمەکانی دەخاتە قوتویەکی لاکێشەتەریبی کە درێژییەکەی 20 cm وپانییەکەی 10 cm وبەرزییەکەی 30 cm بێت. بەرێوەبەری کۆمپانیایەکە دەیەوێت دەستکاری دوورییەکانی قوتوکە بکات.

1. قەبارە و ڕووبەری گشتی قوتوکە پێش دەستکاری کردن چەندە؟
2. ئەگەر بەرێوەبەرەکە بیەوێت قەبارە و ڕووبەری گشتیی قوتوکە بەرێژەی 10% کەمبکاتەوە، ئەوا قەبارە و ڕووبەری گشتی قوتوە پەیدابوکە چەندن؟
3. بەرێوەبەر بڕیاریدا کە بەرزییەکەی نەگۆڕێت بەلاَم درێژییەکەی دوو ئەوەندەی پانییەکەی بێت. قەبارە وڕووبەری گشتییەکەی بە پێی پانییەکەی بەگۆڕاوی $x$ بدۆزەرەوە.
4. ئەو خشتەیەی بەرامبەر تەواو بکە.
5. بەهای $x$ چەند دەبێ کەوا لە قەبارەکەی بکات نزیك بێتەوە لە قەبارەی داواکراو؟ئەم بەهایە وا لە ڕووبەری گشتی دەکات نزیکبێتەوە لە ڕووبەری گشتی داواکراو؟ ڕوونیبکەرەوە.

| X | ڕووبەر | قەبارە |
|---|---|---|
| 9.0 | 1944 | 4860 |
| 9.1 | | |
| 9.2 | | |
| 9.3 | | |
| 9.4 | | |
| 9.5 | | |

جێبەجێکردنەکان

پیشە سازی

✓ خاڵی چاودێری

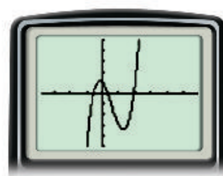
## نمـــوونـــه 1

هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە بکێشە و باسی شێوەکەی بکە.

أ $y=3x^3-5x^2-2x+2$ ب $y=x^4-2x^2+2$

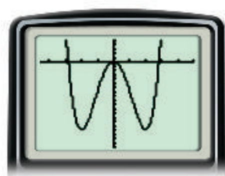
شیکار

أ



هێڵکاری ئەو نەخشەیە سێجایە لە پیتی لاتینی n دەچێت ودوو جێگۆڕکێی تێدایە یەکێکیان بە شێوەی ∪ و دووەمیان بە شێوەی ∩

ب



هێڵکاری ئەو نەخشە پلە چوارە لە پیتی لاتینی W دەچێت و سێ جێگۆڕکێی تێدایە و دووانیان بە شێوەی ∪ و سێیەمیان بە شێوەی ∩ .

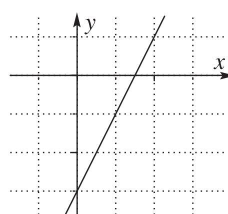
**هەوڵبدە**

هێڵکاری ڕوونکردنەوەی هەریەك لەم نەخشانە بکێشە و باسی شێوەکەی بکە.

أ $y=-3x^3-2x^2+2x+1$ ب $y=2x^4-3x^2+x+2$

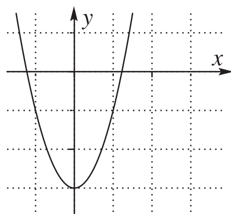
سەرنجی هێڵکاری ڕوونکردنەوەی هەریەك لە نەخشەی هێڵی ودووجا وسێجا وچوارجا لەم وێنانەدا بدە.

نەخشەی هێڵی



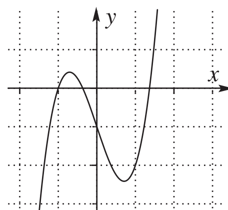

$y=2x-3$

نەخشەی دووجا



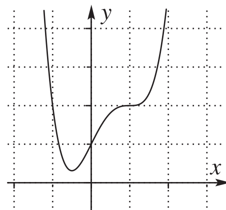

$y=2x^2-3$

نەخشەی سێجا




$y=2x^3-3x-1$

نەخشەی پلە چوار



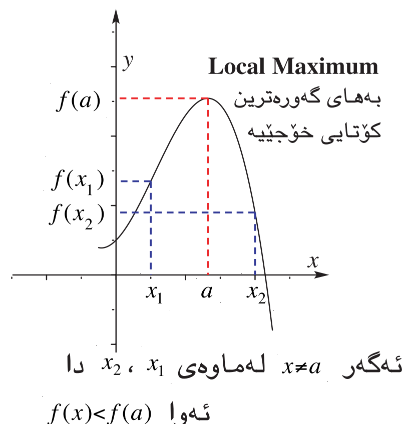

$y=x^4-2x^3+2x+1$

**خاڵی چاودێری** ✓

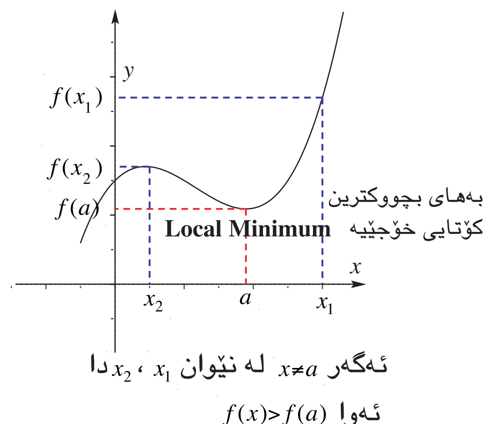
مەودای نەخشە پلە تاکەکان دیاریبکە لە نەخشەکانی پێشوودا؟ چی دەڵێیت سەبارەت بە مەودای نەخشە پلە جووتەکان.

## Extremum of Polynomial Function بەهایەکانی ئەوپەڕی نەخشە ڕادەدارەکان

کاتێك هێڵکاری ڕوونکردنەوەی نەخشەیەك بەرەو سەرەوە دەچێت وپاشان بەرەوخوارەوە دادەبەزێت لە ماوەیەکی بوارەکەیدا.نەخشەکە بەهای گەورەترین کۆتایی خۆجێ وەردەگرێت لەو ماوەیەدا.
بەڵام ئەگەر هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بەرەو خوارەوە بڕوات پاشان بەرەو سەرەوە بچێت لە ماوەیەکی بوارەکەیدا بەهای بچووکترین کۆتایی خۆجێیی وەردەگرێت لەوماوەیدا.




ئەگەر $x \neq a$ لەماوەی $x_1$ ، $x_2$ دا
ئەوا $f(x) < f(a)$




ئەگەر $x \neq a$ لە نێوان $x_1$ ، $x_2$ دا
ئەوا $f(x) > f(a)$

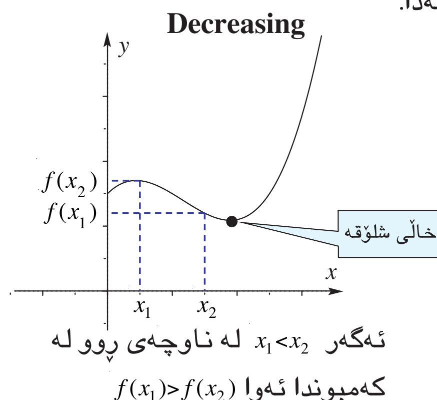
### Extremum Value ئەوپەڕی بەها

بەژمارەی $f(a)$ دەوترێت گەورەترین کۆتایی خۆجێیی **Local Minimum** ئەگەر $f(x) < f(a)$ بەهای $x$ هەرچەندێك بێت لەهاوسێی $a$ کاتێك $x \neq a$.

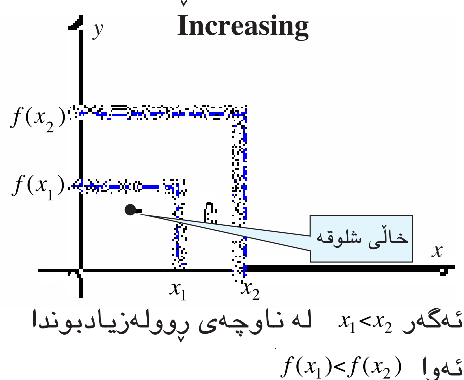
بەژمارەی $f(a)$ دەوترێت بچووکترین کۆتایی خۆجێیی **Local Maximum** ئەگەر $f(x) > f(a)$ بەهای $x$ هەرچەندێك بێت لە هاوسێی $a$ کاتێك $x \neq a$.

بەژمارەی $f(a)$ دەوترێت بەهای ئەو پەڕی خۆجێیی نەخشەکە، **Local Extremum** ئەگەر بەهاکە گەورەترین یان بچووکترین بەهای خۆجێیی نەخشەکەبێت.

بەخاڵەکانی سەر هێڵکاری چەماوەکە، کە ئەوپەڕی بەها دەنوێنن دەوترێت خاڵی شلۆق لە ڕێڕەوی نەخشەکە **Turning Points** . نەخشەکە لە کاتی تێپەڕینی بەو خاڵانەدا دەگۆڕێت کە لە ڕوو لە زیاد بوونەوە بۆ ڕوو لە کەمبوون یان لەکەمبوونەوە بۆ زیادبوون. نەخشە سێجاکان بە لایەنی زۆرەوە دوو خاڵی شلۆقیان هەیە. بەڵام نەخشە پلە چوارەکان بە لایەنی زۆرەوە سێ خاڵی شلۆقیان هەیە.بە شێوەیەکی گشتی ژمارەی خاڵە شلۆقەکانی نەخشەیەکی پلە n بریتییە لە (n-1) بە لایەنی زۆرەوە. ئەگەر سەرنجی هێڵکاری ڕوونکردنەوەی ئەم دوو نەخشەیە بدەیت، تێبینی ئەوە دەکەیت کە هێڵکاری نەخشەکە لەوانەیە بەرەو سەرەوە یان بەرەو خوارەوە بێت. بەنەخشەیەك دەوترێت ڕوو لە زیادبوونە لە ماوەیەکی بوارەکەی ئەگەر هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی بەرەو سەرەوەبێت لەو ماوەیەدا بەڵام ئەگەر هێڵکاری نەخشەکە بەرەو خوارەوە بێت لەماوەیەکی بوارەکەیدا ئەوە نەخشەکە ڕوو لە کەمبوونە لەو ماوەیەدا.




ئەگەر $x_1 < x_2$ لە ناوچەی ڕوو لە کەمبوندا ئەوا $f(x_1) > f(x_2)$




ئەگەر $x_1 < x_2$ لە ناوچەی ڕووولەزیادبوندا
ئەوا $f(x_1) < f(x_2)$

## ڕوو لە زیادبوون و ڕوو لەکەمبوونی نەخشەکان Increasing and Decreasing Functions

با $x_1$ ، $x_2$ دوو ژمارەی ماوەیەکی بواری نەخشەی $f(x)$ بن .

نەخشەکە ڕوو لە زیادبوون دەبێت کاتێك ئەم مەرجە بێتەدی

ئەگەر $x_1 < x_2$ ئەوا $f(x_1) < f(x_2)$

نەخشەکە ڕوو لەکەمبوون دەبێت کاتێك ئەم مەرجە بێتەدی

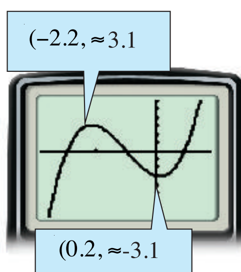
ئەگەر $x_1 < x_2$ ئەوا $f(x_1) > f(x_2)$

### نموونە 2

هێڵکاری ڕونکردنەوەیی $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ بکێشە.

أ بەهای ئەوپەڕی نەخشەکە بۆنزیکترین بەش لە دە نزیکبکەوە.

ب ناوچەی ڕوو لە زیادبوون و ڕوولەکەمبوونی نەخشەکە دیاریبکە.




**شیکار**

أ هێڵکاری ڕونکردنەوەیی نەخشەکە دوو خاڵی شلۆقی هەیە یەکێکیان بەهای گەورەترینە 3.1 بەنزیکەیی ئەویتریان بەهای بچووکترینەوە بە نزیکی 3.1- .

ب نەخشەکە ڕوو لە کەمبوونە لە ماوەی $-2.2 < x < 0.2$ بەدەر لەو ماوەیە ڕوو لە زیادبوونە.

**ساغبکەوە** خشتەکاری بژمێرەیی ڕوونکردنەوەیی بەکاربهێنە «ئەگەر دەستتکەوت»بۆساغکردنی بەهای نزیکەییەکانی پۆتانەکانی خاڵە شلۆقەکان.

| X | Y1 |
|---|---|
| -3 | 0 |
| -2 | 3 |
| -1 | 0 |
| 0 | -3 |
| 1 | 0 |
| 2 | 15 |
| 3 | 48 |

X= -2

لەم خشتەیەوە دەردەکەوێت کاتێك بەهای $x$ لەهاوسێی 2–دا بێت، بەهای نەخشەکە لە بەهای هاوسێکانی گەورەتر دەبێت ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت کە پۆی سینی بەهای گەورەترین لە نێوان 3– ، 1– دا دەبێت.

| X | Y1 |
|---|---|
| -2.5 | 2.625 |
| -2.4 | 2.856 |
| -2.3 | 3.003 |
| -2.2 | 3.072 |
| -2.1 | 3.069 |
| -2 | 3 |
| -1.9 | 2.871 |

X= -2.2

لەم خشتەیە ئەوە ڕووندەبێتەوە کە ژمارەی 3.1 بەهای نزیکەیی بەهای گەورەترین کۆتایی خۆجێیە.

ئەگەر توانیت هەمان ڕێگا بەکاربێنە بۆ دەرخستنی بەهای بچووکترین کۆتایی خۆجێیی.

# ڕاهێنان

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 باسی خاڵە شلۆقەکانی نەخشەی ڕاددەداری $f(x)=2x^2+x^3+3x+1$ بکەو جۆرەکەی دیاریبکە.

2 بەهای گەورەترین وبچووکترین کۆتایی خۆجێیەکەی پێناسەبکە.

3 ئەوپەڕی بەهای نەخشەکە پێناسەبکە.

4 ڕوو لە زیادبوون و ڕوو لەکەمبوونی نەخشەکە پێناسەبکە.

5 ناوچەی ڕوو لە زیادبوون و ڕوولەکەمبوونی نەخشەی پرسیاری 1 دیاریبکە.

## ڕاهێنانی ئاراستەکراو

6 هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=x^3+x^2-2x$ بکێشە.

7 ژمارەی خاڵە شلۆقەکانی نەخشەکە چەندە؟

8 ئەوپەڕی بەهاکان دیاریبکە کەبۆ نزیکترین دە نزیکرابنەوە.

9 ناوچەی ڕوو لە زیادبوون و ڕوو لە کەمبوونی بۆ دیاریبکە.

## ڕاهێنان وجێبەجێکردن

**هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە بکێشە ولە هێڵکاریەکەوە بەهای ئەوپەڕی نەخشەکە وجۆرەکەی دیاریبکە. بەهاکان بۆ نزیکترین بەش لە دە بنووسە.**

10 $y=2x^3-5x$

11 $y=x^3+x^2-3x+1$

12 $y=2x^3-4x+1$

13 $y=3x-3-3x^3$

14 $y=-2x+3+x^2$

15 $y=-x^2+6x-11$

16 $y=x^4-5x^2+2$

17 $y=-x^4+x^3+4x^2-3$

18 $y=-3x^3+3x+x^4+3$

19 $y=3x^3-x^4-3x-3$

**هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بکێشە وناوچەکانی ڕوو لە زیادبوون و ڕوولەکەمبوونیان بۆ دیاریبکە.**

20 $y=x^3-4x$

21 $y=-2x^3+3x$

22 $y=x^4-2x^2+2$

23 $y=-x^4+3x^2+3$

24 $y=-x^2+4x-1$

25 $y=x^2-6x+7$

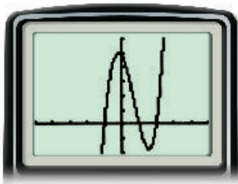
26 $y=x^4-3x^3+3x+3$

27 $y=-x^4+3x^3-3x-3$

28 $y=x^3-3x+3$

29 $y=-x^3+4x-2$

30 شێوەی بەرامبەر بەشێکی هێڵکاری نەخشەی $y=10x^3-25x^2+x^4-10x+24$ دەنوێنیت، سەرنجبدە کە هەموو سیفەتەکانی نەخشەکە ڕوون نییە وەك لە وێنەکەدا دیارە. چۆن وا دەکەیت تا ڕوونببێتەوە؟



**ئەندازە نەخشەیەکی زۆر ڕادەدار بنووسە هەژمێری ڕووبەرو قەبارەی داواکراو بکات.**

31 قەبارەی شەش پالۆیەك لایەکی $2x$ سم بێت.

32 ڕووبەری گشتی شەش پالۆیەك لایەکی $x$ سم بێت.

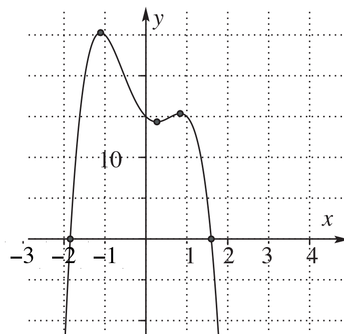
33 ڕووبەری گشتی لاکێشە تەریبێك بەرزیەکەی $x$ سم ودرێژی بنکەکەی $7x$ وپانییەکەی $3x$ سم بێت.

34 قەبارەی لولەکێك بەرزییەکەی 5 م ونیوتیرەی بنکەکەی $x$ م بێت.

35 شێوەی بەرامبەر بەشێك لە هێڵکاری ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=-x^4+2x^2-x+3$ دەنوێنێت.

أ بەهای نزیکەیی سفرەکانی نەخشەکە بنووسە.

ب بەهایەکانی ئەوپەڕی نەخشەکە بە نزیکەیی بنووسە.




## ڕوانینێك بۆ دواوە

36 ئەم خشتەیە تەواو بکە کە بەهای ڕادەداری $g(x)=x^4-2x^2-2$ هەژمێر بکات. پاشان بەهای گەورەترین وبچووکترین بەهای $x$ ی هەر یەکێکیان دیاریبکە.

| $x$ | $-2$ | $-1.5$ | $-1$ | $-0.5$ | $0$ | $0.5$ | $1$ | $1.5$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | | | | | | | | |

## ڕوانینێك بۆ پێشەوە

**ئەم بڕانە بەسادەترین شێوە بنووسە.**

37 $(x+y)(x^2-xy+y^2)$

38 $(x-y)(x^2+xy+y^2)$

وانەی 3

# لێکدان ودابەشکردنی ڕادەدارەکان

# Multiplying and Dividing Polynomials



**بۆچی**

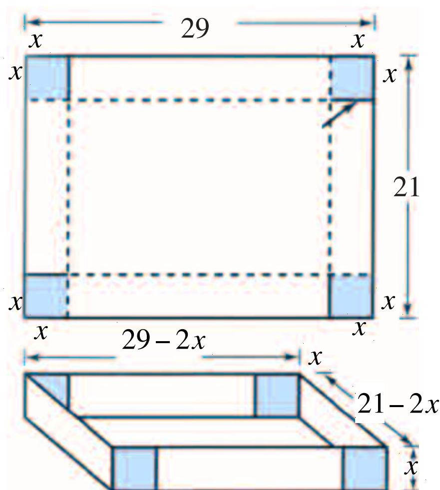
دەتوانیت شیتەڵکردن بەکاربێنیت بۆ پێکهێنانی ڕادەدارێك کە قەبارەی خشتەکێك یان لاکێشەتەرییبێك کە لە سەرەوە کراوەیە بنوێنێت.

**ئامانجەکان**

- ڕادەدارێك لە یەکێکی تردەدات.
- ڕادەدارەکان بە بەکارهێنانی هاوئەنجامە ناسراوەکان شیتەڵدەکات.
- بیردۆزی هاوکولکە بۆ دۆزینەوەی کولکە ڕادەدارەکان بەکاردەهێنێت.
- ڕادەدارێك بەسەر یەکێکی تردا دابەشدەکات.
- پرسیارەکان بە بەکارهێنانی بیردۆزی هاوکۆلکەو بیردۆزی ماوە شیکاردەکات.

**جێبەجێکردنەکان**

پیشەسازی




بۆ دروستکردنی لاکێشە تەرییێکی کراوە لەسەرەوە بە بەکارهێنانی پارچە کارتۆنێك، پێویستە چوار چوارگۆشەی یەکسان لە گۆشەکانیدا ببڕیت ولاکان بنوشتێنیتەوە. قەبارەی قوتوە پەیدابوەکە بە هۆی پێوانەی پارچە کارتۆنەکەو لاکانی چوار گۆشە براوەکە دیاری دەکرێت. ئەگەر هاتوو درێژی لاکانی کارتۆنەکە 29 cm و 21 cm بێت ئەوا قەبارەی قوتوەکە $V(x)=x(29-2x)(21-2x)$

کاتێك $x$ درێژی لایەکی چوارگۆشە براوەکە بێت.

## لێکدانی ڕادەدارەکان — Multiplying Polynomials

**نموونە 1**

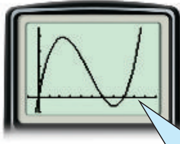
قەبارەی قوتوەکە $V(x)=x(29-2x)(21-2x)$ وەك ڕادەدارێك بە شێوەی گشتی بنووسە.

**شیکار**

$$\begin{aligned} v(x) &= x(29-2x)(21-2x) \\ &= x\left[29(21-2x)-2x(21-2x)\right] \\ &= x\left[609-58x-42x+4x^2\right] \\ &= x\left[609-100x+4x^2\right] \\ &= 609x-100x^2+4x^3 \\ &= 4x^3-100x^2+609x \end{aligned}$$

**ساغبکەوە**

دەتوانیت ڕاستی لێکدانەکەت پاسادان بکەیت بە بەکارهێنانی هێڵی ڕونکردنەوەیی نەخشەی $V(x)$ بە شێوەی یەکەمیداو بەشێوەی گشتیەکەیدا.
ئەگەر هەردوو چەماوەکە جووتبوون لێکدانەکەت ڕاستە.



دەردەکەوێت کەهەردوو هێڵە ڕونکردنەوەییەکە جووتن.

**هەوڵبدە** نەخشەی $f(x)=2x^2(x^2+2)(x-3)$ وەک ڕادەدارێک بەشێوەی گشتی بنووسە.

## شیتەڵ کردنی ڕادەدارەکان Factoring Polynomials

بۆ ئەوەی ڕادەدارێک شیتەڵبکەیت، هەوڵبدە بە شێوەی لێکدانی دوو هاوکۆلکە یان زیاتر بنوسیت.

**نموونە 2** ئەم ڕادەدارانە شیتەڵبکە.

أ $x^3-5x^2-6x$    ب $x^3+4x^2+2x+8$

**شیکار**

أ $x^3-5x^2-6x=x(x^2-5x-6)$ گەورەترین کۆلکەی هاوبەش دەربێنە
$=x(x-6)(x+1)$ برە دووجاکە شیتەڵبکە.

ب دەتوانین ڕادەدارەکە $x^3+4x^2+2x+8$ کە بە دەرهێنانی گەورەترین کۆلکەی هاوبەش لە نێوان ڕادەی یەکەم ودووەم و ڕادەی سێیەم و چوارەم شیتەڵبکەین.

$x^3+4x^2+2x+8=(x^3+4x^2)+(2x+8)$ بەیەکەوەبەستنی ڕادەکان
$=x^2(x+4)+2(x+4)$ هەریەک لەدوو ڕادەی ناو کەوانەکە شیتەڵبکە
$=(x^2+2)(x+4)$ $(x+4)$ بەهاوبەش وەربگرە

**هەوڵبدە** ئەم ڕادەدارانە شیتەڵبکە

أ $x^3-9x$    ب $x^3-x^2+2x-2$

هاوئەنجامە ناسراوەکان ڕۆڵێکی گرنگ دەبینن لە شیتەڵکردنی ڕادەدارەکاندا.

### هاوئەنجامە ناسراوەکان Special Identities

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2 \qquad (x-y)^2=x^2-2xy+y^2$$
$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$
$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$
$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

**نموونە 3** ئەم ڕادەدارانە شیتەڵبکە.

أ $x^2-10x+25$    ب $49y^2+14y+1$
ج $4y^2-25$    د $x^3+27$    هـ $x^3-8$

شیکار

أ $x^2-10x+25=(x)^2+2\times5x+(5)^2=(x+5)^2$

ب $49y^2+14y+1=(7y)^2+2\times1\times7y+(1)^2=(7y+1)^2$

ج $4y^2-25=(2y)^2-(5)^2=(2y+5)(2y-5)$

د $x^3+27=(x)^3+(3)^3=(x+3)(x^2-3x+9)$

ه $x^3-8=(x)^3-(2)^3=(x-2)(x^2+2x+4)$

**هەوڵبدە** هەردوو ڕادەداری $x^3+1000$ و $x^3-125$ شیتەڵ بکەیت.

لەیادت بێت ئەگەر ژمارەی $x$ یەکێ لە سفرەکانی نەخشەی $f(x)$ بێت کاتێك $f(x)=0$ مانای $-2$ یەکێکە لە سفرەکانی نەخشەی $f(x)=x^3+8$ لەبەر ئەوەی $f(-2)=(-2)^3+8=-8+8=0$

ئەگەر سەرنجی نەخشەی $f(x)=(x-2)(3x^2+5x-4)$ بدەیت. بەزوویی بۆت دەردەکەوێت کە ژمارە 2 سفرێکە لە سفرەکانی نەخشەکە $(f(2)=0)$.

ئێستا پێچەوانەی ئەم ڕاستییە بخەرە پێش چاوی خۆت. بۆ نموونە ئەگەر ژمارە $\frac{1}{4}$ سفرێك بێت لە سفرەکانی نەخشە ڕادەدارەکە، ئایا بڕی $\left(x-\frac{1}{4}\right)$ کۆلکەیەکە لە کۆلکەکانی؟ وەڵامی ئەمەش لەم بیردۆزەدا دەردەکەوێت.

**Factor Theory** **بیردۆزی کۆلکە**

ئەگەر ژمارە $a$ سفرێك بێت لە سفرەکانی نەخشەی ڕادەداری $f(x)$، ئەوا $(x-a)$ کۆلکەیەکە لە کۆلەکانی، پێچەوانەکەشی ڕاستە.

دەتوانیت ئەم بیردۆزە بۆ شیتەڵکردنی ڕادەدارەکان بەکاربێنیت.

## نموونە 4

**ئایا بڕەی $x+2$ کۆلکەیەکە لە کۆلکەکانی نەخشەی ڕادەداری $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$.**

شیکار

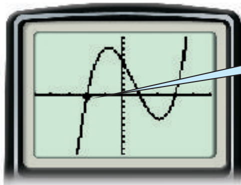
$x+2$ بە شێوەی $x-a$ بنووسە

$x+2=x-(-2)$ کەواتە $a=-2$

$f(-2)$ هەژمار بکە

$$f(-2)=(-2)^3-2(-2)^2-5(-2)+6$$
$$=-8-2\times4+10+6$$
$$=-8-8+10+6=0$$

کەواتە $(x+2)$ کۆلکەیەکە لە کۆلکەکانی $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$



لە هێڵکاری ڕونکردنەوەیەکەوە دەردەکەوێت −2 سفرێکە لە سفرەکانی نەخشەکە.

**هەوڵبدە** ئایا بڕی $(x+3)$ کۆلکەیەکە لە کۆلکەکانی ڕادەداری $x^3-3x^2-6x+8$

دەتوانیت ڕستەی لێکدانی برەکان بە شێوەی دابەشکردن بەدوو ڕێگای جیاواز بنووسین.

$$x^3+3x^2-4x-12=(x^2+5x+6)(x-2)$$

$$\frac{x^3+3x^2-4x-12}{x-2}=x^2+5x+6 \qquad \frac{x^3+3x^2-4x-12}{x^2+5x+6}=x-2$$

دەتوانیت ڕادەدارەکان بەسەر $x-a$ دابەشبکەین

بەبەکارهێنانی دابەشی ئەقلیدی **Long Division**

یان دابەشی بژمێرەیی **Synthetic Division**

« التركيبية» واتە دابەشکردنی ئەقلیدی

ڕادەدارەکان لە دابەشکردنی ژمارەکان دەچێت.

سەرنجی دابەشکردنی $x^3+3x^2-4x-12$ بەسەر

$x-2$ بدە :

$$\begin{array}{r|l} & x^2+5x+6 \\ x-2 & x^3+3x^2-4x-12 \\ & -(x^3-2x^2) \\ & \quad 5x^2-4x \\ & \quad -(5x^2-10x) \\ & \qquad 6x-12 \\ & \qquad -(6x-12) \\ & \qquad 0 \end{array}$$



**هەنگاوی 1** ڕادەدارەکان بە شێوەی گشتی بنووسە.

**هەنگاوی 2** ڕادەی یەکەمی بەشکراو بەسەر ڕادەی یەکەمی بەشدراو دابەش بکە. $x^3 \div x=x^2$

**هەنگاوی 3** $x^2$ لە ئەنجامی دابەش بوونەکەدا پەیدا دەبێ بنووسە ولە بەشکراوەکە بدە $x^2(x-2)=x^3-2x^2$

**هەنگاوی 4** ئەنجامی لێکدانی $x^3-2x^2$ لە بەشکراوەکە دەربکە.

**هەنگاوی 5** هەنگاوەکانی 1 و 2 و 3 لە ئەنجامی لیکدەرکردنەکە دووبارەبکەوە.

**دابەشکردنی بژمێری:**

دابەشکردنی بژمێرەیی کارئاسنیت بۆ دەکات لەبەر ئەوەی گۆڕاوەکان نانووسینەوە.

**هەنگاوی 1** : بەشدراو لە لای چەپ وڕادەداری بەشکراو لای ڕاست بە شێوەی گشتی بنووسە.

$$\begin{array}{c|ccccc} x-2 & x^3+3x^2-4x-12 \\ 2 & 1 & 3 & -4 & -12 \\ & \downarrow \\ \hline & 1 \end{array}$$

**هەنگاوی 2** : ژمارەی a (لێرەدا 2 ) لە لای چەپ وهاوکۆلکەکانی ڕادەدارەکە لە لای ڕاستدا بنووسە.هاوکۆلکەی یەکەم ( لێرەدا 1 ) لە ژێر هێڵەکە ولە هاوکۆلکەی دووەمدا بنووسە.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 3 & -4 & -12 \\ & \times\ 1 & + & = & \\ \hline & 2 & & 5 \end{array}$$

**هەنگاوی 3** : 2 لە 1 بدە وئەنجامەکەی لەگەڵ 3 دا کۆبکەوە.بەمەش (5) ت دەست دەکەوێت. لە ژێر هاوکۆلکەی سێیەم ڕادەدار بنووسە.

**هەنگاوی 4** : 2 لە 5 بدە وئەنجامەکەی لەگەڵ 4 - دا کۆبکەوە وبەمەش(6)ت دەست دەکەوێت. 6 لە ژێر هاوکۆلکەی چوارەم ڕادەدار بنووسە.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 3 & -4 & -12 \\ & & 2 & 10 & \\ \hline \times & 1 & 5 & & 6 \end{array}$$

**هەنگاوی 5** : 2 لە 6 بدە وئەنجامەکەی لەگەڵ $-12$ ، داکۆبکەوە. بەمەش سفرت دەست دەکەوێت.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 3 | $-4$ | $-12$ |
| | | 2 | 10 | 12 |
| × | 1 | 5 | 6 | 0 |

$x^2+5x+6$



ماوەی کرداری دابەشکردنەکە بریتییە لە سفر، ئەو ژمارانەی لە کۆتاییدا دەستمان کەوتوون 1 ، 5 ، 6 کە هاوکۆلکەی ئەنجامە دابەشکردنەکەیە کەواتە ئەنجامی دابەش کردنەکە بریتییەلە $x^2+5x+6$ کەواتە دابەشکردنی بژمێری کاتێك بەکاردێت کە بەشدراوەکە برێکی هێڵی لەسەر شێوەی $x-a$ بێت، بەڵام ئەگەر بەشدراوەکە پلەکەی لە 1 زیاتربێت، پێویستە دابەشکردنی ئەقلیدی (درێژی) بەکاربهێنیت.

**نموونە 5** ڕادەداری $x^3+3x^2+3x+2$ بەسەر $x^2+x+1$ دابەشبکە.

**شیکار**

**دابەشکردنی ئەقلیدی**

**هەنگاوی 1:** $x^3 \div x = x$ دابەشبکە.

$x$ لە ئەنجامی دابەش کردنەکەدا بنووسە.

**هەنگاوی 2** : $x$ لەبەشدراو بدە و ئەنجامەکەی لە بەشکراو دەربکە.

هەنگاوەکانی پێشوو دووبارە بکەوە، تا برێکت دەست دەکەوێت کە پلەکەی لە پلەی بەشدراو کەمتر بێت.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+2 \\
x^2+x+1 & x^3+3x^2+3x+2 \\
 & -(x^3+x^2+x) \\
 & \quad 2x^2+2x+2 \\
 & \quad -(2x^2+2x+2) \\
 & \qquad 0
\end{array}
$$



**هەوڵبدە** برەی $x^3+3x^2-13x-15$ بەسەر $x^2-2x-3$ دابەشبکە.

**نموونە 6** ڕادەداری $x^3+x-10$ بە بەکارهێنانی دابەشکردن شیتەڵبکە ئەگەر زانیت 2 سفرێکە لە سفرەکانی ڕادەدارەکە.

**شیکار**

**ڕێگای یەکەم:** دابەشکردنی ئەقلیدی بەکاربێنە.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+2x+5 \\
x-2 & x^3+0x^2+x-10 \\
 & -(x^3-2x^2) \\
 & \quad 2x^2+x \\
 & \quad -(2x^2-4x) \\
 & \qquad 5x-10 \\
 & \qquad -(5x-10) \\
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

**ڕێگای دووەم:** دابەشکردنی بژمێری بەکاربێنە.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 0 | 1 | $-10$ |
| | | 2 | 4 | 10 |
| | 1 | 2 | 5 | 0 |

$x^2+2x+5$



**هەوڵبدە** ڕادەداری $x^3-13x-12$ شیتەڵبکە بە بەکارهێنانی دابەشکردن ئەگەر زانیت $-3$ سفرێکە لە سفرەکانی ڕادەدارەکە.

**بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە**

ڕوونیبکەوە بۆچی ئەنجامی لێکدانەکان لە دابەشکردنی بژمێرەییدا کۆدەکرێتەوە، بەڵام لە دابەشکردنی ئەقلیدیدا لە یەك دەردەکرێن.

بە پێی بیردۆزی ماوە. بەهای ڕادەداری $P(x)$ لە کاتی لە جیاتیدانانی $a$ لە $x$ بریتییە لە بەهای ماوەی دابەشی ڕادەدارەکە بەسەر $(x-a)$دا .

ئەگەر $P(x)=2x^3+7x^2+2x+1$ ئەوا $p(-3)$ یەکسانە بە ماوەی دابەش کردنی $P(x)$ بەسەر $x-(-3)=x+3$ .

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-3$ | 2 | 7 | 2 | 1 |
| | | $-6$ | $-3$ | 3 |
| | 2 | 1 | $-1$ | 4 |

ماوە بریتیە لە 4

$$P(x)=2x^3+7x^2+2x+1$$

بە لەجیاتیدانان $P(-3)=2(-3)^3+7(-3)^2+2(-3)+1=4$

**Remainder Theorem** **بیردۆزی ماوە**

ماوەی دابەشکردنی ڕادەداری $P(x)$ بەسەر $(x-a)$ دا بریتییە لە ژمارەی $P(a)$ (بەهای $p$ کاتێك لە جیاتی $x$ ژمارەی $a$ دادەنرێت).

## نموونە 7

**$P(5)$ هەژمار بکە کاتێك $P(x)=2x^3+7x^2+2x+1$**

**شیکار**

**ڕێگای یەکەم:** دابەشکردنی بژمێری بەکاربهێنە.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 2 | 7 | 2 | 1 |
| | | 10 | 85 | 435 |
| | 2 | 17 | 87 | 436 |

کەواتە $P(5)=436$

**ڕێگای دووەم:** لە جیاتیدانان بەکاربهێنە.

$$P(x)=2x^3+7x^2+2x+1$$
$$P(5)=2(5)^3+7(5)^2+2(5)+1$$
$$=250+175+10+1$$
$$=436$$

**هەوڵبدە** $P(3)$ هەژمێربکە کاتێك $P(x)=3x^3+2x^2-3x+4$

# ڕاهێنان

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

**1** ڕوونبکەوە چۆن هاوئەنجامە ناسراوەکان بۆ شیتەڵکردنی ڕادەداری $x^3-4x$ بەبەکاردێنیت

**2** ڕوونبکەوە چۆن بیردۆزی کۆلکە بەکاردێنیت تا بزانی ئایا $(x+1)$ کۆلکەیەکە لە کۆلکەکانی $x^3-2x^2-8x-5$ یان نا.

**3** ڕوونبکەوە چۆن بیردۆزی ماوە بەکاردەهێنیت بۆ هەژمێر کردنی $P(5)$ کاتێك $P(x)$ ڕادەدار بێت.

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

**4** ڕادەداری $P(x)=x(10-x)(2+x)$ بە شێوەی گشتی بنووسە.

**هەر یەك لەم ڕادەدارانە شیتەڵبکە.**

**5** $x^3-5x^2+6x$ **6** $x^3+5x^2+3x+15$ **7** $x^3-216$

**8** لە جیاتیدانان بەکاربهێنە تابزانیت ئایا $(x+2)$ کۆلکەیەکە لە کۆلکەکانی ڕادەداری $x^3+4x^2+5x+2$ یان نا.

**9** $(x^3+4x^2+4x+3)\div(x^2+x+1)$ هەژمێر بکە.

ئەگەر $-3$ سفرێك بێت لە سفرەکانی نەخشەی $f(x)=x^3-14x-15$، ئەوا نەخشەکە شیتەڵبکە بە بەکارهێنانی:

**10** دابەشکردنی بژمێری **11** دابەشکردنی ئەقلیدی (درێژی)

ئەگەر $f(x)=2x^3+3x^2+4x+1$ ، $f(2)$ دیاریبکە بە بەکارهێنانی :

**12** دابەشکردنی بژمێری **13** دابەشکردنی ئەقلیدی (درێژی)

## ڕاهێنان وجێبەجێکردن

**هەر یەك لەم ڕادەدارانە بە شێوەی گشتی بنووسە.**

**14** $3x^2(4x^3-2x^2+5x+2)$ **15** $(2x-3)(x+4)$

**16** $(2x+3)(x^3-5x^2+4)$ **17** $(x-5)(-3x^3-4x-1)$

**18** $(x-3)(2-x)(x-1)$ **19** $(2x-4)(x+1)^2$

**20** $(2x+1)^3$ **21** $(-3x^2-x+2)(x+1)^2$

**22** $\left(x-\frac{5}{7}\right)\left(\frac{2}{5}x^2-\frac{1}{5}x+\frac{3}{7}\right)$ **23** $\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)$

**ئەم ڕادەدارانە شیتەڵبکە.**

**24** $x^3+8x^2+15x$ **25** $x^3+2x^2-3x$

**26** $3x^3-300x$ **27** $18x^3-60x^2+50x$

**28** $x^3+3x^2-x-3$

**29** $x^3-2x^2-5x+10$

**30** $x^3+x^2+x+1$

**31** $1-x+x^2-x^3$

**32** $x^3+9x^2+14x$

**33** $x^3+x^2+2+2x$

**34** $x^3-64$

**35** $27x^3-125$

**36** $x^6-1$

**37** $27+8x^6$

ئایا بڕی هێڵی بەرامبەر ئەو ڕادەدارانە کۆلکەیەکن لە کۆلکەکانی ڕادەدارەکە یان نا.( لە جیاتیدانان بەکاربهێنە).

**38** $x^2+x+1$ ؛ $x-1$

**39** $x^3+5x^2-18x-48$ ؛ $x+6$

**40** $x^3+3x^2-18x-40$ ؛ $x-4$

**41** $x^3-8x^2+9x+18$ ؛ $x-6$

**42** $x^3+6x^2-x-30$ ؛ $x-2$

**43** $x^3-x^2-17x-15$ ؛ $x+3$

بە دابەشکردنی ئەقلیدی ئەنجامی ئەمانە بدۆزەرەوە:

**44** $(x^2+4x+4)\div(x+2)$

**45** $(x^2-3x+2)\div(x-1)$

**46** $(x^3-7x-6)\div(x+1)$

**47** $(x^3+11x^2+39x+45)\div(x+5)$

**48** $(3x^2-x+x^3-3)\div(x^2+4x+3)$

**49** $(x^3+6x^2-x-30)\div(x^2+8x+15)$

**50** $(x^3-5x^2-13x+42)\div(x^2+x-7)$

**51** $(10x-5x^2+x^3-24)\div(x^2-x+6)$

**52** $\left(x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}\right)\div\left(x-\frac{1}{2}\right)$

**53** $\left(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{16}\right)\div\left(x+\frac{3}{4}\right)$

بە دابەشکردنی بژمێری ئەنجامی ئەمانە بدۆزەرەوە

**54** $(x^2-4x-12)\div(x-4)$

**55** $(x^2-3x+2)\div(x-1)$

**56** $(x^3+x^2-9x-9)\div(x+1)$

**57** $(x^3-2x^2-22x+40)\div(x-4)$

**58** $(x^2+5x^3-18)\div(x+3)$

**59** $(x^3-27)\div(x-3)$

**60** $(x^3+3)\div(x-1)$

**61** $(x^2-6)\div(x+4)$

بە دابەشکردنی بژمێری و لەجیاتیدانان بەهای داواکراو هەژماربکە.

**62** $f(x)=x^2+1$ ؛ $f(1)$

**63** $f(x)=x^2+1$ ؛ $f(2)$

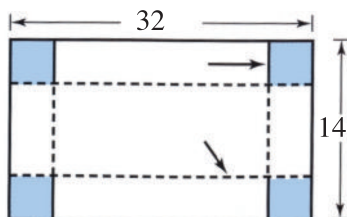
**64** $f(x)=4x^2-2x+3$ ؛ $f(3)$

**65** $f(x)=3x^3+2x^2+3x+1$ ؛ $f(-2)$

بەهای $k$ چەندە بۆ ئەوەی بڕە هێڵەکە کۆلکەیەك بێت لە کۆلکەکانی ڕادەدارەکە.

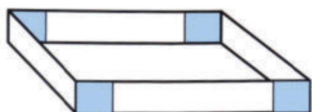
**66** $x^3+3x^2-x+k$ ؛ $x-2$

**67** $kx^3-2x^2+x-6$ ؛ $x+3$



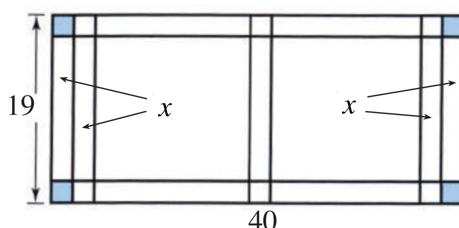

**پیشە سازی** بە بەکارهێنانی پارچە کارتۆنێکی لاکێشەیی درێژی 32 سم وپانییەکەی 14سم بێت قوتویەك سەرەکەی کراوە دروستکراوە لەم شێوە دەردەکەوێت ئەگەر بەرزی قوتوەکە $x$ سم بێت ئەوا قەبارەکەی بریتییە لە

$$V(x)=x(14-2x)(32-2x)$$



**68** قەبارەی قوتوەکە بە شێوەی گشتی نەخشەی ڕادەدار بنووسە.

**69** قەبارەی قوتوەکە چەندە کاتێك بەرزییەکەی 2 سم بێت؟






**پیشە سازی** بە بەکارهێنانی پارچە کارتۆنێکی لاکیشەیی درێژیەکەی 40 سم و پانیەکەی 19 سم قوتویەکی پیتزا دروست کرا، ئەگەر بەرزی قوتوەکە $x$ سم بێت ئەوا قەبارەکەی بریتییە لە

$$V(x)=\frac{1}{2}x(19-2x)(40-5x)$$

**70** قەبارەی قوتوەکە بە شێوەی گشتی نەخشەی ڕادەدار بنووسە.

**71** قەبارەی قوتوەکە چەندە کاتێك بەرزیەکەی 2 cm سم بێت؟

**72** قەبارەی قوتوەکە چەندە کاتێك بەرزیەکەی 2.5 cm بێت؟

## تێروانینێك بۆ دواوە

**73** لاسەنگەی $x+3\leq 3(x-1)$ شیکار بکە و کۆمەڵەی شیکارەکە لەسەر هێڵی ژمارەکان بنوێنە.

ئەم برانە شیتەڵبکە.

**74** $5b^2-5c^2$ **75** $2x^2-32y^2$ **76** $x^2+x-12$

**77** $5-6x+x^2$ **78** $4x^2+4x+1$ **79** $2x^2+11x+15$

کۆبکەوە یان لێدەربکە.

**80** $(2x^2-7x+5)+(x^3+6x^2-4x+1)$

**81** $(x^4-5x^2-x)-(x^4+4x^3-x+6)$

**82** $\left(\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}x^3+1\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x\right)$

**83** $(-3.2x^2+2.7x^3+7.8x)-(4.9x^3+2.5x^4)$

## تێروانینێك بۆ پێشەوە

**84** ژمارەی سفرەکانی نەخشەی $f(x)=x^3+4x^2-3x-18$ دوای هەژمێر کردنی $f(2)$ دیاریبکە.

# وانەی 4

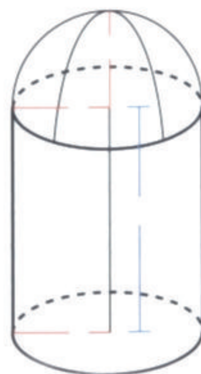
# هاوکێشە و لاسەنگە ڕادەدارەکان

# Polynomial Equations and Inequalities



**بۆچی**

دەتوانیت زۆر لە پێداویستیەکانی ژیان بە بەکارهێنانی هاوکێشە و لاسەنگەکان جێبەجێ بکەین وەك دیاری کردنی نیوەتیرەی بنکەی سایلۆیەکی دانەوێلە بەقەبارەیەکی دیاری کراو.



**ئامانجەکان**

- بە شیتەڵکردن هاوکێشەی ڕادەدار شیکار دەکات.
- بە ڕوونکردنەوەیی ڕەگەکانی هاوکێشە دەخەمڵێنێت.
- بە ڕوونکردنەوەیی لاسەنگەی ڕادەدار شیکار دەکات.

**جێبە جێکردنەکان**

کشت وکاڵ

پاش ئەوەی جوتیارەکان دانەوێڵەکانیان دەدورنەوە لە سایلوی تایبەتیدا دانەوێلەکە هەڵدەگرن. ئەو سایلۆیانەش پێکدێت لە لولەکێکی بازنەیی وەستاو، نیوەگۆیەکی بەسەرەوەیە. وەك لە وێنەکەی سەرەوەدا دیارە. دەشزانیت بۆ قەبارەی لولەك ئەم ڕێسایە بەکاردەهێنیت $C(r)=\pi r^2 h$ کاتێك $C$ قەبارە، و $r$ نیوەتیرەی بنکە، و $h$ بەرزی لولەکەکەبێت، هەروەها قەبارەی گۆ بە پێی ئەم یاسایە هەژمار دەکەین $H(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$ لەوەی پێشوو دەردەکەوێت کە قەبارەی سایلوکە بەم چەشنە دەبێت. $T(r)=H(r)+C(r)=\frac{4}{3}\pi r^3+\pi r^2 h$

شاسوار دەیەوێت سایلۆیەکی دانەوێلەکە بەرزی 8m قەبارەکەی 650 مەترسێجا دروست بکات، پێویستە نیوەتیرەی سایلۆکە بەچەند دابنێت.

**نموونە 1** هاوکێشەی $2x^3-7x^2+3x=0$ بە شیتەڵکردن شیکاربکە.

**شیکار**

$$2x^3-7x^2+3x=0$$

$$x(2x^2-7x+3)=0 \quad \text{بە دەرهێنانی گ.ك.هـ}$$

$$x(2x-1)(x-3)=0 \quad \text{شیتەڵکردنی بڕی دووجا}$$

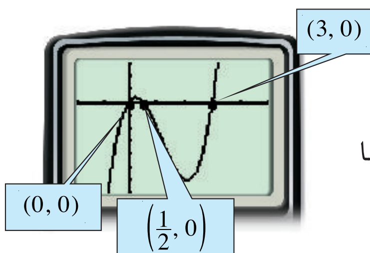
$x=0$ یان $2x-1=0$ یان $x-3=0$ — بەبەکارهێنانی لێکدانی سفری

$x=0$ یان $x=\frac{1}{2}$ یان $x=3$

**ساغبکەوە**

هێڵکاری ڕونکردنەوەیی نەخشەی $y=2x^3-7x^2+3x$ بکێشە وسەرنجی سفرەکانی بدە.

ئەگەر سەرنجی هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە بدەیت دڵنیا دەبیت لەوەی سفرەکانی نەخشەکە هەمان ئەو بەهایانەیە کە بە شێوەی جەبری دۆزیبوتەوە.




**هەوڵ بدە** هاوکێشەی $2x^3+x^2-6x=0$ بە شیتەڵکردن شیکاربکە.



شیتەڵکردنی ڕادەدارەکە بووە هۆی شیکارکردنی هاوکێشەکەی پێشوو، برەکە شیتەڵ بوو بۆ ئەنجامی لێکدانی 3 کۆلکە، لەمەوە هاوکێشەکە 3 شیکار یان 3 ڕەگی جیاوازی هەیە. بەڵام لەهەندێ هاوکێشەی ڕادەدار ڕەگەکان دووبارە دەبنەوە وەك لەم نموونەیەدا دەردەکەوێت:

**نموونە** 2

**هاوکێشەی $x^3-7x^2+15x-9=0$ بەبەکارهێنانی ڕوونکردنەوەیی و دابەشکردنی بژمێری و شیتەڵکردن شیکاربکە.**

**شیکار** هێڵکاری ڕوونکردنەوەی نەخشەی $y=x^3-7x^2+15x-9$ بەکاربهێنە بۆ خەمڵاندنی ڕەگەکانی هاوکێشەکە. لە هێڵکاریەکەوە ڕوون دەبێتەوە کە 1 یەکێك لە سفرەکانی نەخشەکەیە، دەشتوانین دڵنیا بین لەوە بەدانانەوەی بەهاکە لە جیاتی $x$. بیردۆزی هاوکۆلکە ودابەش کردنی بژمێری بەکاربهێنە بۆ دابەش کردنی $x^3-7x^2+15x-9$ بەسەر $x-1$.

کەواتە،

$$x^3-7x^2+15x-9=(x-1)(x^2-6x+9)$$
$$=(x-1)(x-3)^2$$

| 1 | 1 | −7 | 15 | −9 |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | −6 | 9 |
| | 1 | −6 | 9 | 0 |

ماوە= 0

ئەنجامی دابەش بریتییە لە $x^2-6x+9$

$x-1=0$ یان $x-3=0$ یان $x-3=0$

$x=1$ یان $x=3$ یان $x=3$

ڕەگەکانی هاوکێشەی $x^3-7x^2+15x-9=0$ بریتییە لە 1 و 3 ورەگی 3 دووجار دووبارە بۆتەوە.

**هەوڵبدە** هاوکێشەی $x^3+2x^2-4x-8=0$ بە ڕوونکردنەوەیی ودابەشکردنی بژمێری وشیتەڵکردن شیکاربکە.

لەوانەیە کۆلکەی $(x-a)$ لە شیتەڵکردنی ڕادەدارێکی وەك $y$ دووبارە ببێتەوە وەك لە نموونەی پێشوودا بینرا. لەم بارەدا دەوترێت $a$ **ڕەگێکی دووبارەیە Multiple Root** . بە ژمارەی ئەو جارانەی کە $(x-a)$ تیا دووبارە دەبێتەوە لەو هاوکێشەی $P(x)=0$ دەوترێت پلەی دووبارەبوونەوەی ڕەگی $a$. ڕەگی 3 لە هاوکێشەکە ڕەگێکی دووبارەبوونەوەی پلە دووە. کاتێك ڕەگی $a$ لە ڕادەدارێکدا دووبارە دەبێتەوە واتا هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە لە تەوەری $x$ دەکەوێت لە خاڵی $(a,0)$ بێ ئەوەی بیبڕێت. ناشتوانین بڵێین خاڵی لێکەوتن هەمیشە ڕەگێکی دووبارە بوونەوەیە. لەبەر ئەوەی هێڵکاری ڕوونکردنەوەیەکە ئەوەندە وورد نییە کە ئەمەی لێ دەرئەنجام بدەین. دەتوانین هەندێك ڕادەدار شیتەڵبکەین بە دانانی گۆڕاوێکی تر لە جیاتی گۆڕاوە بنەڕەتییەکە وەك لەم نموونەدا دەردەکەوێت.

**نموونە** 3

**هاوکێشەی $x^4-4x^2+3=0$ بە شیتەڵکردن شیکاربکە.**

**شیکار**

شیکارکردنی پرسیارەکان

1. **شیکارکردنی پرسیارێکی سادەتر:** دەتوانین ڕادەداری $x^4-4x^2+3$ بگۆڕین بۆ ڕادەدارێکی دووجا بە دانانی $y=x^2$ لە جیاتی گۆڕاوە بنەڕەتییەکە، ئەو کاتە ڕادەدارەکە دەبێتە $y^2-4y+3$

$$x^4-4x^2+3=0$$
$$(x^2)^2-4(x^2)+3=0$$
$$y^2-4y+3=0$$
$$(y-1)(y-3)=0$$
$$y=1 \text{ یان } y=3$$

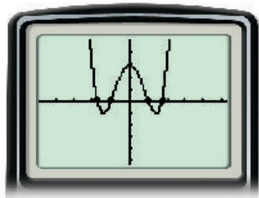
2. له جیاتی $x^2$ له جیاتی $y$ دادەنێین پاشان بەهای $x$ بدۆزەرەوە کە ڕەگەکان هاوکێشە بنەڕەتییەکە دیاریدەکەین

$x^2=1$ یان $x^2=3$

$x=\pm 1$ یان $x=\pm\sqrt{3}$

ڕەگەکانی هاوکێشە بنەڕەتییەکە بریتییە لە $x=-1$ $x=1$ $x=-\sqrt{3}$ $x=\sqrt{3}$

ساغبکەوە



هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=x^4-4x^2+3$ بکێشە و سەرنجی سفرەکانی نەخشەکە بدە دەبینیت هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە تەوەری سینی دەبڕێت لە $-1$ و $1$ و لە دوو خاڵی هاوجێ بە پێی تەوەرەی صادەکان لە $-\sqrt{3}\approx -1.7$ وە $\sqrt{3}\approx 1.7$ دەنوێنن.

هەوڵبدە هاوکێشەی $x^4-9x^2+14=0$ بە شیتەڵکردن شیکاربکە.

## ژمارەی ڕەگەکانی هاوکێشەی ڕاددار Number of Roots for Polynomial Equation

لە نموونەکانی پێشوو دەرکەوت ژمارەی ڕەگەکانی هاوکێشەی پلە سێ بریتییە لە 3 ڕەگە و ژمارەی ڕەگەکانی هاوکێشەی پلە چوار دەبێتە 4 ڕەگ بەڵام ئەمە بە گشتی ڕاست نییە.

**نموونە 4** هاوکێشەی $x^4-1=0$ شیکاربکە.

**شیکار**

$x^4-1=(x^2+1)(x^2-1)$ جیاوازی نێوان دوو دووجا

$=(x^2+1)(x-1)(x+1)$

ناتوانین کۆلکەی $x^2+1$ شیتەڵبکەین لەبەر ئەوەی ئەم ڕاددارە لە ژمارە ڕاستییەکاندا هیچ سفرێکی نییە چونکە $x^2$ ژمارەیەکی سالب نابێت.

کەواتە، ژمارەی ڕەگەکانی هاوکێشەی $x^4-1=0$ تەنها دوو ڕەگە.

## لاسەنگە ڕاددارەکان Polynomial Inequalities

**نموونە 5** لاسەنگەی $x^4-4x^2<0$ شیکاربکە.

**شیکار**



هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=x^4-4x^2$ بکێشە لە هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەکەوە دەردەکەوێت کە $-2$ و $0$ و $2$ سفرەکانی نەخشەکەن و بەهای نەخشەکە سالب دەبێت کاتێك $x$ بەهای -2 و 2 وەردەگرێت جگە لە سفر واتا $-2<x<2$ جگە $x\neq 0$ .

هەوڵ بدە لاسەنگەی $x^4-4x^2\leq 0$ شیکاربکە.

# ڕاهـێـــنــــان

## بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

**1** ئەو پەیوەندیانە ڕوونبکەوە کە سفری نەخشەکە ورەگی هاوکێشەکە و هاوکۆلکەی ڕادەدارو خاڵی یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری سینی بەیەکەوە دەبەستێتەوە.

**2** چی دەڵێیت دەربارەی سفرەکانی نەخشەیەکی ڕادەدار لە جۆری $y=(x-3)^n$ ؟

## ڕاهێنانی ئاڕاستە کراو

بە شیتەڵکردن ئەم هاوکێشانە شیکاربکە.

**3** $x^3-x^2-12x=0$

**4** $x^3+15x^2+54x=0$

هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ودابەشکردنی بژمێری وشیتەڵکردن بەکاربێنە بۆ دۆزینەوەی هەموو ڕەگەکانی هاوکێشەکانی.

**5** $x^3-5x^2+3x=0$

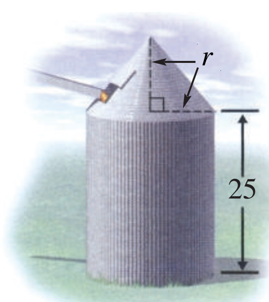
**6** $x^3-3x-2=0$

بە هۆی گۆڕاوێکی نوێ وشیتەڵکردن ڕەگەکانی ئەم هاوکێشانە بدۆزەوە.

**7** $x^4-8x^2+16=0$

**8** $x^4-2x^2+1=0$

**9** ئەگەر نەخشەی $V(r)=\frac{1}{3}\pi r^3+25\pi r^2$ قەبارەی سایلۆیەکی دانەوێڵە بنوێنێت وەك لە شێوەی بەرامبەردا هاتووە کاتێك $r$ نیوە تیرەی بنکەی لولەکەکە بێت بە مەترە، نیوە تیرەی بنکەی لولەکەکە هەژمێر بکە بۆ نزیکترین دە نزیکبکەوە، ئەگەر قەبارەی سایلۆکە $2\,042m^3$ بێت.




## ڕاهێنان وجێبەجێکردن

بە شیتەڵکردن ڕەگەکانی ئەم هاوکێشانە دیاریبکە.

**10** $x^3+2x^2-35x=0$

**11** $x^3+2x^2-48x=0$

**12** $x^3-13x^2+40x=0$

**13** $x^3-7x^2+10x=0$

**14** $x^3=25x$

**15** $y^3=49y$

**16** $2x^3-10x^2-100x=0$

**17** $16x-6x^2-x^3=0$

**18** $3y^3+9y^2-162y=0$

**19** $20d^2+5d^3-60d=0$

**20** $110x-2x^3=12x^2$

**21** $3y^3+36y^2=3y^4$

به شیتەڵکردن ڕەگەکانی ئەم هاوکێشانە دیاربیکە.

22 $d^3-d^2-5d-3=0$

23 $x^3+5x^2+7x+3=0$

24 $2b^3+16b^2+32b=0$

25 $5d^3-60d^2+180d=0$

26 $x^3-3x-2=0$

27 $x^3-3x+2=0$

28 $x^3-2x^2-9x=-18$

29 $x^3+3x^2-4x-12=0$

30 $n^3+8=2n^2+4n$

31 $x^3+3x^2=27+9x$

به هۆی گۆڕاوێکی نوێ و شیتەڵکردن ڕەگەکانی ئەم هاوکێشانە دیاربیکە.

32 $x^4-4x^2+4=0$

33 $x^4-6x^2+9=0$

34 $y^4-18y^2+81=0$

35 $b^4-24b^2+144=0$

36 $x^5-9x^3+8x=0$

37 $b^5-28b^3+27b=0$

38 $x^4-12x^2=-36$

39 $x^4-14x^2=-49$

40 $d^4+12=7d^2$

41 $n^4+14=9n^2$

42 دەروازەیەك لەسەر ڕۆشەنبیری: خەڵكی عمر خیام وەك شاعیرێكی نووسەری دیوانی چوارینەكان دەناسن، بەڵام هەندێكی كەمیان دەزانن كە ئەم مرۆڤە یەكێك بووە لەو زانایانەی كە لە بیركاریدا كاریان كردووە. ئەم زانایە ڕێگایەكی پێش خست بۆ دیاركردنی سفرەكانی ئەو نەخشە ڕادەدارانەی بەم شێوەیە دەنووسرێت $f(x)=x^3-bx-a$ كاتێك كە $b>0$ و $a>0$ بەهۆی دۆزینەوەی پۆتانی خاڵەكانی یەكتربڕینی هێڵی ڕوونكردنەوەیی هەندێ نەخشەی ناسراو لەگەڵ تەوەرەی سینیەكان.

أ بەهای $a$ و $b$ لەم نەخشەدا چەندە $f(x)=x^3-7x-6$

ب هێڵكاری ڕوونكردنەوەیی ئەم نەخشانە بكێشە بە بەكارهێنانی بەهاكانی $b$ و $a$ كە لە پرسیاری پێشوودا دۆزیتەوە $y=-\frac{1}{\sqrt{b}}x^2$ و $y=\sqrt{x^2+\frac{a}{b}x}$ و $y=-\sqrt{x^2+\frac{a}{b}x}$

ج جگە لە سفر پۆتانە جیاوازەكانی خاڵی یەكتربڕینی هێڵی ڕوونكردنەوەیی نەخشەكانی كە سفری نەخشەی $f(x)$ دەنوێنین دیاربیكە.

د هێڵكاری ڕوونكردنەوەیی $f(x)=x^3-7x-6$ بكێشە و سفرەكانی دیاربیكە ولە ساغكردنەوەی پرسیاری پێشوو دڵنیا بە.



43 **پیشە سازی** سندوقێكی تەختە پانییەكەی $x$ وردرێژییەكەی 3 ئەوەندەی پانییەكەیی وبەرزییەكەش 1ی لە پانییەكەی زیاترە، دڵنیابە لەوەی نەخشەی $V(x)=3x^3+3x^2$ قەبارەی سندوقەكە دەگەیەنێت. دوورییەكانی سندوقەكە دیاری بكە كاتێك قەبارەكەی 36 بێت.

44 **پزیشكی** گولاجێكی ڤیتامین شێوەی لولەكێكی بازنەیی وەستاوی هەیە كە دوو نیوەگۆ لەهەردوو سەرەكانییەتی. ئەگەر نەخشەی $V(r)=10\pi r^2+\frac{4}{3}\pi r^3$ قەبارەی دەنكە گولاجەكە بنوێنێت كاتێك $r$ نیوەتیرەی بنكەی لولەكەبێت بە مللیمتر. نیوەتیرەی گولاجێك چەندە كاتێك قەبارەكەی $160\text{mm}^3$ بێت.

## ڕوانینێك بۆ دواوە

پۆتانی خاڵە شلۆقەکانی ئەم نەخشانە دیاریبکە، ئەوپەری بەهاکانیان بە نزیکراوەی بنووسە، پاشان ناوچەکانی ڕوو لە زیادبوون وڕوو لەکەمبوون دیاریبکە.

**45** $y = 6x^2 - x - 12$

**46** $y = 2x^2 + 5x + 2$

**47** $y = x^2 + 3x - 2$

**48** $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$

ئەمانەی خوارەوە بە دابەشکردنی بژمێری بدۆزەرەوە.

**49** $(3x^4 - 4x^2 + 2x - 1) \div (x - 1)$

**50** $(x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 5x - 14) \div (x + 2)$

## ڕوانینێك بۆ پێشەوە

**51** ئەم برە بە بەکارهێنانی شیتەڵکردن کورتبکەوە $\frac{x^2+5x+6}{x^2+7x} \times \frac{x^2-2x}{x^2-4}$.

# نموونە* (سامپڵ) چییە؟

## What is the Sample?

لەکاتی کارکردنت لەم پرۆژەیەدا ئەو نەخشەڕادە دارانە دەدۆزیتەوە کە دەبنە سامپڵی جۆراوجۆری شێوە دەفرییەکان. هەڵدەستیت بە تێکردنی ئاو بۆ ناو دەفرێك بەقەبارەیەكی دیاریکراو و پێوانی بەرزی وقەبارەکەی، لە هەموو زیادکردنێکدا ئەم تاقیکردنەوەیە دووبارە بکەرەوە تا دەفرەکە پڕ دەبێت، بەمەش کۆمەڵێك جووتی ڕێکخراوی جیاوازت دەست دەکەوێت لەسەر ڕووتەختی پۆتانەکان بیاننوێنە.





*سامپڵ = نموونە (نموذج)

## چالاکی 1

1. قەبارەی دەفرەکە دیاریبکە. قەبارەکە دابەش بکە بۆ 10 بەش ئەنجامی دابەشکە لە نزیکترین ژمارەی تەواو نزیك بکەوە ( بۆ نموونە: ئەگەر قەبارەی دەفرەکە $347mm^3$ بێت بە دابەش کردنی بەسەر 10 دا ژمارە 34.7 دەست دەکەوێت نزیکیبکەوە لە 35 ).
2. 10 جار ئاو بۆ دەفرەکە زیاد بکە، لەهەر جاریکدا قەبارەی زیادکراو( $35mm^3$ ) لە نموونەی پێشوودا گۆڕانەکان کە بەسەر قەبارەی ئاوەکە وبەرزیەکەی دادێت دوای هەموو زیاد کردنێك تۆمار بکە. لەخشتەیەکی وەك خشتەکەی بەرامبەرت گۆڕانی قەبارەی ئاوەکە و بەرزیەکەی لە ناو دەفرەکەدا تۆمار بکە. ئەم کردارە تا دەفرەکە پڕ دەبێ دووبارە بکەرەوە.

| | بەرزی (Cm) | قەبارە $(mm^3)$ |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| 8 | | |
| 9 | | |
| 10 | | |

## چالاکی 2

1. پێدراوە تۆمار کراوەکانی خشتەی پێشوو بەکاربهێنە. جووتە ڕێکخراوەکان لەسەر ڕووتەختی پۆتانەکان بنوێنە ، وای دابنێ قەبارە $x$ وبەرزی $y$ بێت.
2. پێدراوەکانی خشتەی پێشوو لە بژمێری ڕوونکردنەوەیی (ئەگەر هەبێت) تۆماربکە داوا لە بژمێرەکە بکە دوو سامپلی جیاوازت بداتێ کە جووتە ڕێکخراوەکانی پێشوو بنوێنن. سامپلی یەکەم نەخشەیەکی ڕادەداری پلە 3 بێت ودووەم نەخشەیەکی دووجابێت.
3. بۆ بەراوردکردنی دوو سامپلەکە هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی هەردووکیان لەسەر ڕووتەختی پۆتانەکان بکێشە.ئەوەیان هەڵبژێرە کە پێت ڕاستترە لەوی تریان( ئەوەی کە نزیکترە لە نواندنی جووتە ڕێکخراوەکە).
4. ئایا دەتوانیت ئەم سامپلە بەکاربێنیت بۆ خەملاندنی بەرزی ئاوی دەفرەکە بە تێکردنی قەبارەی جیاواز لە ئاوی خشتەی پێشوو؟ ڕوونیبکەوە.



# 4

# پێداچوونەوەی بەش

بەهای ئەم ڕادەدارانە هەژماربکە کاتێک $x=2$ ، $x=-1$.

1 $-x^3+4x^2-2$

2 $x^3+2x^2-1$

3 $x^4-22$

4 $19-x^3-x^2$

کۆکردنەوە یان لێدەرکردن بکە پاشان ئەنجام بە سادەترین شێوە بنووسە

5 $(3x^3-5x^2+8x+1)+(11x^3-x^2+2x-3)$

6 $(7x^3-8x^2+2x-3)-(x^3+x^2-6)$

هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی ئەم نەخشانە بکێشە.ئایا نەخشەکە بەهای گەورەترین یان بچووکترینی هەیە، بەهای نزیکەییان بنووسە. ناوچەی ڕوو لە زیادبوون وروو لەکەمبوونیان بنووسە.

7 $f(x)=x^2-2x+9$

8 $f(x)=-x^2+5x-4$

9 $f(x)=2x^3+5x^2-1$

10 $f(x)=-2x^3+x^2-9$

لێکبدە پاشان بەسادەترین شێوە بنووسە.

11 $2x^3(5x^4-3x+x^2-6-x^3)$

12 $(x+4)(x^3-7)(x+1)$

ئەم ڕادەدارانە شیتەڵبکە

13 $x^3+4x^2-5x$

14 $x^3-3x^2-10x$

15 $x^3-125$

16 $27x^3+1$

لە جیاتیدانان بەکاردهێنە تاکو بڕیاربدەیت ئایا ڕادەداری یەکەم دابەش دەبێت بەسەر دووەم یان نا؟

17 $(x^3-7x^2+4x+12)$ ؛ $(x-2)$

18 $(x^3-5x^2-11x+12)$ ؛ $(x+2)$

دابەشبکە

19 $(x^3+6x^2-x-30)$ ؛ $(x-2)$

20 $(x^3-2x^2-11x+12)\div(x^2-x-12)$

ئەم هاوکێشانە شیکاربکە وهەموو ڕەگەکانی دیاریبکە.

21 $x^4-8x^2+16=0$

22 $x^4-10x^2+24=0$

23 $x^4-10x^2+9=0$

24 $x^4-13x^2+12=0$

ئەم هاوکێشانە شیکاربکە، ئەگەر زانیت ژمارە پێدراوەکە یەکێك لە ڕەگەکانییەتی.

25 $x^3+7x^2+16x+12=0$ ؛ $-3$

26 $x^3+3x^2-16x-48=0$ ؛ $-3$

27 $x^3-11x^2+38x-40=0$ ؛ $4$

28 $x^3-6x^2-x+6=0$ ؛ $6$

29 هاوکێشەی $x^3-x^2-6x+6=0$ شیکاربکە.

پلەی ئەم ڕادەدارانە دیاریبکە

30 $3x^3+11x^2-2x+1$

31 $8x^5-6x^2+10x^3$

32 $-x^2+8x-5x^4-3$

33 $-2x^2-x^3+7x^4$



# تاقیكردنەوەی بەش

بەهای ئەم ڕادەدارانە هەژماربكە كاتێك $x$ بەهای 2ـ و 3 وەربگرێت.

1 $x^3-2x^2+5$

2 $x^4-x^2+3x-4$

3 $5x^2-3x+1$

4 $7x^3+x^2-2$

ئەم ڕادەدارانە كۆبكەرەوە یان لە یەكیاندەربكە.پلە وژمارەی ڕادەكانی دیاریبكە پاش ئەوەی بە شێوەی گشتی بنووسە.

5 $(5x^3-3x^2+x-7)+(3x^2-x-6)$

6 $(2x^5+9x^3-7x+4)-(9x^3+3x^2+4)$

7 **پارە پێدان**: لە یەكێ لە وولاتەكان حكومەت سندوقێكی تایبەتی دانا بۆ هاندانی كرێكارەكانی. بە كۆكردنەوەی بڕی یارمەتی 5000 دینار لەسەرەتای هەر ساڵێك تاوەكو لە پیریدا سوودی لێوەربگرن، حكومەتیش 7%ی كۆی پارەی دانراوی هەركرێكارێك بدات، سەرجەمی پارەی دانراوی كرێكارێك چەندە؟ دوای دانانی قیستی پێنجەم.

هێڵكاری ڕوونكردنەوەیی ئەم نەخشانە بكێشە. گەورەترین وبچووكترین بەها بۆ نزیكترین دەیی بدۆزەرەوە. وناوچەی ڕوو لە زیادبوون وڕوو لەكەمبوونیشیان بۆ دیاریبكە.

8 $f(x)=2-2x-x^2$

9 $f(x)=x^3+3x^2+4$

10 $f(x)=x^4-3x^2-4$

11 $f(x)=5-3x^2-x^3$

ئەم ڕادەدارانە شیتەڵبكە.

12 $5x^4-180x^2$

13 $4x^3-5x^2-8x+10$

14 $2x^3+128$

15 $x^4-7x^3+12x^2$

بەبەكارهێنانی دابەشكردنی ئەقلیدی ئەمانە دابەشبكە.

16 $(2x^4-7x^3-15x^2+8x+12)$ بەسەر $(2x+3)$.

17 $(x^3+3x^2-2x-6)$ بەسەر $(x^2-2)$.

بەبەكارهێنانی دابەشكردنی بژمێری ئەمانە دابەشبكە.

18 $(-x^3+6x^2-11x+6)$ بەسەر $(x-3)$.

19 $(x^3+6x^2-27)$ بەسەر $(x+3)$.

20 **پیشە سازی** نەخشەی $V(x)=x(14-2x)(32-2x)$ قەبارەی تەختەی لاكێشەتەریب دەنوێنێت. ڕادەداری قەبارەكە بە شێوەی گشتی بنووسە پاشان قەبارەكەی هەژمێر بكە كاتێك $x=3$

ڕەگەكانی ئەم هاوكێشانە بدۆزەوە.

21 $-2x^3+7x^2+3x=0$

22 $x^4+2x^3-7x^2-14x=0$

23 $x^4-6x^2+8=0$

24 $x^4+2x^3-7x^2-14x=0$

25 **وزە**: سایلۆی غازی شل بە شێوەی لولەكێكی بازنەیی وەستاوە كە هەریەكێ لە سەرەكانی بە نیوە گۆیەك داپۆشراوە.ئەگەر نەخشەی $V(r)=15\pi r^2+\frac{4}{3}\pi r^3$ قەبارەی سایلۆیەك بێت بەمەتر سێجا كە $r$ نیوەتیرەی بنكەكەی بێت، بەهای نزیكەیی قەبارەی سایلۆكە هەژمار بكە كاتێك نیوەتیرەی بنكەكەی $0.5m$ بێت.

ئەم نەخشە ڕادەدارانە بنووسە كە پاسادانی ئەم مەرجانە دەكەن.

26 پلەكەی = 2 ، $f(0)=3$ سفرەكانی 1 و $\frac{3}{7}$

27 پلەكەی = 3 ، $f(0)=-18$ سفرەكانی 3 و 3ـ و 1ـ

28 پلەكەی = 3 ، $f(0)=30$ سفرەكانی 3ـ و 1ـ و 2 .

# 4

# تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

**1** کام جووتی ڕێکخراو دەبێتە کۆمەڵە شیکاری هەردوو لاسەنگەی $y \geq -x$ ∧ $y \geq 3x+2$ ؟

أ $(1,-5)$ ب $(0,5)$

ج أ و ب پێکەوە د نە أ و نە ب

**2** لاری ڕاستەهێڵی $3x+4y=2$ بریتییە لە

أ $3$ ب $\frac{3}{2}$

ج $-\frac{3}{4}$ د $4$

**3** هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵەی بە خاڵی $(1,-3)$ دا دەڕوات ئەستوونە لەگەڵ ڕاستەهێڵی $y=2x-2$ کامەیە؟

أ $2y=-x+5$ ب $2y=-x-5$

ج $y=-\frac{1}{2}x+6$ د $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

**4** کام لەمانە شیتەڵکردنی ڕادەداری $x^2-5x+6$ دەنوێنێت؟

أ $(x-2)(x-3)$ ب $(x+2)(x-3)$

ج $(x+1)(x+6)$ د $(x-1)(x-6)$

**5** سەری کام لەم نەخشانە بەهای گەورەترین دەنوێنێت.

أ $y=3x^2+5x$

ب $y=7x+5x-3x^2$

ج $y=3+5x+\frac{1}{3}x^2$

د $y=\frac{1}{3}x^2$

**6** ژمارەی کۆمەڵە شیکاری سستەمی هاوکێشە سنورردارەکان دەکاتە.

أ سفر ب $1$

ج $1$ بە لایەنی کەمەوە د ژمارەیەکی نا کۆتایی

**7** بەهای $|3.2|-|-2.5|$ ؟ هەژمێر بکە.

**8** یەکتربڕینی ڕاستەهێڵی $x-5y=15$ لەگەڵ تەوەری صادی بریتییە لە

أ $15$ ب $-1$

ج $3$ د $-3$

**9** کۆمەڵەی شیکاری لاسەنگەی $4x+2<2x+1$ بریتییە لە

أ $x \geq 1$ ب $x>2$

ج $x<\frac{1}{3}$ د $x<-\frac{1}{2}$

**10** کام لەمانە کۆمەڵەی شیکارە بۆ لاسەنگەی $|x| \leq 5$ ؟

أ $-5 \leq x \leq 5$ ب $2 \leq x \leq -2$

ج $5 \leq x \leq -5$ د $-3 \leq x \leq 3$

**11** کۆمەڵەی شیکاری سیستمی هێڵی $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ بریتییە لە

أ $(2,3)$ ب $(2,1)$

ج $(-3,2)$ د $(0,1)$

**12** ڕادەداری $(x+1)(x+2)(x-4)$ بە شێوەی گشتی بنووسە.

**13** ئەم نەخشە دووجایە لەسەر شێوەی بنەڕەتی بنووسە $f(x)=2x^2-8x+9$ .

**14** کۆبکەوە $(2x^3+3x^2+1)+(5x^2-2x+2)$.

**15** لێدەربکە. $(5x^3+4x^2-x)-(x^2+2x-1)$

ئەم برە دووجایانە شیتەڵبکە( ئەگەر توانرا)

**16** $-3y^2-5y$

**17** $x^2-5x-36$

**18** $24x^2+5x-36$

**19** $36x^2-46x-12$

**20** ئەم هاوکێشە $\frac{2x}{3}=\frac{x+2}{2}$ شیکاربکە.

## بەشی پێنجەم

# بڕەکان و نەخشە ڕێژەییەکان

# Expressions and Rational Function

1. گۆڕانی پێچەوانە ونەخشەی هەڵگەڕاوە.
2. نەخشە ڕێژەییەکان
3. لێکدان ودابەشکردنی بڕە ڕێژەییەکان.
4. کۆکردنەوە و لێدەرکردنی بڕە ڕێژەییەکان.
5. هاوکێشە ولاسەنگە ڕێژەییەکان.
6. نەخشەی ڕەگی دووجا

پرۆژەی بەشەکە

پێداچوونەوە

تاقیکردنەوەی بەش

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

# بڕەکان و نەخشە ڕێژەییەکان

## Expressions and Rational Function

بەشی

5

لەم بەشەدا بڕەکان و نەخشە ڕێژەییەکان ونەخشەی ڕەگی دووجا دەخوێنین. بڕە ڕێژەییەکان ئەو بڕانەن کە بەشێوەی ڕێژەی دوو ڕادەدار دەنووسرێت بەڵام نەخشە ڕێژەییەکان ئەو نەخشانەن کە بە هۆی بڕە ڕێژەییەکانەوە پێناسە دەکرێت. نەخشەی ڕێژەیی ونەخشەی ڕەگی دووجا لە زۆر بواری جیاوازدا بەکار دەهێنرێن. وەك فیزیا و کیمیا وئەندازە وئابوری وبازرگانی.

وانەکان



قەبارەی هاوێنە بڕی ئەو گورزە تیشکە دیاریدەکات کە دەچێتە چاوەوە. لە کامێرای فۆتۆگرافییدا کونی هاوێنەکە بڕی گورزە تیشکەکە دیاریدەکات.






## دەربارەی پرۆژەی بەش

زۆربەمان دەتوانین ناوەندەی کۆمەڵێك بەها بە ئاسانی هەژمێر بکەین.ناوەندەکان لە زۆر بوارەکانی ژیاندا بەکاردەهێنرێن وەك گۆڕینی دراوی بیانی لە بانکەکاندا، زیادکردنی کرێی کرێکار، بەکاربردنی سوتەمەنی بۆ ئۆتۆمبیل، ناوەندەکانی خێرایی. دەتوانین چەند جۆرێك ناوەندە هەژماربکەین. لەم بەشەدا دوو جۆریان وەردەگرین. ناوەندە ژمێرەیی و ناوەندە گونجاو. پێدراوەکان بەکاردەهێنین بۆ دیاریکردنی ئەو ناوەندەی کە شیاوترە لە هەر بارێکدا.

پاش تەواوبوونی ئەم بەشە توانای ئەمانەت دەبێ کە:

- ناوەندە ژمێرەیی وناوەندە گونجاو هەژمار بکەیت بۆ کۆمەڵە پێدراوێك.
- پەیوەندی نێوان ناوەندە ژمێرەیی وناوەندە گونجاو دیاریبکەیت.
- شیاوترین ناوەند دیاریبکەیت بۆ هەژمارکردنی کۆمەڵێك پێدراو.

وانەی 1

# گۆڕانی پێچەوانە ونەخشەی هەڵگەڕاوە

## Inverse Variation and Inverse Function



**ئامانجەکان**

- گۆڕانی پێچەوانە دەناسێت و نەگۆڕەکەی دیاریدەکات.
- هاوکێشەی گۆڕانی پێچەوانە دەنووسرێت.
- ئەو پرسیارانە شیکاردەکات کە پەیوەندیان بە ژیانی ڕۆژانەوە هەیە وگۆڕانێکی پێچەوانەیان تێدایە..

**بۆچی**

لەو پەیوەندیانەی کە دوو گۆڕاو پێکەوە دەبەستێتەوە، پەیوەندییەکی وەك ڕێژەی نێوان گۆڕاوی بەستراو وگۆڕاوی سەربەست نەگۆڕە، لەهەندێ پەیوەندیشدا لێکدانی دوو گۆڕاوەکە نەگۆڕە، یەکەم جۆری پەیوەندی نەخشەیەکی هێڵییە و پەیوەندییەکەی تر جۆرێکە لە نەخشەی ڕێژەیی نموونەش بۆ ئەوە پەیوەندی نێوان ژمارەی کرێکار وکاتی خایەنراو بۆ تەواوکردنی پرۆژەیەك.

زۆربەی جار لاوەکان خۆبەخشانە هەڵدەستن بە چاندنی دارو دەرخت بۆ سەوز کردنی ناوچە ڕووتەکان. ژمارەی بەشداربووەکان لە چاندنی دەرختەکاندا ڕۆڵێکی گرنگی دەبێت لە دیاریکردنی کاتی پێویست بۆ ئەنجامدانی ئەم پرۆژەیە. هەرچەند ژمارەکە زیادبکات، کاتی پێویست کەم دەبێتەوە بە پێچەوانەوشەوە لەم چالاکیەدا ئەو جۆرە پەیوەندییەت بۆ ڕووندەبێتەوە.

### چالاکی 1

### دۆزینەوەی گۆڕانی پێچەوانە — Exploring Inverse Variation

تیمێکی دێدەوانی بەڵێنیدا درەخت بچێنێت بۆ سەوز کردنی ناوچەیەکی ڕووت وا دانرا هەر تیمێك لە سەعاتێکدا دە درەخت بروێنێت.

1. یەك تیم چەند کاتی پێویستە بۆ ڕواندنی هەموو درەختەکان.
2. کاتی پێویست چەند دەبێت ئەگەر 50 تیم بەکارەکە هەستن.
3. کاتی پێویست چەند دەبێت ئەگەر 100 تیم بەکارەکە هەستن.
4. نەخشەیەك بنووسە کاتی خایەنراو بە کاتژمێر T وژمارەی تیمەکان $x$ بێت بۆ ڕواندنی هەموو درەختەکان.

خاڵی چاودێری ✓

## گۆڕانی پێچەوانە Inverse Variation

دوو گۆڕاوی $x$ ، $y$ بە گۆڕانێکی پێچەوانە بەیەك دەبەسترێنەوە، ئەگەر ئەنجامی لێکدانیان بکاتە نەگۆڕێك، بەهاکانیان هەر چەندێك بێت. واتە $xy = h$ کاتێك $h$ ژمارەیەکی ڕاستی بێت جگە لە سفر پێشی دەوترێت نەگۆڕی گۆڕانی پێچەوانە. **Constant of The Inverse Variation Relation**

بەپێی پەیوەندی $xy = h$ ، $h \neq 0$ نابێت هیچ یەکێك لە گۆڕاوەکان بەهای سفر وەربگرێت.

دەتوانین پەیوەندی پێچەوانەکەی پێشوو بەم شێوەیە بنوسین $y = \frac{h}{x}$ .

**چالاکی 2**

## دۆزینەوەی نەخشەی هەڵگەڕاوە Exploring The Inverse Function

1. ئەم خشتەیە بنووسەوە وتەواویبکە کاتێك $y = \frac{1}{x}$

| $x$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | | | | | | | |
| $xy$ | | | | | | | | | |

**شیکاری پرسیار**

2. بە دوای شێوازێك بگەڕێ. بەهای $y$ چی لێدێت کاتێك بەهای $x$ زیاد بکات؟ ئەی $y$ چی لێدێت کە $x$ کەمبکات؟

3. هەنگاوی یەکەمی چالاکیەکە دووبارەبکەوە کە $y = \frac{2}{x}$ یان $y = \frac{4}{x}$ ، ئایا بڕوات وایە کە شێوازە دۆزراوەکەی پرسیارەکە بە شیاوی دەمێنێتەوە ئەگەر $y = \frac{3}{x}$ ؟ هەنگاوی یەکەم دووبارە بکەوە کاتێك $y = \frac{3}{x}$ .

**خاڵی چاودێری** ✔

4. پەیوەندی $y = \frac{h}{x}$ چۆن دەگۆڕێت کاتێك $h > 0$ ، کاتێك بەهای $x$ زیاد بکات وهەروەها کاتێك کەمبکات؟

5. ئەگەر $y = \frac{h}{x}$ ، $h > 0$ ئایا دەگونجێت بەهای $x$ سفر بێت؟ ئەوە لێکبدەوە.

ئەگەر بەهای گۆڕاوی $x$ وگۆڕاوی $y$ بزانیت لەو پەیوەندیەی گۆڕانی پێچەوانە دەگەیەنێت ئەوا دەتوانیت بەهای نەگۆڕی $h$ بدۆزیتەوە وهەروەها دەشتوانیت $y$ وەك نەخشەیەك بە پێی $x$ بەم شێوەیە بنووسیت $y = \frac{h}{x}$،لەو نموونانەی لە ژیانی ڕۆژانەوە وەردەگیرێن زۆربەی کات بەهای $x$ و $y$ موجەب دەبن.

**نموونە 1**

ئەگەر گۆڕاوی $x$ و $y$ پێچەوانە بگۆڕێن، $y = 13.5$ کاتێك $x = 4.5$

أ نەگۆڕی گۆڕانەکە بدۆزەوە هاوکێشەی پەیوەندییەکەی نێوان $x$ و $y$ بنووسە.

ب بەهای $y$ لەم بارانەدا بدۆزەوە کە $x = 0.5$ ، $x = 1$ ، $x = 1.5$ ، $x = 2$ ، $x = 2.5$.

**شیکار**

أ $h = xy = 4.5 \times 13.5 = 60.75$ دەتوانیت پەیوەندیەکە بەم شێوەیە بنووسیت $y = \frac{60.75}{x}$

ب بە بەکارهێنانی بژمێر بەهای $y$ بە پێی بەهاکانی $x$ ی دیاریکراو بدۆزەوە.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0.5 | 121.5 |
| 1 | 60.75 |
| 1.5 | 40.5 |
| 2 | 30.375 |
| 2.5 | 24.3 |

هەوڵبدە

$x$ و $y$ دوو گۆڕاوی پێچەوانەن کاتێك $y=120$ ئەوا $x=6.5$ نەگۆڕی گۆڕانەکە و هاوکێشەی پەیوەندی نێوان $x$ و $y$ بنووسە پاشان بەهای $y$ هەژمێربکە کاتێك $x$ ئەم بەهایانە وەردەگرێت

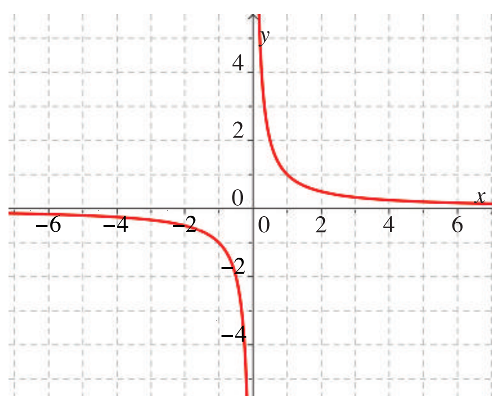
$x=14 \quad x=12.5 \quad x=8 \quad x=4.5 \quad x=1.5$

## نەخشەی هەڵگەڕاوە Inverse Function

کەمێك لەمەوپیش دیتت کە هاوکێشەی $y=\frac{h}{x}$ کاتێك $h\neq 0$ پەیوەندییەکی پێچەوانە دەنوێنێت لە نێوان دوو گۆڕاوی $x$ و $y$ ئەم پەیوەندییەش بە نەخشەی $y$ بە پێی $x$ دەناسرێت. سادەترین جۆری ئەم نەخشەیەش ئەوەیە کاتێك نەگۆڕەکە 1 بێت واتە هاوکێشەکە بەم چەشنە بێت $f(x)=\frac{1}{x}$

**نەخشەی هەڵگەڕاوە Inverse Function**

نەخشەی هەڵگەڕاوە ئەو نەخشەیە کە بەم هاوکێشەیە دەردەبڕێت $f(x)=\frac{1}{x}$

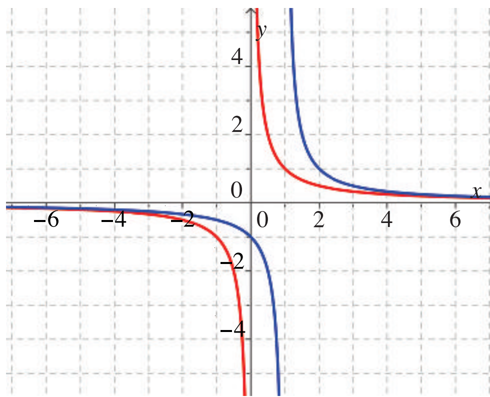



شێوەی بەرامبەر هێڵکاری رِوونکردنەوەیی ئەم نەخشەیە دەنوێنێت ئەگەر بەوردی سەرنجی هێڵکارییەکە بدەیت، تێبینی ئەم خاڵانە دەکەیت :

1. دەتوانیت بەهای $y$ هەژمار بکەین بە پێی $x$ بۆ هەموو بەهاکانی $x$ جگە لە سفر. مانای ئەوەیە بواری نەخشەکە هەموو ژمارە راستیەکانە جگە لە سفر.
2. تا بەهای $x$ زیاد بکات بەهای $y$ کەم دەکات ئەمەش بەوە دەردەبڕین و دەڵێین نەخشەکە رِوولەکەم بوونە.
3. کاتێك $x$ موجەب بێت وبەهاکەی زیادبکات، بەهای $y$ بە موجەبی دەمێنێتەوە ونزیك دەبێتەوە لە سفر. بەم شێوەیەش دەریدەبرِین نزیکدەبێتەوە لە سفر لەلای موجەب کاتێك $x$ نزیك دەبێتەوە لە $+\infty$
4. کاتێك $x$ سالب بێت وبەهاکەی کەمبکات، بەهای $y$ بە سالبی دەمێنێتەوە ونزیك دەبێتەوە لە سفر .بەم شێوەیەش دەریدەبرِین. $y$ نزیك دەبێتەوە لە سفر لەلای سالب کاتێك $x$ نزیکدەبێتەوە لە $-\infty$ .
5. $y$ نزیکدەبێتەوە لە سفر کاتێك بەهای رِووتی $x$ وردە وردە زیاد دەکات. لێرەشدا دەوترێت راستە هێڵی $y=0$ واتە تەوەری $x$ دەرکەناری ئاسۆیی هێڵی رِوونکردنەوەیی نەخشە هەڵگەڕاوەکەیە.
6. هەر چەندە بەها سالبەکانی گۆڕاوی $x$ زیاد بکات، بەهاکانی $y$ بە سالبی دەمێنێتەوە و کەمدەکات لێرەدا دەوترێت $y$ نزیك دەبێتەوە لە $-\infty$ کاتێك $x$ نزیك دەبێتەوە لە سفر لە لای چەپەوە.
7. هەر چەندە بەها موجەبەکانی گۆڕاوی $x$ کەمبکات، بەهاکانی $y$ بە موجەبی دەمێنێتەوە وزیاد دەکات. لێرەدا دەوترێت $y$ نزیك دەبێتەوە لە $+\infty$ کاتێك $x$ نزیك دەبێتەوە لە سفر لەلای راستەوە.
8. بەهای رِووتی $y$ وردە وردە زیاد دەکات کاتێك بەهای رِووتی $x$ وردە وردە کەم بکات. لێرەشدا دەوترێت راستە هێڵی $x=0$ واتە تەوەرەی $y$ دەرکەناری شاوڵی هێڵی رِوونکردنەوەیی دەرکەناری نەخشە هەڵگەڕاوەکەیە.

## نموونە 2

لە هەمان ڕووتەختی پۆتانەکاندا هەر دوو هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشە هەڵگەڕاوەی و نەخشەی $f(x)=\frac{1}{x-1}$ بکێشە، ئەو جێگۆرکێ ئەندازەییە چییە کە هێڵی ڕوونکردنەوەیی یەکەم دەگۆڕێت بۆ هێڵی ڕوونکردنەوەیی دووەم.




**شیکار** لە شێوەی بەرامبەردا دەردەکەوێت کە گواستنەوە لە هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی هەڵگەڕاوە بۆ هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی دووەم بەکشانێکی ئاسۆیی بەرەو لای ڕاست بە دووری یەك یەکە دەبێت. تێبینی ئەوە بکە $x=1$ دەرکەناری ستوونی هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی دووەمە، کەوێنەی ڕاکێشراوی دەرکەناری ستوونی نەخشە هەڵگەڕاوەکەیە بەراکێشانی ئاسۆیی.

**هەوڵبدە** لە ڕووتەختی پۆتانەکاندا هەردوو هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی هەڵگەڕاوە و نەخشەی $f(x)=\frac{1}{x+1}$ بکێشە، ئەو جێگۆرکێ ئەندازەییانە کە هێڵی ڕوونکردنەوەیی یەکەم دەگۆڕێت بۆ هێڵی ڕوونکردنەوەیی دووەم چییە؟

# ڕاهێنـــــــــان

## بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

**1** هاوکێشەیەك بنووسە هەردوو گۆڕاوی $x$ و $y$ بە پەیوەندییەکی گۆڕانی پێچەوانە بەیەکەوە ببەستێ کە نەگۆڕەکەی $h$ بێت. هاوکێشەیەکی تر بنووسە کە ئەوە دەربڕێت.

**2** مەبەست چییە کە دەوترێت پەیوەندی نێوان خێرایی وکات گۆڕانێکی پێچەوانەیە. بە نموونە وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

**3** $x$ و $y$ دوو گۆڕاوی پێچەوانەن $y=3$ کاتێك $x=8$ چۆن بەهای $y$ دەدۆزێتەوە کاتێك $x=2$ ؟

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

$x$ و $y$ دوو گۆڕاوی پێچەوانەن. هاوکێشەیەك بنووسە ئەو پەیوەندییە بنوێنێت.

**4** $y=12$ کاتێ $x=60$ **5** $y=3$ کاتێ $x=4$

ئەم خشتانەی خوارەوە بەهای گۆڕاوی $x$ وگۆڕاوی $y$ ی بەرامبەری دیاریدەکات ئایا دوو گۆڕاوەکە پێچەوانە دەگۆڕێن؟ هۆی وەڵامەکەت ڕوونبکەوە. ئەو هاوکێشەیە بنووسە کە گۆڕانە پێچەوانەکە دەنوێنێت( ئەگەر هەبێت).

**6**

| $x$ | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 12 | 8 | 6 |

**7**

| $x$ | 4 | 15 | 20 | 60 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 30 | 8 | 6 | 2 |

**8**

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 10 | 9 | 8 | 7 |

**9**

| $x$ | 5 | 15 | 25 | 75 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 45 | 15 | 9 | 3 |

## ڕاهێنان وجێبەجێکردن

کام لە هاوکێشانە گۆڕانی پێچەوانەیە لە نێوان دوو گۆڕاوەکەدا.

**10** $xy = 400$　**11** $y = \frac{-28}{x}$　**12** $y = 10 - x$　**13** $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$

**14** $x = 10y$　**15** $\frac{x}{5} = \frac{3}{y}$　**16** $x = y$　**17** $y = \frac{42}{x}$

لە پرسیارەکانی 18 تا 23، پەیوەندی نێوان $x$ و $y$ پەیوەندییەکی پێچەوانەیە.

**18** $y = 8$ کاتێك $x = 6$ بەهای $y$ چەندە ئەگەر $x = 12$

**19** $y = 9$ کاتێك $x = 12$ بەهای $y$ چەندە ئەگەر $x = 36$

**20** $y = 3$ کاتێك $x = 32$ بەهای $x$ چەندە ئەگەر $y = 4$

**21** $y = 3$ کاتێك $x = -8$ بەهای $x$ چەندە ئەگەر $y = -4$

**22** $y = \frac{3}{5}$ کاتێك $x = -60$ بەهای $y$ چەندە ئەگەر $x = 2$

**23** $y = \frac{3}{4}$ کاتێك $x = 12$ بەهای $y$ چەندە ئەگەر $x = 27$

**بەستنەوە**

**24** **ئەندازە** سێگۆشەیەك ڕووبەرەکەی نەگۆڕە. ئەو پەیوەندییە کامەیە کە بنکە وبەرزی بەیەکەوە دەبەستێت؟ئەگەر بەرزییەکەی $36cm^2$ بێت کاتێك بنکەکەی 22cm بێت. درێژی بنکەکەی چەندە کاتێك بەرزییەکەی ببێتە 24cm ؟



**25** **ئەندازە:** لاکێشەیەك ڕووبەرەکەی 36cm بێت. درێژی لاکێشەیەك چەندە کە هەمان ڕووبەری هەبێت وپانییەکەی 3cm بێت؟ ئەگەر واتدانا ڕووبەری لاکێشەکە نەگۆڕێت، جۆری پەیوەندی نێوان درێژی وپانی دیاریبکە.

**26** **میکانیك** پەیوەندی نێوان خێرایی خولانەوەی پەپکێکی دداناوی و ژمارەی ددانەکانی گۆڕانێکی پێچەوانەیە. خێرایی پەپکێك 20 ددانی هەبێت چەندە؟ ئەگەر بزانیت خێرایی خولانەوەی پەپکێکی 16 ددانی 500 خول بێت لە یەك خولەکدا.

**گەشت** تێکڕای گۆڕانی خێرایی هۆیەکی گواستنەوە وکاتی خایەنراو بۆ برینی ماوەیەکی دیاری کراو پەیوەندیەکی پێچەوانەیە

**27** ئامانج ماوەیەکی دیاریکراوی بە 6 کاتژمێر بە تێکڕای $80Km$ لە کاتژمێرێکدا بڕی کاتی پێویست چەندە بۆ برینی هەمان ماوە ئەگەر خێراییەکەی $90Km/h$ بوایە.

**28** فڕۆکەیەك پێویستی بە 2.7 کاتژمێر هەیە بۆ برینی ماوەی نێوان دووشار بە تێکڕای 1 020 km/h . فڕۆکەکە چەند کاتی پێویستە بۆ برینی هەمان دووری، کاتێك تێکڕای خێرایەکەی 810 km/h بێت.

**29** **فیزیا** ئەگەر درێژی شەپۆلێکی ڕادیۆ لەرەلەرەکەی پێچەوانە بگۆڕێت، درێژی شەپۆلێک چەندە ئەگەر لەرەلەرەکەی $2000Kh$ بێت.ئەگەر زانیت شەپولێك درێژییەکەی $200m$ بێت لەرەلەرەکەی $3000kh$ .

**30** **مۆسیقا** ئەگەر ژێی عودێك بلەرێتەوە ئەوا دەنگێك دروستدەکات. پەیوەندی نێوان ژمارەی لەرەلەرەکان ودرێژی ژێیەکەی پەیوەندییەکی پێچەوانەیە. درێژی ژێیەك چەندە؟ کاتێك ژێیەکە 370 جار بلەرێتەوە لە چرکەیەکدا. ئەگەر بزانیت درێژی ژێیەك $28cm$ بێت 518 لەرینەوەی هەیە لە چرکەیەکدا؟

## ڕوانینێك بۆ دواوە

هەر یەکە لەم برانە بە توانی موجەب بنووسە.

**31** $x^{-1}$ **32** $ab^{-3}$ **33** $\left(\frac{x}{y}\right)^{-2}$

**34** $y^{-2}b^3c^{-5}d$ **35** $\left[(x^{-3})^{-2}\right]^{-3}$

پۆتانی سەر و هاوکێشەی تەوەرەی ئەم برگە هاوتایانە بدۆزەوە.

**36** $y=-3x^2+5$ **37** $y=x^2+2x-3$ **38** $y=-x^2-5x+6$

**39** $y=x^2+2$ **40** $y=x^2+x+1$ **41** $y=2x^2-3x+2$

پلەی ئەم ڕادەدارانە دیاربیکە.

**42** $3x^5-2x^4+x^2-1$ **43** $2-5x+7x^2-x^3$ **44** $-5x^3-x^4+1$

## ڕوانینێك بۆ پێشەوە

**45** خشتەیەك بۆ بەهایەکانی نەخشەی $f(x)=\frac{1}{x+2}$ دروستبکە بە پێدانی بەهای$-3$ تا $-1$ بە پلەدارکردنی کە هەر هەنگاوێکی 0.1 بێت.
خشتەکە بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی بەهاکانی $y$ کاتێك $x$ نزیك دەبێتەوە لە $-2$ .

وانەی
2

# نەخشە ڕێژەییەکان Rational Functions

## ئامانجەکان

- نەخشە ڕێژەییەکان دەناسێت وبەهاکەی هەژمار دەکات.
- هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی ڕێژەیی دەکێشێت و بوارەکەی دیاریدەکات و هاوکێشەی دەرکەنارەکانی دیاریدەکات.



**بۆچی**

نەخشە ڕێژەییەکان بەکاردێن بۆ نواندنی گەلێك پەیوەندی ژیانی ڕۆژانەمان زۆر جار ئەم نەخشانە بۆ شیکاری ئەو پرسیارانە بەکاردێنین کە پەیوەندییان بە بەرهەمی ئاوێتە هەیە.

ئاسۆ لە تاقیگەیەکی کیمیاییدا کاردەکات. کارەکەی وا پێویست دەکات ڕێژەی سوێری گیراوەیەك ڕێك بخات. ئاسۆ دەتوانێت نەخشەیەکی ڕێژەیی بەکاربهێنێت بۆ نواندنی ڕێژەی سوێری گیراوەیەك.

**نموونە 1**

**جێبەجێ کردنەکان**
**کیمیا**

**ئاسۆ گیراوەیەکی 65 ml لایە ڕێژەی سوێرییەکەی 10% یە و x ml ئاوی دلۆپێنراوی بۆ زیاد کرد بەمەش گیراوەیەکی نوێی دەستدەکەوێت.**

أ نەخشەی $s$ بنووسە کە ڕێژەی سوێری گیراوە نوێیەکە بە پێی هێندی ئاوە دلۆپێنراوەکە بێت.

ب ڕێژەی سوێری گیراوە نوێیەکە چەندە ، ئەگەر ئاسۆ $100\ ml$ زیادبکات؟

**شیکار**

أ ئەندازەی خوێ لە گیراوە بنەڕەتیەکە

$$10\% \times 65 = 6.5$$

$$\frac{6.5}{65} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{خوێ} \\ \leftarrow \text{گیراوە} \end{matrix}$$

ئەندازەی خوێ لە گیراوە نوێیەکە:

زیادکردنی $x\ ml$ لە ئاوی دلۆپێنراو

$$\frac{6.5}{65+x} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{خوێ} \\ \leftarrow \text{گیراوە} \end{matrix}$$

نەخشەی ڕێژەی سوێری لە گیراوە نوێیەکە:

$$c(x) = \frac{6.5}{65+x}$$

ب بۆ هەژمێر کردنی ڕێژەی سوێری پاش زیاد کردنی $100\ ml$ لە ئاوی دلۆپێنراو، هەژمێری بەهای نەخشەکە بکە کاتێك $x = 100$

$$c(100) = \frac{6.5}{65+100} \approx 0.039 \quad \text{یان} \quad 3.9\%$$

بری ڕێژەیی **Rational Expression** بریتییە لە ڕێژەی نێوان دوو ڕادەدار. **نەخشەی ڕێژەیی Rational Function** بە پێی بری ڕێژەیی پێناسە دەکرێت.نەخشەی $c(x)=\frac{6.5}{65+x}$ لە نموونەی 1 دا نەخشەیەکی ڕێژەییە بە پێی بری ڕێژەیی $\frac{6.5}{65+x}$ پێناسە کراوە.

**خاڵی چاودێری** ✓ ئایا نەخشەی $f(x)=\frac{x^2+2}{|x|}$ نەخشەیەکی ڕێژەییە؟ ڕوونیبکەوە.

نەخشەی هەڵگەڕاوەی $f(x)=\frac{1}{x}$ سادەترین نەخشەی ڕێژەییەکانە. لەوانەی پێشوودا بینیت بەهای نەخشەکە هەژمار ناکرێت کاتێك $x=0$ . بە شێوەیەکی گشتی بواری نەخشەی ڕێژەیی هەموو ژمارە ڕاستییەکانە جگە لەو ژمارانەی ژێرە دەکەن بە سفر، ئەو ژمارانەی ژێرە دەکەنە سفر پێیان دەوترێت ژمارە قەدەغەکراوەکان بۆ گۆڕاوی $x$

**نموونە** 2 بواری نەخشەی $f(x)=\frac{x^2-12x+12}{x^2+9x+20}$ دیاریبکە.

**شیکار**

ژمارە قەدەغەکراوەکان دیاریبکە، ئەویش بە دۆزینەوەی هەردوو ڕەگی هاوکێشەی $x^2+9x+20=0$

$$x^2+9x+20=0$$

$$(x+4)(x+5)=0$$

$$x=-4 \quad \text{یان} \quad x=-5$$

کەواتە بواری نەخشەکە هەموو ژمارە ڕاستییەکانە جگە لە $-4$ و $-5$ .

**هەوڵبدە** بواری ئەم نەخشە $f(x)=\frac{3x^2+x-2}{x^2+2x-3}$ دیاریبکە.

## دەرکەنارە ستوونییەکان Vertical Asymptotes

بیرت بێ نەخشەی هەڵگەڕاوە دەرکەنارێکی ستوونی هەیە هاوکێشەکەی $x=0$ و دەرکەنارێکی ئاسۆیی هەیە هاوکێشەکەی دەکاتە $y=0$ بە شێوەیەکی گشتی دەکرێت نەخشەی ڕێژەیی دەرکەناری ئاسۆیی وشاوڵی هەبێت. لەم چالاکیەدا ئەوەمان بۆ ڕووندەبێتەوە.

**چالاکی**

### دۆزینەوەی دەرکەنارە ستوونییەکان Exploring Vertical Asymptotes

1. نەخشەی $y=\frac{1}{x-2}$ بەکاربهێنە

أ ئەم خشتەیە بنووسەوە، بە بەکارهێنانی بژمێر تەواویبکە.

| $x$ | 1 | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 | 1.6 | 1.7 | 1.8 | 1.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | | | | | | | | |

ب ئەم خشتەیە بنووسەوە، بە بەکارهێنانی بژمێرە تەواوییبکە.

| $x$ | 3 | 2.9 | 2.8 | 2.7 | 2.6 | 2.5 | 2.4 | 2.3 | 2.2 | 2.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | | | | | | | | |

خاڵی چاودێری ✔

2. $y$ چی بەسەردێت کاتێك $x$ نزیکبێتەوە لە 2 لە لای چەپ وردە وردە؟ ئەی چی بەسەردێت کاتێك $x$ نزیکبێتەوە لە 2 لای ڕاست وردە وردە. پێشبینی بەهای $y$ بەچەند دەکەیت ئەگەر $x=2$ .

خاڵی چاودێری ✔

3. ئەگەر $y=\frac{1}{x+3}$ بە بەکارهێنانی بژمێر بەهای $y$ هەژمێربکە کاتێك نزیکبێتەوە لە 3- لە لای ڕاست پاشان ولای چەپ. چۆن پێشبینی بەهای $y$ دەکەیت ئەگەر $x=-3$

بەو ژمارە ڕاستییانەی کەوا لێناگەڕێت نەخشەی ڕێژەیی پێناسە کراوبێت دەوترێت ژمارە قەدەغەکراوەکان **Excluded Values** بۆ ئەو نەخشەیە.

بواری نەخشەی ڕێژەیی بریتییە لە هەموو ژمارە ڕاستییەکان جگە لە ژمارە قەدەغەکراوەکانی ئەو نەخشەیە.

خاڵی چاودێری ✔

بەهای قەدەغەکراوی نەخشەی $y=\frac{x+3}{x^2-x-6}$ دیاریبکە.

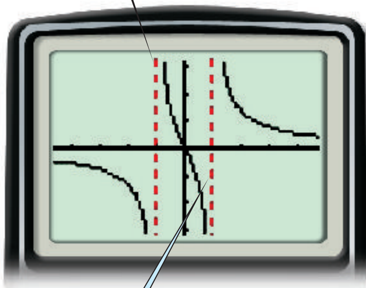
دەکرێت نەخشەی ڕێژەیی دەرکەناری ستوونی لە ژمارەیەکی قەدەغەکراودا هەبێت. مەرجی هەبوونی ئەم دەرکەنارەش بریتییە لە:

**دەرکەناری ستوونی Vertical Asymptotes**

ئەگەر $a$ – $x$ کۆڵکەیەك بێت لە کۆڵکەکانی ژێرەی نەخشەیەکی ڕێژەیی و کۆڵکەی سەرە نەبێت ئەوا ڕاستەهێڵی $x=a$ دەرکەناری ستوونی نەخشەکەیە.

نموونە 3

دەرکەنارە ستوونییەکانی نەخشەی $y=\frac{2x}{x^2-1}$ بدۆزەوە.




شیکار

ژێرە شیتەڵبکە $y=\frac{2x}{x^2-1}=\frac{2x}{(x+1)(x-1)}$

دوو ژمارەی قەدەغەکراوی نەخشەکە بریتین لە $-1$ و $1$

لەبەر ئەوەی هیچ کۆڵکەیەکی ژێرە کۆڵکەی سەرەش نییە بۆیە $x=1$ و $x=-1$ دوو دەرکەناری ستوونی نەخشەکەن.

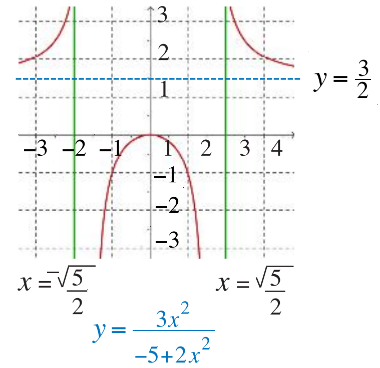
**ساغبکەوە** بە بەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی وێنەی نەخشەی $y=\frac{2x}{x^2-1}$ بکێشە. دڵنیا بکە کە هەردوو ڕاستەهێڵی $x=1$ و $x=-1$ دەرکەناری ستوونین.

هەوڵبدە دەرکەنارە ستوونییەکانی نەخشەی $y=\frac{x}{x^2+5x+6}$ بدۆزەوە.

خاڵی چاودێری ✔ نەخشەیەکی ڕێژەیی بنووسە کە سەرەی 1 بێت و ڕاستەهێڵەکانی $x=2$ و $x=-2$ دەرکەنارە ستوونییەکانی بن.

## Horizontal Asymptotes دەرکەنارە ئاسۆیییەکان

بەسوود وەرگرتن لە هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=\frac{3x^2}{-5+2x^2}$ دەتوانین دەرکەنارە ئاسۆییەکانی نەخشە ڕێژەییەکە دیاری بکەین. لەوێنەکەوە دەردەکەوێت ڕاستە هێڵی $y=\frac{3}{2}$ دەرکەناری ئاسۆیی نەخشەکەیە، ئەم دوو خشتەیەی خوارەوە دەری دەخەن هەتا $x$ دووربکەوێتەوە لە سفر بە ئاراستەی $+\infty$ یان $-\infty$ بەهای $y$ لە $\frac{3}{2}$ نزیك دەبێتەوە.




| x | y |
|---|---|
| 10 | 1.5385 |
| 20 | 1.5094 |
| 30 | 1.5042 |
| 40 | 1.5023 |
| 50 | 1.5015 |
| 60 | 1.501 |
| 70 | 1.5008 |

بەهای $x$ لەسفر دوور دەکەوێتەوە بە ئاراستەی $+\infty$

بەهای $y$ لە $\frac{3}{2}$ نزیك دەبێتەوە

| x | y |
|---|---|
| −10 | 1.5385 |
| −20 | 1.5094 |
| −30 | 1.5042 |
| −40 | 1.5023 |
| −50 | 1.5015 |
| −60 | 1.501 |
| −70 | 1.5008 |

بەهای $x$ لەسفر دوور دەکەوێتەوە بە ئاراستەی $-\infty$

بەهای $y$ نزیك دەبێتەوە $\frac{3}{2}$

ئەگەر پلەی سەرەی نەخشەکە وپلەی ژێرەی نەخشەکە یەکسان بن ئەوا دەتوانیت هاوکۆڵکەی ڕادە سەرەکییەکان هەردووکیان بەکاربهێنێت (بۆ سەرە 3 و بۆ ژێرە 2 ) بۆ نووسینی هاوکێشەی دەرکەناری ئاسۆیی نەخشەکە $y=\frac{3}{2}$ .

### دەرکەنارە ئاسۆییەکان Horizontal Asymptotes

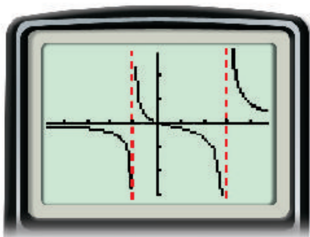
- ئەگەر پلەی سەرە لە پلەی ژێرە بچووکتر بوو ئەوا ڕاستە هێڵی $y=0$ دەرکەناری ئاسۆیی نەخشەکەیە.
- ئەگەر پلەی سەرە لە پلەی ژێرە گەورەتر بوو ئەوا نەخشەکە دەرکەناری ئاسۆیی نییە.
- ئەگەر پلەی سەرە وژێرە یەکسانبوون و $m$ هاوکۆڵکەی ڕادەی سەرەکی سەرە و $n$ هاوکۆڵکەی سەرەکی ژێرە بێت، ئەوا ڕاستە هێڵی $y=\frac{m}{n}$ دەرکەناری ئاسۆیی نەخشەکەیە.

**نموونە 4** دەرکەنارە ئاسۆیی وستوونییەکانی نەخشەی $y=\frac{x}{x^2-2x-3}$ بدۆزەوە.

**شیکار**

1. بۆ دۆزینەوەی دەرکەناری ستوونی ژێرە شیتەڵبکە.

$$y=\frac{x}{x^2-2x-3}=\frac{2x}{(x-3)(x+1)}$$



لەبەر ئەوەی هەردوو کۆڵکەکانی ژێرە نابنە کۆڵکەی سەرە کەواتە نەخشەکە دوو دەرکەناری ستوونی هەیە. کەبریتییە لە دوو ڕاستەهێڵی $x=3$ و $x=-1$ .

2. لەبەر ئەوەی پلەی سەرە بچووکترە لە پلەی ژێرە، ئەوا نەخشەکە تەنها یەك دەرکەناری ئاسۆیی هەیە کە بریتیە لە ڕاستەهێڵی $y=0$ .

**ساغبکەرەوە**

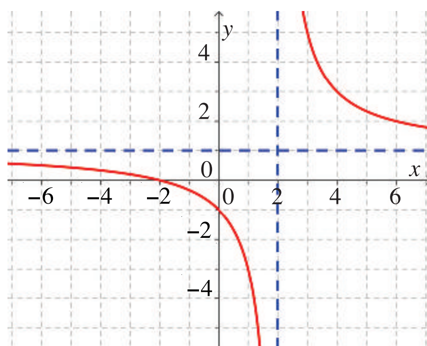
وێنەی هێڵی ڕوونکردنەوەیی $y=\frac{x}{x^2-2x-3}$ بکێشە و دەرکەنارەکان دیاریبکە.

## بەکارهێنانی دەرکەنارەکان بۆکێشانی هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی
## Using Asymptotes to Graph

لە نموونەی 5 دا. ئەوە فێردەبن چۆن دەرکەنارەکان بەکاربێنن بۆ کێشانی هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی ڕێژەیی.

**نموونە** 5 **هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=\frac{x+2}{x-2}$ بکێشە ودەرکەنارە ئاسۆیی وستوونییەکانی لەسەر دیاریبکە.**

**شیکار** هاوکێشە دەرکەنارەکان بنووسە پاشان و وێنەی بکێشە، یەک دەرکەناری ستوونی هەیە هاوکێشەکەی $x=2$ ویەک دەرکەناری ئاسۆیی هەیە هاوکێشەکەی $y=1$. خشتەیەک دروستبکە بۆ دیارکردنی ئەو خاڵانەی دەکەونە سەر هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەکە.




| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $3$ | $4$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-\frac{1}{3}$ | $-1$ | $-3$ | $5$ | $3$ | $2\frac{1}{3}$ |

پاشان خاڵەکان لەسەر ڕووتەختی پۆتانەکان دیاریبکەو وێنەکە بکێشە بە گەیاندنی خاڵەکان لەهەر لایەکیدا بە چەماوەیەکی گونجاو.

# ڕاهێنان

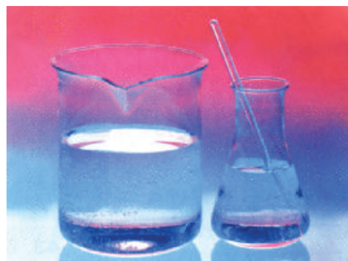
## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 چۆن ژمارە قەدەغەکراوەکانی نەخشەیەکی ڕێژەیی دیاریدەکەیت.

2 چۆن دەزانیت کۆڵکەی $x-a$ بۆ ژێرەی نەخشەیەکی ڕێژەیی دەرکەناری ستوونی دیاریدەکات یان نا.

3 چۆن دەرکەنارەکان بەکاردەهێنێت بۆ کێشانی هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=\frac{x-5}{x-3}$

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو



4 **کیمیا** بەگەڕانەوە بۆ نموونەی یەکەمی سەرەتای وانەکە لەسەر ڕێژەی سوێری. هاوکێشەی ئەو نەخشەیە بنووسە کە ڕێژەی سوێری گیراوە نوێیەکە دیاریدەکات. کاتێک ئاسۆ $x$ *ml* ئاوی دلۆپێنراو بۆ *90 ml* لە گیراوەکە زیاد بکات.بۆ ئەوەی ڕێژەی سوێریەکەی ببێتە *15%* ڕێژەی سوێری گیراوە نوێیەکە دەبێتە چەند؟ ئەگەر ئاسۆ *150ml* ئاوی دلۆپێنراو بۆ گیراوە بنەڕەتییەکە زیادبکات.

5 بواری نەخشەی $f(x)=\frac{2x^2-5}{x^2-7x+12}$ دیاریبکە.

**دەرکەنارەکانی ئەم نەخشانە دیاریبکە.**

6 $f(x)=\frac{3x-1}{4x^2-9}$ 7 $f(x)=\frac{2x^2-1}{x^2-9}$ 8 $f(x)=\frac{(x-3)^2}{x^2-5x+6}$

9 هێڵکاری ڕوونکردنەوەی نەخشەی $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$ بکێشە و هەموو دەرکەنارەکانی دیاریبکە.

## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ئەم نەخشانە ڕێژەیین یان نا؟ئەگەر ڕێژەیین بوارەکەی دیاریکە،ئەگەر نا هۆیەکەی ڕوونبکەوە.

**10** $f(x)=\frac{x}{2x-7}$

**11** $f(x)=\frac{x+2}{2x}$

**12** $f(x)=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2}$

**13** $f(x)=\frac{x}{(2x-7)(x+3)}$

**14** $f(x)=\frac{5^x}{x^5}$

**15** $f(x)=\frac{|x^2-4|}{|x+2|}$

دەرکەنارەکانی ئەم نەخشە ڕێژەییانە دیاریکە.

**16** $f(x)=\frac{3x+5}{x-2}$

**17** $f(x)=\frac{x+2}{2x^2}$

**18** $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$

**19** $f(x)=\frac{(x+2)^2}{x^2+5x+6}$

**20** $f(x)=\frac{x^2-16}{4-5x+x^2}$

**21** $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2+x-2}$

بوار و دەرکەنارەکانی ئەم نەخشانە دیاریکە.

**22** $f(x)=\frac{2x-2}{2x+2}$

**23** $f(x)=\frac{2x}{2x(x-5)}$

**24** $f(x)=\frac{(3x-1)(x+2)}{x+2}$

**25** $f(x)=\frac{x+1}{x^2+4x-21}$

**26** $f(x)=\frac{3x-1}{9x^2-36}$

**27** $f(x)=\frac{7x+8}{x^2-10x+25}$

**28** $f(x)=\frac{5x^2+1}{5x^2+3}$

**29** $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$

**30** $f(x)=\frac{x(x^2-4)}{x^2-7x+6}$

**31** $f(x)=\frac{2x+1}{x^3-27}$

ئەو نەخشە ڕێژەییانە بنووسە کە ئەم دەرکەنارانەیان هەیە.

**32** $x=2$ و $y=3$

**33** $x=-2$ و $y=0$

**34** $x=1$ و $x=-1$ و $y=2$

**35** $x=2$ و $x=-3$ و $y=-1$

**بەرەنگاربونەوە**

**36** بەهای $b$ لەنەخشەی $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+b}$ بدۆزەوە کاتێك نەخشەکە تەنها یەك دەرکەناری هەبێت، کاتێك نەخشەکە هیچ دەرکەنارێکی نەبێت بەهای $b$ دیاریکە؟

**گرێدان**

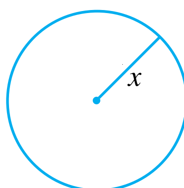
**37** ئەندازە لە لاکێشەی بەرامبەردا.




أ نەخشەی ڕێژەیی کە ڕێژەی چێوە بۆ ڕووبەر دەنوێنێت بنووسە.

ب بەهاکانی $x$ چەند دەبن کە بۆ ئەوەی هەژمێرکردنی چێوە و ڕووبەر لەتوانادا بێت. بواری ئەو نەخشەیەی نوسیوتە دیاریکە.

**38** ئەندازە لە بازنەی بەرامبەردا.




أ نەخشەی ڕێژەیی کە ڕێژەی چێوە بۆ ڕووبەر دەنوێنێت بنووسە.

ب بەهاکانی $x$ چەند دەبن بۆ ئەوەی هەژمێرکردنی چیوە و ڕووبەر لە توانادا بێت. بواری ئەو نەخشەی نوسیوتە دیاریکە.

**39** **کیمیا** تارا $x$ $ml$ ئاوی دڵۆپێنراوی بۆ $72ml$ لە گیراوەیەك کە ڕێژەی سوێرییەکەی $8\%$ بێت زیادکرد.

أ نەخشەیەکی ڕێژەیی بنووسە کە ڕێژەیی سوێری گیراوە نوێیەکە دەنوێنێت.

ب ڕێژەی سوێری گیراوە نوێیەکە چەندە، ئەگەر زانیت تارا $720ml$ ئاوی دڵۆپێنراوی بۆ گیراوەکە زیادکرد.



**40** **ئابووری** ژوان دوکانێکی فرۆشتنی گوڵی هەیە خەرجی نەگۆڕی دوکانەکەی حەفتانە 950 هەزار دینارە، خەرجی چەپکە گوڵێك 42.45 هەزار دینارە.

أ نەخشەی $g$ بنووسە کە خەرجی گشتی بنوێنێت لەماوەی حەفتەیەکدا، ئەگەر دوکانەکە $x$ چەپکە گوڵی فرۆشتبێت.

ب نەخشەیەك بنووسە کە خەرجی گشتی هەر چەپکە گوڵێك لەماوەی حەفتەیەکدا بنوێنێت.

**41** **فیزیا** هەرچەند مرۆڤ بەرەو بۆشایی ئاسمان بەرزبێتەوە کێشەکەی کەمدەکات. زاناکان پەیوەندییەکیان دۆزیوەتەوە لە نێوان کێشی مرۆڤ $W$ لەسەر زەوی و کێشەکەی $W_0$ لە بۆشایدا کاتێك لە بەرزی $h$ $Km$ بێت بریتییە لە $W(h)=W_0\left(\frac{6400}{6400+h}\right)^2$ .

أ نەخشەی $W$ نەخشەیەکی ڕێژەییە، ئەمە ڕوونبکەوە.

ب کێشی مرۆڤێك لەسەر ڕووی زەوی 75 Kg خشتەیەك دروستبکە کێشەکەی بنوێنێت لەبەرزی $10Km$ و $20Km$ و $100Km$ دا.

ج لەبەرزی چەند کیلۆمەتردا کێشی مرۆڤێك دەبێتە نیوەی کێشەکەی لەسەر زەوی بە نزیکەیی؟

## ڕوانینێك بۆ دواوە

ئەمانە شیکاربکە.

**42** $|5x-6|>2$

**43** $|x+5|\geq 7$

**44** $\left|\frac{3}{2}-\frac{5}{2}x\right|\leq\frac{7}{2}$

**45** $\left|\frac{3}{2}-\frac{5}{2}x\right|\geq-\frac{7}{2}$

ئەم برانە بە شێوەی گشتی بڕی دووجای $ax^2+bx+c$ بنووسە.

**46** $-12x(3x-2)$

**47** $(3x-1)(6x-7)$

**48** $(4-5x)(x-9)$

**49** $(x-5)(2x+3)$

**50** $(3x-4)(3x+4)$

**51** $-4(x-3)^2$

ئەم برانە شیتەڵبکە.

**52** $3x^2-6x$

**53** $1-25y^2$

**54** $9x^2-49$

**55** $x^2-5x-24$

**56** $x^2+12x+36$

**57** $x^2-16x+64$

## ڕوانینێك بۆ پێشەوە

ئەمانە بە شێوەیەکی سادە بنووسە.

**58** $\frac{9}{3}$

**59** $\frac{x^2}{x}$

**60** $\frac{x^2+4x+4}{x+2}$

وانەی 3

# لێکدان و دابەشکردنی برە ڕێژەییەکان

## Multiplying and Dividing Rational Expressions

**بۆچی**

شیکاری هەندێ پرسیار پێویستی بە لێك دان و دابەشکردنی برە ڕێژەییەکان هەیە. وەك تێچوون وداهاتی ئاهەنگێك بۆ کۆکردنەوەی پارەتی.



**ئامانجەکان**

- برە ڕێژەییەکان لێکدەدات و دابەشدەکات.
- برە ڕێژەییەکان سادەدەکاتەوە.

**جێبەجێ کردن**

کاری خێراخوازی

بەبۆنەی جەژنی نەوڕۆز، یەکێك لە ئامادەییەکان ئاهەنگێکی خێرخوازی ساز دەکات بۆ کۆکردنەوەی بڕێ پارە و خەرجکردنی بۆ کەم دەرامەتەکان. خوێندکارانی ڕێکخەری ئاهەنگەکە بڕیاریان دا کۆمەڵێك شاڵ ئامادە بکەن وبەئامادەبووانی بفرۆشن، دوای لێکۆڵینەوە لە داهاتی ئەو پارەیەی لە ئاهەنگەکەوە دەستیان دەکەوێت ئەم ڕێژەیان بەکارهێنا:

$$\frac{\text{نرخی فرۆشتنی یەك شاڵ}}{\text{تێچوونی ئامادەکردنی یەك شاڵ}}$$

خوێندکاران گەیشتنە ئەو ئەنجامەی کە تێچوونی بەرهەمی $x$ شاڵ دەکاتە $0.8x+25$ بۆیە بڕیاریاندا نرخی هەر شاڵێك بە 3 هەزار دینار دابنێن. پێویستە چەند شاڵ بفرۆشن بۆ ئەوەی ڕێژەی نرخی یەك شاڵ بۆ تێچوونی ئامادەکردنی یەك شاڵ لە 1.5% کەمتر نەبێت.

## کورتکردنەوەی برە ڕێژەییەکان — Symplifying Rational Expressions

بۆ کورتکردنەوەی برە جەبرییەکان سەرە وژێرە دابەشی گەورەترین کۆلکەی هاوبەشی هەردووکیان دەکرێت. لەم بارەشدا دەوترێت برەکە بە سادەترین شێوەدایە.

**نموونە 1**

ئەم برە کورت بکەوە $\frac{x^2+5x-6}{x^2-36}$.

**شیکار**

$$\frac{x^2+5x-6}{x^2-36}=\frac{(x+6)(x-1)}{(x-6)(x+6)}$$

سەرەوژێر شیتەڵبکە.

$$=\frac{\cancel{(x+6)}(x+1)}{(x-6)\cancel{(x+6)}}$$

هەریەك لەسەرە و ژێرە دابەشی کۆلکەی هاوبەشبکە.

$$=\frac{x-1}{x-6}$$

تێبینی ئەوە بکە هەر دوو ژمارەی 6 و $-6$ دوو ژمارەی قەدەغەکراوی برە بنەڕەتیەکەیە

**هەوڵبدە** برى $\frac{b^2-49}{b^2-8b+7}$ بەسادەترین شێوە بنووسیت.

## Multiplying Rational Expressions لێکدانی برە ڕێژەییەکان

لێکدانی برە ڕێژەییەکان لە لێکدانی ژمارە ڕێژەییەکان دەچێت.

| لێکدانی ژمارە ڕێژەییەکان | لێکدانی برە ڕێژەییەکان |
| --- | --- |
| $\frac{15}{4}\times\frac{14}{9}=\frac{3\times5}{4}\times\frac{2\times7}{9}=\frac{35}{6}$ | $\frac{15}{x^2}\times\frac{4x^4}{21}=\frac{3\times5}{x^2}\times\frac{4x^4}{3\times7}=\frac{20x^2}{7}$ |

**نموونە 2** $\frac{3}{4x^2}\times\frac{4x^3}{21}\times\frac{14}{4x^5}$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

**شیکار**

$$\frac{3}{4x^2}\times\frac{4x^3}{21}\times\frac{14}{4x^5}=\frac{3\times4\times2\times7}{4\times3\times7\times2\times2}\times\frac{x^3}{x^7}=\frac{1}{2x^4}$$

**هەوڵبدە** بڕی $\frac{28}{4b^3}\times\frac{4b^5}{21}\times\frac{3}{49b^4}$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

بۆ لێکدانی دوو بڕی ڕێژەیی، ڕێساکانی لێکدانی کەرتەکان بەکاربێنە

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}\quad b\neq0\quad d\neq0$$

دەتوانیت ئەنجامی لێکدانەکە بە کورتکردنەوەی کۆلکە هاوبەشەکانی سەروژێرە سادەبکەیت.

**نموونە 3** $\frac{x+1}{x^2+2x-3}\times\frac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

**شیکار**

$$\frac{x+1}{x^2+2x-3}\times\frac{x^2+x-6}{x^2-2x-3}=\frac{x+1}{(x+3)(x-1)}\times\frac{(x+3)(x-2)}{(x-3)(x+1)}$$

$$=\frac{x-2}{(x-1)(x-3)}=\frac{x-2}{x^2-4x+3}$$

**هەوڵبدە** بڕی $\frac{x^2-25}{x^2-5x+6}\times\frac{x^2-4}{x^2+2x-15}$ سادە بکە.

**سەرنجێکی ڕەخنەگرانە** زریان بڕی $\frac{2x+3}{5y+3}$ کورتکردەوە بە شێوەی $\frac{2x+3}{5y+3}=\frac{2x}{5y}$ ئایا ڕاستیکردووە؟ ڕوونیبکەوە.

## Dividing Rational Expressions دابەشکردنی برە ڕێژەییەکان

دابەشکردنی برە ڕێژەییەکان لە دابەشکردنی ژمارەی ڕێژەییەکان دەچێت.

| دابەشکردنی ژمارە ڕێژەییەکان | دابەشکردنی برە ڕێژەییەکان |
| --- | --- |
| $\frac{6}{8}\div\frac{12}{32}=\frac{6}{8}\times\frac{32}{12}=\frac{6}{8}\times\frac{32}{12}=\frac{4}{2}=2$ | $\frac{6}{x^3}\div\frac{12}{x^5}=\frac{6}{x^3}\times\frac{x^5}{12}=\frac{x^2}{2}=\frac{1}{2}x^2$ |

بۆ دابەشکردنی بڕێکی جەبری بەسەر یەکێکی تر، بڕی یەکەم

لەهەڵگەڕاوەی دووەمیان بدە $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$ $b\neq0$ $c\neq0$ $d\neq0$

دەتوانیت ئەنجامی لێکدان کورتبکەیتەوە بە کورتکردنەوەی کۆلکە هاوبەشەکان لە نێوان سەروژێرە.

## نموونە 4

برِی $\frac{x^2-3x-4}{x^2-4} \div \frac{x-4}{(x-2)^2}$ سادەبکە.

شیکار

$$\frac{x-4}{(x-2)^2} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2-4} = \frac{x-4}{(x-2)^2} \times \frac{x^2-4}{x^2-3x-4}$$

$$= \frac{x-4}{(x-2)(x-2)} \times \frac{(x-2)(x+2)}{(x+1)(x-4)}$$

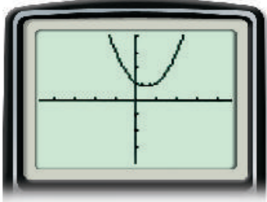
$$= \frac{x+2}{(x-2)(x+1)} \text{ یان } \frac{x+2}{x^2-x-2}$$

هەوڵبدە برِی $\frac{x^2-9}{x^2-8x+15} \div \frac{(x+3)^2}{(x-5)}$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

**بیرکردنەوەی رەخنە گرانە** ئارام برِی $\frac{1}{x-5} \div \frac{x-5}{7}$ بەم شێوەیە کورت کردەوە. $\frac{1}{x-5} \div \frac{x-5}{7} = 1 \div 7 = 1 \times \frac{7}{1} = 7$

ئایا ئەوە راستە؟ ئەو روونبکەوە.

**شیکاری پرسیارەکان** دەتوانین هێڵکاری روونکردنەوەیی بەکار بێنین بۆ زانینی ئەوەی رادەرێك شیتەڵ دەبێت یان نا. بۆ ئەوەی بزانیت برِێکی وەك $x^2-x+1$ شیتەڵ دەبێت یان نا هێڵکاری روونکردنەوەیی نەخشەی $y=x^2-x+1$ بکێشە و دڵنیا بە لەوەی تەوەرەی سینی دەبرِێت یان نا. لەبەر ئەوەی ئەم چەماوەیە تەوەرەی $x$ نابرِێت واتا نەخشەکە هیچ سفرێکی نییە لە ژمارە راستییەکاندا بۆیە شیتەڵ نابێت. لەوەشەوە دەردەکەوێت برِی رێژەیی $\frac{x^2-x+1}{x^2} \times \frac{x-4}{x-1}$ سادەتر نابێتەوە.



## برە رێژەییەئاڵۆزەکان Complex Rational Expressions

برە رێژەییە ئاڵۆزەکان.ئەو برانەن کە لەسەرە یان ژێرە یان لەهەردووکیاندا برِی رێژەیی هەبێت.

## نموونە 5

برِی $\dfrac{\frac{4a^2-1}{a^2-4}}{\frac{2a-1}{a+2}}$ بەسادەترین شێوە بنووسە.

شیکار

$$\dfrac{\frac{4a^2-1}{a^2-4}}{\frac{2a-1}{a+2}} = \frac{4a^2-1}{a^2-4} \div \frac{2a-1}{a+2}$$ سەرە دابەش ژێرە بکە.

$$= \frac{4a^2-1}{a^2-4} \times \frac{a+2}{2a-1}$$ یەکەم لە هەڵگەراوی دووەم بدە

$$= \frac{(2a-1)(2a+1)}{(a-2)(a+2)} \times \frac{a+2}{2a-1}$$ شیتەڵبکە

$$= \frac{(2a-1)(2a+1)(a+2)}{(a-2)(a+2)(2a-1)}$$ کۆڵکە هاوبەشەکان کورتبکەوە

$$= \frac{2a+1}{a-2}$$

هەوڵبدە برِی $\dfrac{\frac{(x+2)^2}{x-3}}{\frac{x^2-4}{(x-3)^2}}$ سادەبکە.

**بیرکردنەوەی رەخنەگرانە** برِی $\dfrac{\frac{x+y}{x-y}}{\frac{y+x}{y-x}}$ سادە بکە بە بەکارهێنانی هەژمێری هزری.

**نموونــــــــه** 6 بەگەڕانەوە بۆ نموونەی سەرەتای وانەکە. خوێندکاران پێویستە چەند شاڵ بفرۆشن بۆ ئەوەی ڕێژەی نرخی یەك شاڵ بۆ نرخی تێچوونەکەی لە 1.5 کەمتر نەبێت؟

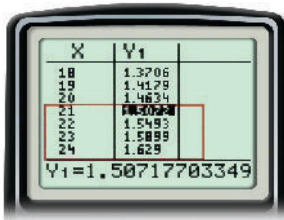
**شیکار**

$$\frac{\text{نرخی فرۆشتنی یەك شاڵ}}{\text{نرخی تێچوونی یەك شاڵ}} = \frac{3}{\frac{0.8x+25}{x}}$$

برە ئاڵۆزەکە سادە بکەوە $\frac{3}{\frac{0.8x+25}{x}} = 3\times\frac{x}{0.8x+25} = \frac{3x}{0.8x+25}$

نەخشەی $y=\frac{3x}{0.8x+25}$ لە بژمێری ڕوونکردنەوەییدا تۆماربکە.

لەخشتەکەوە دەردەکەوێت خوێندکاران پێویستە بە لایەنی کەمەوە 21 شاڵ بفرۆشن.




# ڕاهێـــــــنـــــــان

## بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1 لێکدانی برە ڕێژەییەکان ولێکدانی ژمارە ڕێژەییەکان لە چیدا لێکدەچن؟

2 دابەشکردنی برە ڕێژەییەکان ودابەشکردنی ژمارە ڕێژەییەکان لە چیدا لێکدەچن؟

3 چۆن ئەم برە ئاڵۆزە کورت دەکەیتەوە $\frac{\frac{x^2}{x^2-1}}{\frac{x}{x^2+2x-3}}$ ؟

بەراوردی بەها قەدەغەکراوەکانی $x$ لە برە ئاڵۆزەکە وبەها قەدەغەکراوەکانی برە سادەکراوەکە بکە.

## ڕاهێنانی ئاراستەکراو

ئەم برە ڕێژەییانە سادەبکە.

4 $\frac{x^2-25}{x^2-10x+25}$

5 $\frac{4x^2}{5}\times\frac{30}{x^4}\times\frac{30x^3}{60}$

6 $\frac{x^2+8x+12}{x^2+2x-15}\times\frac{x^2+8x+15}{x^2+9x+18}$

7 $\frac{x^2-2x+1}{x^2+6x+8}\div\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

8 $\frac{\frac{2x-6}{x^2+9x+20}}{\frac{x^2-9}{x^2+5x+4}}$

## ڕاهێنان وجێبەجێکردن

ئەم برە ڕێژەییانە سادەبکە.

9 $\frac{4x^2+8x+4}{x+1}$

10 $\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$

11 $\frac{15}{x^2}\times\frac{x^5}{12}\times\frac{4}{x}$

12 $\frac{36x}{9x^2}\times\frac{12x^7}{2x}\times\frac{5}{x^2}$

13 $\dfrac{x^2-10x+9}{x^2+2x-3}$

14 $\dfrac{-x^2-x+6}{x^2-5x+6}$

15 $\dfrac{x}{9x^8}\times\dfrac{x^7}{2x}\times\dfrac{45}{x^4}$

16 $\dfrac{-5}{x^3}\times\dfrac{-x^5}{3}\times\dfrac{-4}{x}\times\dfrac{20}{x^3}$

17 $\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-3x+2}\times\dfrac{x^2-4}{x^2-3x-10}$

18 $\dfrac{x^2-9}{x^2-4x+4}\times\dfrac{x^2-4}{x^2-x-6}$

19 $\dfrac{2x^2-2x}{x^2-9}\div\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$

20 $\dfrac{4x^2+20x}{9+6x+x^2}\div\dfrac{x+5}{x^2-9}$

21 $\dfrac{x^2}{4}\times\left(\dfrac{xy}{6}\right)^{-1}\times\dfrac{2y^2}{x}$

22 $2xy\div\dfrac{2x^2}{y}\div\dfrac{2y^2}{x}$

ئەم بڕانە سادە بکە.

23 $\dfrac{\dfrac{(x+2)^2}{(x+3)^2}}{\dfrac{x+3}{x+2}}$

24 $\dfrac{\dfrac{x^2-4}{x^2-9}}{\dfrac{(x-2)^2}{(x-3)^2}}$

25 $\dfrac{\dfrac{x^2-9x+14}{x^2-6x+5}}{\dfrac{x^2-8x+7}{x^2-7x+10}}$

26 $\dfrac{\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+6x+8}}{\dfrac{x^2+9x+18}{x^2+7x+10}}$

27 $\dfrac{2x+3}{x-1}\div\dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{3x}{2x+3}}$

28 $\dfrac{\dfrac{x+3}{x-1}}{x(x-1)^{-1}}$

29 $\dfrac{1-7x^{-1}-18x^{-2}}{1-4x^{-2}}$

30 $\dfrac{1+12x^{-1}+27x^{-2}}{x^{-1}+9x^{-2}}$

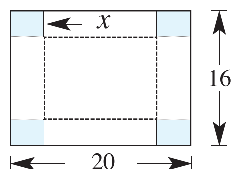
**بەرەنگاری**

31 بڕێکی ڕێژەیی $R$ بنووسە بە جۆرێك کە پلەی سەرە وژێرەکەی 2 بێت وهاوکۆلکەی ڕادە سەرەکیەکەی 1 بێت و پاسادانی ئەم پەیوەندیە بکات:

$$\frac{-10+3x+x^2}{15-18x+x^2}\times R=\frac{x-2}{x-3}$$

**گرێدان**

32 ئەندازە: لاوەند دەیەوێ کارتۆنێکی سەرکراوە بە بەکارهێنانی پارچە کارتۆنێکی لاکێشەیی درێژیەکەی 20cm وپانییەکەی 16cm دروستبکات. پێویستە چوار گۆشەی بچووك درێژی لایەکی x cm بێت لەهەر یەك لە سەرەکاندا ببڕێت. پاشان لاکانی بنوشتێنێتەوە.




أ ڕوونبکەوە کە بڕی $x(20-2x)(16-2x)$ قەبارەی قوتووە (سەر کراوەکە) دەنوێنێت.

ب ڕوونبیکەوە کە بڕی $320-4x^2$ ڕووبەری گشتی ناوەوەی قوتووە( سەر کراوەکە) دەنوێنێت.

ج ڕێژەی نێوان قەبارەی قوتووەکە بۆ ڕووبەرە گشتیەکەی بنووسە. ئەو بڕە سادەبکە.

د ڕێژە دەستکەوتووەکەی پرسیاری پێشوو چۆن دەگۆڕێت ئەگەر $x$ لە سفرەوە تا 4 زیاد بکات؟

جێبەجێکردنەکان

**33** **ئابووری** ئالان دوکانێکی بچووکی بابۆڵەی هەیە تێچوونی مانگانەی ئیشپێکردنی 400 000 دینارە تێکڕای تێچوونی یەك بابۆڵەش 4.45 هەزار دینارە.




أ) لە لیستی نرخەکانەوە ناوەندە ژمێرەیی بابۆڵەیەك چەندە؟

ب) ئەگەر ئالان لە مانگی پێشودا $x$ بابۆڵەی فرۆشتبێت، بڕی ($m$) بنووسە کە پەیوەندی نێوان تێچوونی گشتی وتێچوونی بابۆڵەکان بنوێنێت.

ج) بڕێك بنووسە ڕێژەیی قازانجی ئالان لە فرۆشتنی $x$ بابۆڵە بۆ تێچوونی گشتی دەربخات.

## ڕوانینێك بۆ دواوە

هاوکێشەی ڕاستەهێڵەکان بە شێوەی لاری ـ یەکتربڕین بنووسە، کە بەخاڵی پێدراوەکەدا دەڕوات وئەستوونە لەسەر ڕاستەهێڵە پێدراوەکە.

**34** $y=-6x-1$ ؛ $(8, -4)$

**35** $y=\frac{1}{5}x-11$ ؛ $(3, 5)$

ئەم برانە بە شێوەی گشتی ڕادەدار بنووسە.

**36** $x^2(x^3-x^2-6x+2)$

**37** $(x-2)(3x^3-6x-x^2)$

ئەم برانە شیتەڵبکە.

**38** $8x^2-4x$

**39** $12x^2-3x+6$

**40** $12-4x-22x^2$

**41** $x^3-1$

**42** $125x^3+27$

**43** $x^3-6x^2-8x$

## ڕوانینێك بۆ پێشەوە

ئەمانە سادەبکە.

**44** $\frac{5}{8}+\frac{1}{8}$

**45** $\frac{3}{x}+\frac{1}{x}$

**46** $\frac{3}{2x}+\frac{1}{x}$

**47** $\frac{3}{2x}+\frac{1}{3x}$

وانەی 4

# كۆكردنەوە و لێدەركردنی برە ڕێژەییەكان

## Adding and Subtracting Rational Expressions



**بۆچی**

بۆ شیكار كردنی زۆر لە پرسیارەكانی ژیانی ڕۆژانەمان پێویستمان بە كۆكردنەوە و لێدەركردنی برە ڕێژەییەكان دەبێت، وەك هەژماركردنی تێكڕای خێرایی لە گەشتێكدا.

**ئامانجەكان**

- برە ڕێژەییەكان كۆدەكات و لێدەردەكات و ئەنجامەكەی بەساداترین شێوە دەنووسێت.

**جێبەجێكردنەكان**

گەشت

تاكسیەك گەشتیارێكی لە فرۆكەخانەوە گواستەوە بۆ ماڵەوەیان بە خێراییەك تێكراكەی 55km/h بێت ولە ڕێگای گەڕانەوەی بۆ فرۆكەخانە، بە هۆی قەڵەباڵغی هاتووچۆوەتێكڕای خێراییەكەی 45km/h بێت. تێكڕای خێرایی ئۆتۆمبیلەكە لە چوون وگەڕانەوەدا چەند بووە؟ پێویستیت بە كۆكردنەوەی دوو بڕی ڕێژەیی دەبێت. نەك ناوەڕاستی هەردوو خێراییەكە كە لەوانەیە وا بیری لێ بكەیتەوە. كۆكردنەوەی دوو بڕی ڕێژەیی كە هەمان ژێرەیان هەبێت وەك كۆكردنەوەی دوو ژمارەی ڕێژەیی وایە هەمان ژێرەیان هەبێت.

| ژمارە ڕێژەییەكان | برە ڕێژەییەكان |
| --- | --- |
| $\frac{1}{7}+\frac{3}{7}=\frac{1+3}{7}=\frac{4}{7}$ | $\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^2}=\frac{3+5}{x^2}=\frac{8}{x^2}$ |
| ژێرە هاوبەش | ژێرە هاوبەش |

**نموونە 1**

ئەمانە سادەبكە.

أ $\frac{2x}{x+3}+\frac{5}{x+3}$

ب $\frac{x^2}{x-3}-\frac{9}{x-3}$

**شیكار**

أ $\frac{2x}{x+3}+\frac{5}{x+3}=\frac{2x+5}{x+3}$

ب $\frac{x^2}{x-3}-\frac{9}{x-3}=\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=x+3$

تێبینی ئەوە بكە $x=3$ ژمارەیەكی قەدەغەكراوە بۆ گۆڕاوی $x$ لە برە بنەڕەتیەكەدا.

**هەوڵبدە**

ئەمانە سادەبكە.

أ $\frac{3x-1}{2x-1}+\frac{5+2x}{2x-1}$

ب $\frac{2x}{x-5}-\frac{10}{x-5}$

بۆ کۆکردنەوەی دوو بڕی ڕێژەیی ژێرە جیاوان، پێویستە ژێرەی هاوبەش دوو ژێرەکە بدۆزیتەوە. بچووکترین ژێرەی هاوبەش بۆ دوو بڕی ڕێژەیی بریتیە لە بچووکترین چەند جارەی هاوبەشی ژێرەکان، ڕادەدارێکە بە پلەیەکی کەمتر کە دابەش هەردوو ژێرەکە دەبێت.

دۆزینەوەی بچووکترین ژێرەی هاوبەش بۆ دوو بڕی ڕێژەیی لە دۆزینەوەی بچووکترین ژێرەی هاوبەشی دوو ژمارەی ڕێژەیی دەچێت. بەراوردی بەکارهێنانی ئەم کردارە بکە بۆ ژمارە ڕێژەییەکان وبڕە ڕێژەییەکان.

**ژمارە ڕێژەییەکان**

$$\frac{7}{300}+\frac{1}{90}=\frac{7}{300}\times\left(\frac{3}{3}\right)+\frac{1}{90}\times\left(\frac{10}{10}\right)$$
$$=\frac{21+10}{900}=\frac{31}{900}$$

بچووکترین ژێرە هاوبەش

**بڕە ڕێژەییەکان**

$$\frac{7}{3x^2}+\frac{1}{9x}=\frac{7}{3x^2}\times\left(\frac{3}{3}\right)+\frac{1}{9x}\times\left(\frac{x}{x}\right)$$
$$=\frac{21+x}{9x^2}$$

بچووکترین ژێرە هاوبەش

## کۆکردنەوە و لێدەرکردنی بڕە ڕێژەییەکان
## Adding and Substracting Rational Expressions

بۆ ئەوەی دوو بڕی ڕێژەیی کۆبکەیتەوە ولە یەکتریان دەربکەیت، بچووکترین ژێرەی هاوبەش بدۆزەوە ودوو بڕەکە دووبارە بنووسە وبە بەکارهێنانی بچووکترین ژێرەی هاوبەشیان، پاشان کۆبکەوە یان لێدەربکە وئەنجامە دەستکەوتووەکە بە سادەترین شێوە بنووسە.

**نموونە 2** $\frac{x}{x-2}+\frac{-8}{x^2-4}$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

**شیکار**

$$\frac{x}{x-2}+\frac{-8}{x^2-4}=\frac{x}{x-2}+\frac{-8}{(x-2)(x+2)}$$

$=\frac{x}{x-2}\times\frac{x+2}{x+2}+\frac{-8}{(x-2)(x+2)}$ بچووکترین ژێرەی هاوبەشی بریتیە لە$(x-2)(x+2)$

$=\frac{x(x+2)-8}{(x-2)(x+2)}$ دوو بڕەکە کۆبکەوە

$=\frac{x^2+2x-8}{(x-2)(x+2)}$ ژێرە لەسەر شێوەی گشتی بنووسە

$=\frac{(x+4)(x-2)}{(x-2)(x+2)}$ سەرە شیتەڵبکە

$=\frac{x+4}{x+2}$ کورتبکەوە

**هەوڵبدە** $\frac{x}{x+5}+\frac{-50}{x^2-25}$ کورتبکەوە

**خاڵی چاودێری** ✔

چۆن شیتەڵکردنی ڕادەدارەکان یارمەتیت دەدات بۆ کۆکردنەوە ولێکدەرکردنی دوو بڕی ڕێژەیی؟ ئەمە بەکردار دیاربکە لە سادەکردنی بڕی $\frac{x}{x-3}+\frac{5}{x^2-6x+9}$

## نموونە 3

$\frac{6x}{3x-1} - \frac{4x}{2x+5}$ کورتبکەرەوە.

**شیکار**

$$\frac{6x}{3x-1} - \frac{4x}{2x+5} = \frac{6x}{3x-1} \times \left(\frac{2x+5}{2x+5}\right) - \frac{4x}{2x+5} \times \left(\frac{3x-1}{3x-1}\right)$$

بچووکترین ژێرەی هاوبەش بریتیە لە $(3x-1)(2x+5)$

$$= \frac{6x(2x+5)}{(3x-1)(2x+5)} - \frac{4x(3x-1)}{(3x-1)(2x+5)}$$

$$= \frac{12x^2+30x}{(3x-1)(2x+5)} - \frac{12x^2-4x}{(3x-1)(2x+5)}$$

$$= \frac{34x}{(3x-1)(2x+5)} = \frac{34x}{6x^2+13x-5}$$

**خاڵی چاودێری** ✓ ژمارە قەدەغەکراوەکان لە برە بنەڕەتیەکەدا و ژمارە قەدەغەکراوەکان لە برە سادەکراوەکەدا دیاربکە. ئایا هەمان ژمارەن؟ هۆکەی ڕوونبکەرەوە.

**هەوڵبدە** $\frac{1}{x^2-4} - \frac{6}{x^2-2x}$ بە سادەترین شێوە بنووسە.

هەندێ جار وا پێویست دەکات برە ئاڵۆزەکان بە شێوەی برە ڕێژەییەکان بنووسیتەوە بۆ ئەوەی بتوانیت کۆیان بکەیتەوە ولەیەکتریان دەربکەیت وەک لە نموونەی 4 دادەرکەوێت.

## نموونە 4

بڕی $\frac{1}{1-\frac{1}{a}} + \frac{1}{1+\frac{1}{a}}$ کورتبکەوە.

**شیکار**

لەهەر ژێرەیەك كۆكردنەوەی ولێكدەركردن بكە

$$\frac{1}{1+\frac{1}{a}} + \frac{1}{1-\frac{1}{a}} = \frac{1}{\frac{a+1}{a}} + \frac{1}{\frac{a-1}{a}}$$

برە ئاڵۆزەكە بگۆڕە بۆ بڕی ڕێژەیی

$$= 1 \times \frac{a}{a+1} + 1 \times \frac{a}{a-1}$$

$$= \frac{a}{a+1} + \frac{a}{a-1}$$

$$= \frac{a}{a+1} \times \left(\frac{a-1}{a-1}\right) + \frac{a}{a-1} \times \left(\frac{a+1}{a+1}\right)$$

بچووکترین ژێرەی هاوبەشی بریتیە لە $(a+1)(a-1)$

$$= \frac{a^2-a}{(a+1)(a-1)} + \frac{a^2+a}{(a+1)(a-1)}$$

$$= \frac{2a^2}{a^2-1}$$

**هەوڵبدە** بڕی $\frac{a}{a+\frac{1}{a}} - \frac{a}{a-\frac{1}{a}}$ کورتبکەوە.

**نموونـــــه** 5 **بەگەڕانەوە بۆ پرسیارەکەی سەرەتای وانەکە، تێکڕای خێرایی تەکسیەکە بدۆزەوە لە ماوەی گەشتەکە (چوون وگەڕانەوە)؟**

**شیکار** باگۆڕاوی $d$ هێمای دووری نێوان فرۆکەخانە ومالّی گەشتیارەکە بێت و $t_1$ هێمای کاتی خایەنراوی گەشتەکە بێت لە فرۆکەخانە بۆ مالّی گەشتیارەکەو $t_2$ هێمای کاتی خایەنراوی گەڕانەوە بێت بۆ فرۆکەخانە.

$d = 55 \times t_1$ وهەروەها $d = 45 \times t_2$

بەمەش $t_1 = \frac{d}{55}$ و $t_2 = \frac{d}{45}$

بۆ هەژمێر کردنی تێکڕای گشتی خێرایی، دووری گشتی $2d$ بەسەر کاتی خایەنراوی گشتی $(t_1 + t_2)$ دابەشبکە:

$$\text{تێکڕای گشتی خێرایی} = \frac{\text{دووری گشتی}}{\text{کاتی گشتی}}$$

$$v = \frac{2d}{t_1 + t_2}$$ لە جیاتی $t_1$ و $t_2$ بەهاکانیان دابنێ

$$= \frac{2d}{\frac{d}{55} + \frac{d}{45}}$$ بچووکترین ژێرەی هاوبەش بریتییە لە 495

$$= \frac{2d}{\frac{9d + 11d}{495}}$$

$$= \frac{2d}{\frac{20d}{495}}$$

$$= 2d \times \frac{495}{20d}$$

$$= 49.5$$




**بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** وا دابنێ خێرایی ئۆتۆمبیلەکە لە چوون $akm/h$ لە کاتژمێرێك بێت وخێراییەکەی لە هاتنەوە $bkm/h$ لە کاتژمێرێك بێت. ڕوونیبکەوە کە تێکڕای خێرایی $\frac{a+b}{2}$ نییە.

# ڕاهێــــنــــان

## بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1 چۆن بچووکترین ژێرەی هاوبەش دەدۆزێتەوە بۆ کۆکردنەوەی $\frac{x-1}{x^2-36} + \frac{x+5}{x^2-7x+6}$ ؟

2 لەم چوار برانە دوو بڕی یەکسان هەڵبژێرە.

أ $\frac{3+7}{x^2+4}$ ب $\frac{10}{x^2} + \frac{10}{4}$ ج $\frac{3}{x^2} + \frac{7}{4}$ د $\frac{3}{x^2+4} + \frac{7}{x^2+4}$

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئەم بڕانە کورتبکەوە.

**3** $\frac{3x}{x-1}+\frac{2}{x-1}$

**4** $\frac{3x+5}{x+2}-\frac{x+1}{x+2}$

**5** $\frac{12}{x^2-1}+\frac{4}{x+1}$

**6** $\frac{x+1}{2x-1}-\frac{2x+1}{x-1}$

**7** $\frac{1}{1-\frac{1}{a}}$

**8** گەشت بەگەڕانەوە بۆ نموونەی سەرەتای وانەکە، تێکرای گشتی خێرایی تەکسیەکە هەژمار بکە، ئەگەر تێکڕای خێرایی چوون $52Km$ لە کاتژمێرێك و تێکڕای خێرایی گەڕانەوە $38Km$ لە کاتژمێرێك بێت.

## ڕاهێنان وجێبەجێکردن

ئەم بڕانە کورتبکەوە.

**9** $\frac{2x-3}{x+1}+\frac{6x+5}{x+1}$

**10** $\frac{7x-13}{2x-1}+\frac{x+9}{2x-1}$

**11** $\frac{n+9}{4}+\frac{n-3}{2}$

**12** $\frac{x+7}{3}-\frac{4x+1}{9}$

**13** $\frac{x}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}$

**14** $\frac{2x}{x+3}-\frac{x-3}{x^2+6x+9}$

**15** $\frac{-4}{x-5}+\frac{5}{x+3}$

**16** $\frac{2}{x+2}-\frac{6}{x-2}$

**17** $\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+1}$

**18** $\frac{8}{3x-5}+\frac{7}{2x+3}$

**19** $\frac{2x+3}{x+3}+\frac{x}{x-2}$

**20** $\frac{x+2}{2x-1}-\frac{2x}{x-1}$

**21** $x^2+\frac{2x}{3x-5}$

**22** $\frac{x+1}{(x-1)^2}+\frac{x-2}{x-1}$

**23** $2x^2-1-\frac{x-1}{x+2}$

**24** $\frac{3}{\frac{2x-1}{x}}$

**25** $\frac{1}{\frac{3x+1}{2}}$

**26** $\frac{\frac{4}{x-1}}{\frac{2}{x-1}}+\frac{3}{x-1}$

**27** $\frac{\frac{4}{x+2}}{\frac{x+2}{3}}-\frac{3}{x+2}$

**28** $\frac{\frac{x+2}{x+5}}{\frac{x-1}{x+5}}+\frac{1}{x+1}$

**29** $\frac{\frac{2x+10}{x-1}}{\frac{x+5}{x^2-1}}-\frac{4}{x+1}$

**30** $\frac{1-xy^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}$

**31** $\frac{x-y}{x^{-1}-y^{-1}}$

**32** $\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x^2}+2(xy)^{-1}+\frac{1}{y^2}}$

ئەم بڕانە بۆ بڕی ڕێژەیی بگۆڕە وبەسادەترین شێوە بینووسە.

**33** $\frac{3x}{x-1}+\frac{5x+2}{x-1}-\frac{10}{x-1}$

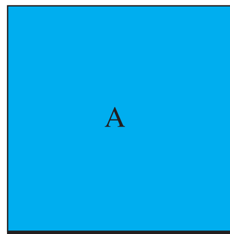
**34** $\frac{7x}{x^2-1}+\frac{x}{x^2-1}-\frac{6}{x^2-1}$

**35** $\frac{7}{x+7}+\frac{-x}{x-7}-\frac{2x}{x^2-49}$

**36** $(x-y)^{-1}-(x+y)^{-1}$

**37** $(x-y)^2-(x+y)^{-2}$

**38** $\frac{x}{x-y}-\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{y}{x+y}$




**39** ئەندازە: لەم شێوەی بەرامبەردا چەند چوارگۆشەیەك دەبینین درێژی لایەکی چوار گۆشەی یەکەم $1cm$ ودووەمیان $\frac{1}{2}$cm وسێیەمیان $\frac{1}{4}$cm بێت وەهەروەها.

أ سەرجەمی رووبەری چوار گۆشەکان $a$ و $b$ و $c$ و $d$، بە بەکارهێنانی هێزەکانی ژمارە 2 بنووسە

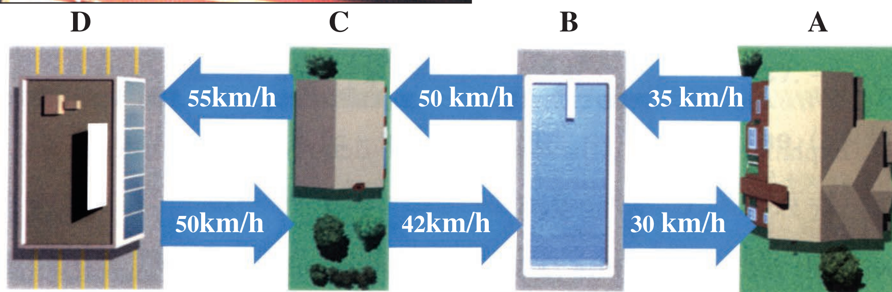
ب سەرجەمەکە بە یەك ژمارەی رێژەیی بنووسە.

ج ئەگەر دوو چوارگۆشەی نوێی $e$ و $f$ بۆ شێوازەکە زیادکرا. سەرجەمی رووبەری شەش چوار گۆشەکە لە $a$ هەتا $f$ بدۆزەوە بە شێوەی یەك ژمارەی رێژەیی.

د وەڵامەکانی ب و ج بگۆرە بۆ ژمارەیەکی دەیی لە پێکهاتبێت لە 4 رەنووس لە پاش فارزە. ئایا دەتوانیت کەرتێك بخەمڵێنیت کە نزیکبێت لە سەرجەمی رووبەری چوار گۆشەکان هەرچەند چوار گۆشەکان زیادبکەین؟ ئەم کەرتە چییە؟



**40** گەشت ئەم هێڵکارییەی خوارەوە قۆناغەکانی گەشتێك بە ئۆتۆمبیل دیاردەکات. دووری نێوان $A$ و $B$ ونێوان $B$ و $C$ ونێوان $C$ و $D$ یەکسانن. لەهێڵکارییەکە تێکرای خێرایی ئۆتۆمبیلەکە لەهەر قۆناغێکدا دیاریکراوە.




أ تێکرای گشتی خێرایی گەشتی $A$ بۆ $C$ هەژمێربکە وبەپێچەوانەوە.

ب تێکرای گشتی خێرایی گەشتی $B$ بۆ $D$ هەژمێربکە وبەپێچەوانەوە.

ج تێکرای گشتی خێرایی گەشتی $A$ بۆ $D$ هەژمێربکە وبەپێچەوانەوە.

## روانینێك بۆ دواوە

**بڕی جیاکەرەوەی ئەم هاوکێشانە هەژمێربکە وژمارەی رەگەکانیان لە کۆمەڵەی ژمارە راستییەکان دیاریبکە وهاوکێشەکانی شیکاربکە.**

**41** $0 = x^2 - 3x + 4$

**42** $x^2 - 2x + 1 = 0$

**43** $-2x^2 - 5x + 12 = 0$

## روانینێك بۆ پێشەوە

**44** هەموو شیکارەکانی هاوکێشەی $1.4 = \frac{(x+3)(x-1)}{x^2-1}$ دیاریبکە.
لەبیرنەکەیت ژمارە قەدەغەکراوەکانی $x$ لە برە رێژەییەکە لابدەیت.

# وانەی 5

# هاوکێشەکان ولاسەنگە ڕێژەییەکان

## Rational Equations and Inequalities



**ئامانجەکان**

- هاوکێشە ولاسەنگە ڕێژەییەکان بە جەبری و بە ڕوونکردنەوەیی شیکاردەکات.
- پرسیارەکان بە بەکارهێنانی هاوکێشە ولاسەنگە ڕێژەییەکان شیکار دەکات.

**بۆچی** زۆر شێوازی جۆراجۆر هەیە بە هاوکێشە یان لاسەنگەیەکی ڕێژەیی دەنوێنرێت. بۆ نموونە دەتوانیت هاوکێشەیەکی ڕێژەیی بنوسین بۆ دۆزینەوەی تێکڕایی خێرایی گشتی لە پێشبڕکێیەکی سیانی.

**جێبەجێ کردن**
**پێشبڕکێی سیانی**

زۆزک پێشبڕکێیەکی سیانی کە بریتیبوو لە مەلەوانی وپاسکیل سواری و ڕاکردن بە دوو کاتژمێر و نیو تەواوکرد. تێکڕای خێراییەکەی لە پاسکیل سواریەکەدا، ئەوەندەی تێکڕای خێراییەکەی بێت لەمەلەکردندا. تێکڕای خێرایی ڕاکردنەکەی $5Km/h$ زیاتر بێت لە تێکڕای خێرایی مەلەکردنەکەی. دەتوانیت هاوکێشەیەکی ڕێژەیی بنووسیت بۆ هەژمێر کردنی تێکڕایی خێرایی گشتی زۆزک لەپێشبڕکێکەدا. هاوکێشە ڕێژەییەکان ئەو هاوکێشانەن کە بە لایەنی کەمەوە برێکی ڕێژەیی تێدایە.

| | دووری $Km$ | خێرایی $Km/h$ | کات |
|---|---|---|---|
| مەلەکردن | $d_s = 0.5$ | $x$ | $t_s$ |
| پاسیکل سواری | $d_b = 25$ | $6x$ | $t_b$ |
| ڕاکردن | $d_r = 6$ | $x+5$ | $t_r$ |

**نموونە 1** تێکڕای خێرایی گشتی زۆزک هەژمێربکە.

**شیکار**

1. کاتی خایەنراوی هەر قۆناغێك هەژماربکە.

**قۆناغی مەلەکردن**

دووری = خێرایی × کات

$$0.5 = xt_s$$

$$\frac{0.5}{x} = t_s$$

**قۆناغی پاسکیل سواری**

دووری = خێرایی × کات

$$25 = (6x)t_b$$

$$\frac{25}{6x} = t_b$$

**قۆناغی ڕاکردن**

دووری = خێرایی × کات

$$6 = (5+x)t_r$$

$$\frac{6}{x+5} = t_r$$

2. برێکی ڕێژەیی بنووسە کە کاتی خایەنراوی گشتی پێشبڕکێیەکە بنوێنێ بە پێی تێکڕای خێرایی زۆژك لە مەلەکردن $x$.

$$T(x)=t_s+t_b+t_r=\frac{0.5}{x}+\frac{25}{6x}+\frac{6}{x+5}$$

$$=\frac{0.5}{x}\times\frac{6(x+5)}{6(x+5)}+\frac{25}{6x}\times\frac{(x+5)}{(x+5)}+\frac{6}{x+5}\times\frac{6x}{6x}$$

$$=\frac{64x+140}{6x(x+5)}$$

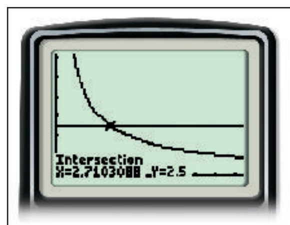
بچووکترین ژێرەی هاوبەش بریتیە لە $6x(x+5)$

هاوکێشەی $\frac{64x+140}{6x(x+5)}=2.5$ شیکاربکە.

وێنە نەخشەی $y=\frac{64x+140}{6x(x+5)}$ بکێشە.

$y=2.5$ پۆی خاڵەکانی یەکتربڕین دیاربیکە.

تێکڕای خێرایی گشتی زۆژك $2.7Km/h$ بووە بە نزیککراوەیی.




**بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە**

چۆن هاوکێشەی $\frac{64x+140}{6x(x+5)}=2.5$ شیکار دەکەیت بە بەکارهێنانی یاسای شیکارکردنی هاوکێشەی دووجا؟

**نموونە 2** هاوکێشەی $\frac{x}{x-6}=\frac{1}{x-4}$ شیکاربکە.

**شیکار**

ڕێگای یەکەم: بەجەبری

$x\neq 4 \quad x\neq 6$

$$\frac{x}{x-6}=\frac{1}{x-4}$$

$$x(x-4)=1\times(x-6)$$

$$x^2-4x=x-6$$

$$x^2-5x+6=0$$

$$(x-2)(x-3)=0$$

$$x=3 \qquad x=2$$

ساغبکەوە

ئەگەر $x=2$ ئەوا

$$\frac{x}{x-6}=\frac{1}{x-4}$$

$$\frac{2}{2-6}=\frac{1}{2-4}$$

$-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$ ڕاستە

ئەگەر $x=3$ ئەوا

$$\frac{x}{x-6}=\frac{1}{x-4}$$

$$\frac{3}{3-6}=\frac{1}{3-4}$$

$-1=-1$ ڕاستە

کەواتە 2 و 3 دوو شیکاری هاوکێشەکەن.

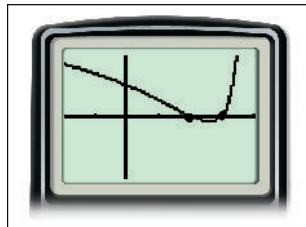
ڕێگای دووەم: بە ڕوونکردنەوەیی

لەبەر ئەوەی بینینی یەکتربڕینی چەماوەی نەخشەی $y=\frac{x}{x-6}$ وچەماوەی نەخشەی $y=\frac{1}{x-4}$ کارێکی گرانە پێویستە ڕێگایەکی تر بەکاربهێنیت.

هاوکێشەکە بە شێوەی $\frac{x}{x-6}=\frac{1}{x-4}$

پاشان $\frac{x}{x-6}-\frac{1}{x-4}=0$ بنووسە.

وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=\frac{x}{x-6}-\frac{1}{x-4}$ بکێشە وپۆی سینی خاڵەکانی یەکتربڕین لەگەڵ تەوەرەی سینی دیاربکە.



**هەوڵبدە** هاوکێشەی $\frac{x}{3}=\frac{1}{x-2}$ شیکاربکە هەندێ جار شیکاری هاوکێشە ڕێژەییەکان، شیکاری نامۆی لێدەکەوێتەوە، پاسادانی هاوکێشە بنەڕەتیەکە ناکات. لێرەوە پێویستی پاسادانی بەها پەیدا بوەکانت بۆ دەردەکەوێت کە دەبنە شیکاری هاوکێشەکە.

## نموونه 3

هاوکێشەی $\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}$ شیکاربکە.

**شیکار**

**ڕێگای یەکەم:** بە جەبری

هەردوو لای هاوکێشەکە لە بچووکترین ژێرەی هاوبەشی $(x-3)(x+3)$ یان $x^2-9$ بدە.

$$\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}$$ کاتێك $x \neq \pm 3$ .

$$\frac{x}{x-3}\times(x-3)(x+3)+\frac{2x}{x+3}(x-3)(x+3)=\frac{18}{x^2-9}(x-3)(x+3)$$

$$x(x+3)+2x(x-3)=18$$

$$x^2+3x+2x^2-6x=18$$

$$3x^2-3x-18=0$$

$$3(x^2-x-6)=0$$

$$3(x-3)(x+2)=0$$

$x=-2$ یان $x=3$

**ساغیبکەوە**

لەبەر ئەوەی دوو ژمارەی 3 و 3- قەدەغەکراون، ئەوا $x=3$ شیکارێکی نامۆیە وپێویستە فەرامۆش بکرێت. بەڵام ئەگەر $x=-2$ ئەوا:

$$\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}\stackrel{?}{=}\frac{18}{x^2-9}$$

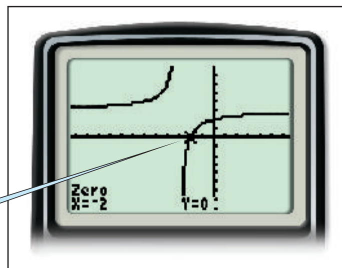
$$\frac{-2}{-2-3}+\frac{2(-2)}{-2+3}\stackrel{?}{=}\frac{18}{(-2)^2-9}$$

$-\frac{18}{5}=-\frac{18}{5}$ دروستە

**ڕێگای دووەم:** بەڕوونکردنەوەیی

لەبەر ئەوەی بینینی یەکتربڕینی هەردوو چەماوەی $y=\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}$ و $y=\frac{18}{x^2-9}$ کارێکی گرانە بۆیە پێویستە ڕێگایەکی تر بەکاربێنیت $\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}-\frac{18}{x^2-9}=0$ بنووسە.

پاشان وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y=\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}-\frac{18}{x^2-9}$ بکێشە.




تەنها خاڵی یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری سینی بریتییە لە $(-2,0)$

هاوکێشەکە تەنها یەك شیکاری هەیە. بریتیە لە $x=-2$

**هەوڵبدە** هاوکێشەی $\frac{x}{x-2}+\frac{x}{x-3}=\frac{3}{x^2-5x+6}$ شیکاربکە.

**بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** بۆچی لە نموونەی 3 دا شیکارێکی نامۆمان بۆ دەرچوو؟ هۆکەی ڕوونبکەرەوە.

لاسەنگە ڕێژەییەکان Rational Inequalities ئەو لاسەنگانەن بە لایەنی کەمەوە بڕێکی ڕێژەییان تێدایە.

**چالاکی**

## شیکارکردنی لاسەنگە ڕێژەییەکان Solving Rational Inequalities

خاڵی چاودێری ✔

1. لە ڕووتەختی پۆتانەکاندا. هەردوو هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y_1 = \frac{x+2}{x-4}$ و $y_2 = 2x-11$ بکێشە.
2. بەهایەکانی $x$ کامانەن کە پاساادانی $y_1 = y_2$ ؟ $y_1 < y_2$ ؟ $y_1 > y_2$ دەکەن
3. چۆن بە ڕوونکردنەوەیی لاسەنگەی $\frac{x+2}{x-4} < 2x-11$ و لاسەنگەی $\frac{x+2}{x-4} > 2x-11$ شیکار دەکەیت؟

**نموونە** 4 لاسەنگەی $\frac{x}{2x-1} \leq 1$ شیکاربکە.

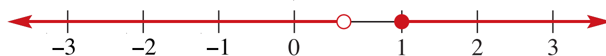
**شیکار**

ڕێگای یەکەم: بە جەبری

هەوڵبدە بە لێکدانی هەردوولای لاسەنگەکە لە $2x-1$ خۆت لە ژێرە ڕزگار بکەیت بەڵام لێکدانی لاسەنگە لە ژمارەیەک لەوانەیە ئاراستەی لاسەنگەکە هەڵبگەڕێتەوە. بۆیە پێویستە لە دوو بارا لێیبکۆڵینەوە. کاتێک $2x-1$ موجەب بێت، کاتێک $2x-1$ سالب بێت.

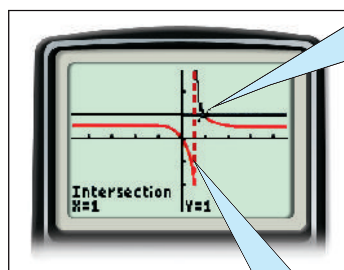
| کاتێک $2x-1>0$ موجەب بێت | $2x-1<0$ سالب بێت |
|---|---|
| $\frac{x}{2x-1} \leq 1$ | $\frac{x}{2x-1} \leq 1$ |
| $x \leq 2x-1$ | $x \geq 2x-1$ ( ≤ گۆڕا بۆ ≥ ) |
| $-x \leq -1$ | $-x \geq -1$ |
| $x \geq 1$ ( ≤ گۆڕا بۆ ≥ ) | $x \leq 1$ ( ≥ گۆڕا بۆ ≤ ) |
| لەم بارەدا کاتێک $2x-1>0$ ئەوە $x > \frac{1}{2}$ بۆیە بەهاکانی $x$ کەپاساادانی لاسەنگەکە دەکەن، پێویستە پاساادانی $x > \frac{1}{2}$ و $x \geq 1$ پێکەوە بکەن. | لەم بارەدا کاتێک $2x-1<0$ ئەوا $x < \frac{1}{2}$ بۆیە بەهاکانی $x$ کە پاساادانی لاسەنگەکە دەکەن پێویستە پاساادانی $x < \frac{1}{2}$ و $x \leq 1$ پێکەوە بکەن. |
| {کۆمەڵەی شیکار لەم بارەدا بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان کە $x \geq 1$ ساغدەکاتەوە} | {کۆمەڵەی شیکار لەم بارەدا بریتییە لە کۆمەڵەی ژمارە ڕاستییەکان کە $x < \frac{1}{2}$ ساغدەکاتەوە} |

کەواتە کۆمەڵە شیکاری لاسەنگەکە هەموو ئەو ژمارە ڕاستییانەن کە پاساادانی $x < \frac{1}{2}$ یان $x \geq 1$ دەکەن




ڕێگای دووەم: بە ڕوونکردنەوەیی

لە ڕووتەختی پۆتاندا هەردوو هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y_1 = \frac{x}{2x-1}$ و $y_2 = 1$ بکێشە بەهاکانی $x$ لەوناوچەیەدا دیاریبکە، کە تیایدا هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی یەکەم دەکەوێتە ژێر هێڵی ڕوونکردنەوەیی نەخشەی دووەم. کۆمەڵە شیکار بریتییە لە بەهاکانی $x$ کە پاساادانی $x < \frac{1}{2}$ یان $x \geq 1$ دەکەن.



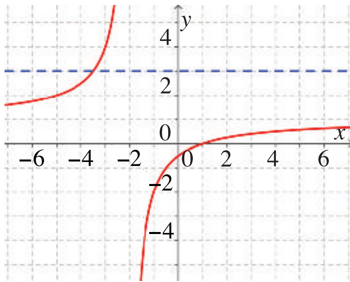

**هەوڵبدە** هاوکێشەی $\frac{x-1}{x+2} < 3$ شیکاربکە.

# ڕاهێنان

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

**1** مانای چییە یەکێك لە شیکارەکانی هاوکێشەیەکی ڕێژەیی نامۆیە؟چۆن دەیناسیتەوە؟

**2** چۆن هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی بەکاردەهێنیت بۆ دڵنیابوون لە ڕاستی ئەو شیکارەی بە جەبری بەدەستهێناوە؟




**3** چۆن هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی نەخشەی $y_1=\frac{x-1}{x+2}$ ونەخشەی $y_2=3$ لە وێنەی بەرامبەردا بەکاردێنیت بۆ شیکاری لاسەنگەی $\frac{x-1}{x+2}>3$ ؟

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

**4** **وەرزش** بەگەڕانەوە بۆ نموونەی سەرەتای وانەکە. خێرایی زۆرك لە هەریەکە لە مەلەوانی و پاسکیل سواری و ڕاکردندا چەندە؟ ئەگەر ماوەی پێشبڕکێکە بە دووکاتژمێر تەواو بکات.

**ئەمانە شیکاربکە.**

**5** $\frac{2x-1}{x}=\frac{3}{x+2}$

**6** $\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x+1}=\frac{-4}{x^2-1}$

**ئەمانە شیکاربکە.**

**7** $\frac{2x-3}{x}\geq 2$

**8** $\frac{1}{x+2}<\frac{1}{x+3}$

## ڕاهێنان وجێبەجێکردن

**ئەمانە شیکاربکە و ڕاستی شیکارەکەت ساغبکەوە.**

**9** $\frac{x+3}{2x}=\frac{5}{8}$

**10** $\frac{2y-1}{4y}=\frac{4}{6}$

**11** $\frac{4}{n+4}=1$

**12** $\frac{-6}{m-3}=1$

**13** $\frac{1}{3x}+\frac{1}{8}=\frac{4}{3x}$

**14** $\frac{1}{a}+\frac{1}{3}=\frac{8}{3a}$

**15** $\frac{y+3}{y-1}=\frac{y+2}{y-3}$

**16** $\frac{2n+1}{3n+4}=\frac{2n-8}{3n+8}$

**17** $\frac{x+3}{x}+1=\frac{x+5}{x}$

**18** $\frac{2x}{x+3}-1=\frac{x}{x+3}$

**19** $\frac{x+1}{x-1}+\frac{2}{x}=\frac{x}{x+1}$

**20** $\frac{3}{x+2}-\frac{x}{1}=\frac{4}{3}$

**21** $\frac{1}{6}-\frac{1}{x}=\frac{4}{3x^2}$

**22** $\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}=\frac{1}{4}$

**23** $\frac{2x+3}{x-1}-\frac{2x-3}{x+1}=\frac{10}{x^2-1}$

**24** $\frac{x-4}{x+2}+\frac{2}{x-2}=\frac{17}{x^2-4}$

**25** $\frac{a}{a+3}-\frac{a}{a-2}=\frac{10}{a^2+a-6}$

**26** $\frac{3x}{x-1}+\frac{2x}{x-6}=\frac{5x^2-15x+20}{x^2-7x+6}$

**27** $\frac{3}{x+2}+\frac{12}{x^2-4}=\frac{-1}{x-2}$

**28** $\frac{x+2}{2x-3}-\frac{x-2}{2x+3}=\frac{21}{4x^2-9}$

ئەمانە شیکار بکە وپاشان ساغیبکەوە.

**29** $\frac{x+3}{3x}>2$ **30** $\frac{y+5}{4y}>3$ **31** $\frac{x-5}{3x}<-3$

**32** $\frac{x-5}{3x}<3$ **33** $\frac{2x+1}{x-2}>4$ **34** $3<\frac{3x+4}{1+2x}$

**35** $\frac{x+1}{x}\le\frac{1}{2}$ **36** $-\frac{1}{2}\ge\frac{1}{x-4}$ **37** $\frac{7x}{3x+2}<2$

ئەم لاسەنگانە شیکار بکە وەڵامەکەت بۆ نزیکترین دەیەك نزیکبکەوە.

**38** $x^2<\frac{1}{2}$ **39** $\frac{1}{x}\le x-1$ **40** $\frac{x-2}{x-1}\ge 2x$

**بەرەنگاربونەوە**

**41** بەهزری لاسەنگەی $\frac{3}{(x-1)^2}>0$ شیکار بکە.

**42** دەروازەیەك لە ڕۆشنبیری هندی لە سەدەی ١٩ دا زانای بیرکاری هندی ماهافیرا ئەم پرسیارەی دانا. چوار بۆری ئاو ڕوودەکەنە ناو حەوزێکەوە. یەکەمیان بە تەنها حەوزەکە بە نیو سەعات پڕ دەکات، دووەم بە تەنها بە سێیەکی سەعاتێك و سێیەم بە چارەکە سەعاتێك وچوارەم بە پێنجیەکی سەعاتێك پڕی دەکات. کاتی پێویست چەندە ئەگەر هەموویان بەیەکەوە ئاو ڕووبکەنە ناو حەوزەکە؟ هەریەکێکیان بڕی چەند ئاو دەکەنە حەوزەکەوە؟

**بەستنەوە**

**43** ئەندازە درێژی لاکێشەیەك 5 مەتری زیاترە لە پانیەکەی. درێژی وپانی لاکێشەکە هەژمێر بکە ئەگەر ڕێژەی درێژەیەکەی بۆ پانیەکەی کەمتر نەبێ لە 1.5 وزیاتر نەبێ لە 3.

**جێبەجێکردنەکان**

**44** وەرزش ئاراس بەشداری پێشبرکێیەکی سیانی کرد. $0.6Km$ بە مەلە و $15Km$ بەسواری پاسکیل و $8Km$ بەراکردن بڕی. تێکڕای خێراییەکەی لە پاسکیلەکەدا 9 ئەوەندەی تێکڕای خێراییەکەی بوو لە مەلەکردندا. تێکڕایی خێراییەکەی لە ڕاکردندا $6Km/h$ لە تێکڕایی خێرایی مەلەکردنەکەی زیاترە.

أ نەخشەیەکی ڕێژەیی بنووسە بە پێی خێراییەکەی لە مەلەکردندا. ئەوکاتە بنوێنێت کە ئاراس دەیخایەنێت بۆ بڕینی دووری پێشبرکێکە.

ب تێکڕای خێرایی ئاراس لە مەلەکردن وسواری پاسکیل وڕاکردندا چەند بووە؟ ئەگەر زانیت بە یەك کاتژمێر ونیو پێشبرکێکە تەواو کردوە.

**45** فیزیا نەخشەی $w(h)=w_0\left(\frac{6400}{6400+h}\right)^2$ کێشی تەنێکە لە بەرزی $h\ Km$ لە بۆشایی ئاسماندا. $w_0$ کێشی هەمان تەنە لەسەر زەوی. بەرزی ئەو مانگە دەستکردە چەندە؟ کێشەکەی $200\ Kg$ لە بۆشایی ئاسماندا و $3500\ Kg$ لەسەر زەوی بێت.

## ڕوانینێك بۆ دواوە

بەهای ئەم برانە هەژماربکە.

**46** $81^{\frac{1}{2}}$ **47** $13^0$ **48** $9^{\frac{3}{2}}$ **49** $27^{\frac{1}{3}}$

## ڕوانینێك بۆ پێشەوە

**50** بە بەکارهێنانی بژمێری ڕوونکردنەوەیی وێنەی نەخشەی $f(x)=\sqrt{x}$ بکێشە. وێنەی ئەو نەخشەکیە بەوێنەدانەوە بە دەوری تەوەری $x$ دا پێکبهێنە. تێبینی چی دەکەیت؟

# نەخشەی ڕەگی دووجا Radical Functions

وانەی
6

**ئامانجەکان**

- نەخشەی ڕەگی دووجا دەناسێت و هێڵکاری ڕوونکردنەوەیی دەکێشێت.
- بەهای بڕی ڕەگی دووجا هەژمێردەکات.

**بۆچی**

نەخشەی ڕەگی دووجا بەکاردێت بۆ نواندنی چەندها پەیوەندی لەژیانی ڕۆژانەماندا وەك ئەو پەیوەندییەی کە درێژی بەندۆل دەبەستێتەوە بەکاتی خایەنراوی لەرەیەکی تەواوی بەندۆڵەکە.

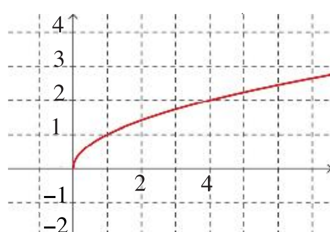


**جێبەجێ کردنەکان**
فیزیا

نەسرین تێبینی ئەوەی کرد کە لەرەی تەواوی بەندۆڵێکی درێژ کاتێکی زیاتری پێویستە لە لەرەی تەواوی بەندۆڵێکی کورت. بەکاتی خایەنراوی لەرەیەکی تەواوی بەندۆڵێك دەوترێت خولی بەندۆڵ. نەخشەی $t(x)=2\pi\sqrt{\frac{x}{9.8}}$ خولی بەندۆڵ بە چرکە بە پێی درێژییەکەی بەمەتر دەنوێنێت خولی بەندۆڵێك چەندە درێژییەکەی $0.1m$ و $0.2m$ و $0.3m$ بێت؟

## Square - Root Function نەخشەی ڕەگی دووجا

لەبیرت بێت ڕەگی دووجای ژمارەی $x$ بریتییە لە ژمارەیەك ئەگەر لە خۆی بدرێت ژمارەکەت دەستدەکەوێت. هەروەها لەبیرت بێت ژمارەی سالب ڕەگی دووجای نییە لە ژمارە ڕاستییەکاندا وهەموو ژمارەیەکی موجەبی وەك $x$ دوو ڕەگی دووجای هەیە یەکێکیان موجەبە بە $\sqrt{x}$ دەنووسرێت وئەوی تریان سالبە و بە $-\sqrt{x}$. نەخشەی ڕەگی دووجا نەخشەیەی بە ڕێسای $f(x)=\sqrt{x}$ دەناسرێت. بە پێی بابەتەکانی پێشوو بواری ئەم نەخشەیە هەموو ژمارە ڕاستییە ناسالبەکانە و مەوداکەشی هەمان کۆمەڵە ژمارەیە. بەڵام هێڵکاری ڕوونکردنەوەکەی لەو وێنەی بەرامبەردا دەردەکەوێت.

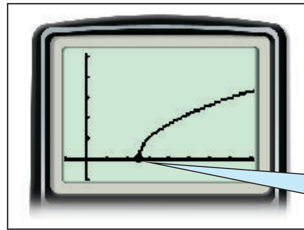


**نموونە** 1 بواری نەخشەی $f(x)=\sqrt{2x-5}$ دیاریبکە.

شیکار
بواری ئەم نەخشە پێکدێت لە هەموو ژمارە ڕاستییەکانی وەك $x$ کە بەهای بڕی $2x-5$ دەکاتە ژمارەیەکی نا سالب. بۆ دیاریکردنی ئەم بوارە، تەنها پێویستیت بە شیکاری لاسەنگەی

$2x-5\geq 0$ دەبێت $2x-5\geq 0$

$x\geq \frac{5}{2}=2.5$




دڵنیابە بواری نەخشەی $f(x)=\sqrt{2x-5}$ بریتییە لە $x\geq\frac{5}{2}$ .

**نموونە** 2 بەگەڕانەوە بۆ نموونەی بەندۆلەکە لە سەرەتای وانەکە، **خولی بەندۆلەکە** هەژمێربکە. کە درێژییەکەی $0.1m$ و $0.2m$ و $0.3m$ بێت.

شیکار
نەخشەی $y=2\pi\sqrt{\frac{x}{9.8}}$ لە بژمێری ڕوونکردنەوەیی تۆماربکە و بە بەکارهێنانی کاری خشتەیی

| X | Y1 |
|---|---|
| 0 | 0 |
| .1 | .6347 |
| .2 | .8976 |
| .3 | 1.0993 |
| .4 | 1.2694 |
| .5 | 1.4192 |
| .6 | 1.5547 |

X=0

خولی بەندۆلێك درێژییەکەی $0.1$ بێت بریتییە لە $0.6$ چرکە بەنزیکەیی

خولی بەندۆلێك درێژییەکەی $0.2$بێت بریتییە لە $0.9$ چرکە بەنزیکەیی

خولی بەندۆلێکی درێژییەکەی $3.0$بێت بریتییە لە $1.1$ چرکە بەنزیکەیی

## کورتکردنەوەی بڕە ڕەگیەکان Symplifiying Radical Expressions

بڕە ڕەگیەکان **Radical Expressions** ئەو بڕانەن کە بە لایەنی کەمەوە بڕێك لەخۆدەگرێت وەدەکەوێتە ژێر ڕەگە دووجاکەدا.

**نموونە** 3 بڕە ڕەگی $\sqrt{49a^2b^5x^6}$ کورتبکەوە.

لەبیرت بێت کە
$\sqrt{b^2}=|b|$

شیکار

$$\sqrt{49a^2b^5x^6}=\sqrt{7^2a^2b^5x^6}=7|a|b^2|x^3|\sqrt{b}$$

**هەوڵبدە** بڕە ڕەگی $\sqrt{64a^4bx^3}$ کورتبکەرەوە.

## هاوکێشە ڕەگیەکان Radical Equations

**نموونە** 4 هاوکێشەی $2\sqrt{x+5}=8$ شیکاربکە وشیکارەکەت ساغبکەرەوە.

شیکار

$$2\sqrt{x+5}=8$$
$$\sqrt{x+5}=4$$
$$\left(\sqrt{x+5}\right)^2=4^2$$ بەدوو جاکردنی هەردوو لا
$$x+5=16$$
$$x=11$$

**ساغكردنەوە**

$2\sqrt{x+5}=8$

$2\sqrt{11+5}=8$

$2\times 4=8$ دروستە

**هەوڵبدە** هاوكێشەی $3\sqrt{2x-1}=6$ شیكاربكە.

لە كاتی شیكاری هەندێك لە هاوكێشە ڕەگییەكان شیكاری نامۆمان بۆ دەردەچێت لەبەر ئەوە پێویستە ساغكردنەوەی شیكارەكەت بكەیت بۆ دوورخستنەوەی ئەم جۆرە شیكارانە.

**نموونە 5** هاوكێشەی $\sqrt{x+1}+3=2x$ شیكاربكە و شیكارەكە ساغبكەرەوە.

**شیكار**

$\sqrt{x+1}+3=2x$

$\sqrt{x+1}=2x-3$ ڕەگەكە لە لایەكی هاوكێشەكە دابنێ

$\left(\sqrt{x+1}\right)^2=(2x-3)^2$ هەردوو لای هاوكێشەكە دووجابكە

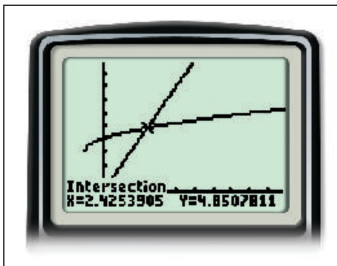
$x+1=4x^2-12x+9$

$4x^2-13x+8=0$ هاوكێشە دووجایەكە بەشێوەی گشتی بنووسە

$x=\frac{-(-13)\pm\sqrt{13^2-4\times4\times8}}{2\times4}$ یاسا بەكاربهێنە بۆ شیكاریكردنی هاوكێشە دووجاكە

$x=\frac{13-\sqrt{41}}{8}\approx 0.82$ یان $x=\frac{13+\sqrt{41}}{8}\approx 2.43$

**ساغبكەرەوە**




هێڵكاری ڕوونكردنەوەیی دوو نەخشەی $y=\sqrt{x+1}+3$ و $y=2x$ بكێشە وبەدوای پۆی خاڵەكانی یەكتربڕین بگەڕێ، یەك خاڵی یەكترین هەیە كە پۆیەكەی بریتییە لە$x\approx 2.43$ كەواتە هاوكێشەكە تەنها یەك شیكاری هەیە كە بریتییە $x=\frac{13+\sqrt{41}}{8}\approx 2.43$ وشیكارەكەی تر شیكارێكی نامۆیە.

**هەوڵبدە** هاوكێشەی $\sqrt{x-1}=\sqrt{2x+1}$ شیكاربكە وپاسادانی شیكارەكەت بكە.

هەندێ لە هاوكێشە ڕەگییەكان شیكاری نییە، وەك لەم نموونەیەدا دەردەكەوێت.

**نموونە 6** هاوكێشەی $\sqrt{x}-1=\sqrt{2x+1}$ شیكاربكە وپاسادانی شیكارەكەت بكە.

**شیكار**

$\sqrt{x}-1=\sqrt{2x+1}$

$\left(\sqrt{x}-1\right)^2=\left(\sqrt{2x+1}\right)^2$ هەردوو لای هاوكێشەكە دووجا بكە.

$x-2\sqrt{x}+1=2x+1$

$-2\sqrt{x}=x$ كورتبكەوە

$\left(-2\sqrt{x}\right)^2=(x)^2$ هەردوو لای هاوكێشەكە دووجا بكە.

$4x=x^2$

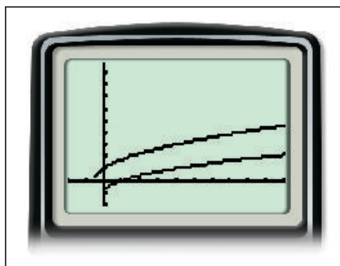
$$x^2-4x=0$$
$$x(x-4)=0$$
$x=0$ یان $x=4$

**ساغبكەوە**

$\sqrt{0}-1\stackrel{?}{=}\sqrt{2\times0+1}$     $\sqrt{4}-1\stackrel{?}{=}\sqrt{2\times4+1}$

$-1=1$ هەڵەیە     $1=3$ هەڵەیە

دەشتوانی بە ڕوونكردنەوەیی وەڵامەكەت ساغبكەیتەوە وێنەی ڕوونكردنەوەیی نەخشەی $y=\sqrt{x}-1$ و $y=\sqrt{2x+1}$ بكێشە و ساغبكەوە كە یەكتر نابڕن.



**هەوڵبدە** $3\sqrt{x}+2=\sqrt{3x}$ شیكاربكەو ڕاستی وەڵامەكەت ساغبكەرەوە.

# ڕاهـێــنــــــــان

## بەردەوامبوون لە بیركاریدا

1 چۆن بڕی $\sqrt{4x^3}$ سادە دەكەیت؟

2 دوو ڕێگای جیاواز بەكاربێنە بۆ شیكاری $\sqrt{x}=3\sqrt{x-4}$

3 بۆچی دەبێت لە شیكاركردنی هاوكێشە ڕەگییەكان پاسادانی ئەو شیكارانە بكەیت كە بە جەبری دەستمان دەكەوێت.

4 چۆن بە جەبری وڕوونكردنەوەیی ڕوونیدەكەیتەوە هاوكێشەی $\sqrt{x}=\sqrt{x+1}$ شیكاری نییە؟

## ڕاهێنانی ئاڕاستە كراو

5 بڕی $\sqrt{128ab^2x^5}$ سادەبكە.

6 بڕی $\dfrac{12\sqrt{15x^3}}{(3x)^{\frac{1}{2}}}$ سادەبكە، وای دابنێ $x$ تەنها بەهای موجەب وەردەگرێت.

7 هاوكێشەی $3\sqrt{2x-5}=20$ شیكاربكە وشیكارەكەت ساغبكەرەوە.

8 هاوكێشەی $\sqrt{5x+7}-2=x$ شیكاربكە وشیكارەكەت ساغبكەرەوە.

9 هاوكێشەی $2\sqrt{x+1}=\sqrt{x}-3$ شیكاربكە وشیكارەكەت ساغبكەرەوە.

## ڕاهێنان وجێبەجێكردن

ئەم بڕانە سادەبكە.

10 $\sqrt{32x^3}$    11 $\sqrt{18x^3}$    12 $\sqrt{27x^3y^4}$

13 $\sqrt{50a^3b^4}$    14 $\left(16x^6\right)^{\frac{1}{4}}$    15 $\left(40a^7\right)^{\frac{1}{3}}$

16 $\frac{x}{3-5\sqrt{2}}-\left(2+3\sqrt{2}\right)$    17 $\frac{x}{4+\sqrt{3}}-\left(-1+3\sqrt{2}\right)$

بواری ئەم نەخشانە دیار بکە.

18 $f(x)=\sqrt{12x+24}$

19 $f(x)=\sqrt{3x-2}$

20 $f(x)=\sqrt{3(x-2)}$

21 $f(x)=\sqrt{3(x+2)-1}$

22 $f(x)=\sqrt{2-3(x+1)}$

23 $f(x)=\sqrt{3-2(x-4)}$

24 $f(x)=\sqrt{x^2-25}$

25 $f(x)=\sqrt{9x^2-16}$

26 $f(x)=\sqrt{x^2+5x+6}$

27 $f(x)=\sqrt{x^2+10x-25}$

28 $f(x)=\sqrt{2x^2+5x-12}$

29 $f(x)=\sqrt{3x^2+7x+2}$

30 $f(x)=\sqrt{6x^2-13x+5}$

31 $f(x)=\sqrt{8x^2-10x-3}$

32 بواری نەخشەی $f(x)=\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}$ دیاربکە لە وێنەی ڕوونکردنەوەیی نەخشەکەوە وەڵامەکەت ساغبکەوە.

جێبەجێکردن

33 **ڕووداوەکانی هاتووچۆ:** لێکۆڵەرەوەکانی ڕووداوی هاتووچۆ سوود لە نەخشەیەك وەردەگرن بۆ دۆزینەوەی خێرایی ئەو ئوتۆمبیلە لە کاتی ڕوداوێکدا بە پێوانی شوێنەواری تایەی ئوتۆمبیلەکە لەسەر ڕێگاکەدا. کە لە ئەنجامی شێلانی ڕاگرەکەوە دروست دەبێت. ئەم نەخشە لە ڕۆژانی ساماڵدا بریتیە لە $y=\sqrt{80x}$ کاتێك $x$ خێرایی ئوتومبیلەکەیە بە کیلۆمەتر لەکاتژمێرێکدا و $m$ درێژی شوێنەوارەکە بێت بە مەتر.

أ نەخشەی پێشوو بە سادەترین شێوە بنووسە بە بەکارهێنانی ڕەگی دووجا پاشان بینووسەوە بە بەکارهێنانی ژمارە دەییەکان.

ب لێکۆڵەرەوەکە درێژی شوێنەواری تایەکەی پێوا و بینی 200m دەبێت خێرایی ئوتۆمبیلەکە بە نزیکترین کیلۆمەتر لە کاتژمێرێك هەژماربکە.

ج ئایا خێراییەکەی دوو ئەوەندی لێدێت ئەگەر شوێنەوارەکەش دوو ئەوەندە زیادبکات؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەرەوە.

## تێڕوانینێك بۆ دواوە

ئەم برانە سادەبکەرەوە وای دابنێ سفر بەهای قەدەغەکراوی گۆڕاوەکانە.

34 $\left(-2y^3y^5\right)^2$

35 $2x^4\left(-3xy^2\right)^3$

36 $\left(5x^{-2}y^4\right)^{-1}$

37 $\left(\frac{-3xy^3}{x^{-4}y^5}\right)^3$

38 $\left(\frac{-4m^4n^{-2}}{m^2n^{-2}}\right)^{-1}$

39 $\left(\frac{3m^4n^2}{2m^0n^{-3}}\right)^{-2}$

سفرەکانی ئەم نەخشانە دیاریبکە.

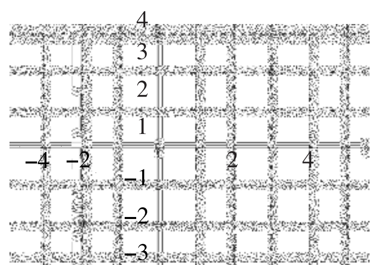
40 $f(x)=x^2+9x+18$

41 $f(x)=x^2-2x-8$

42 $f(x)=x^2-3x-18$

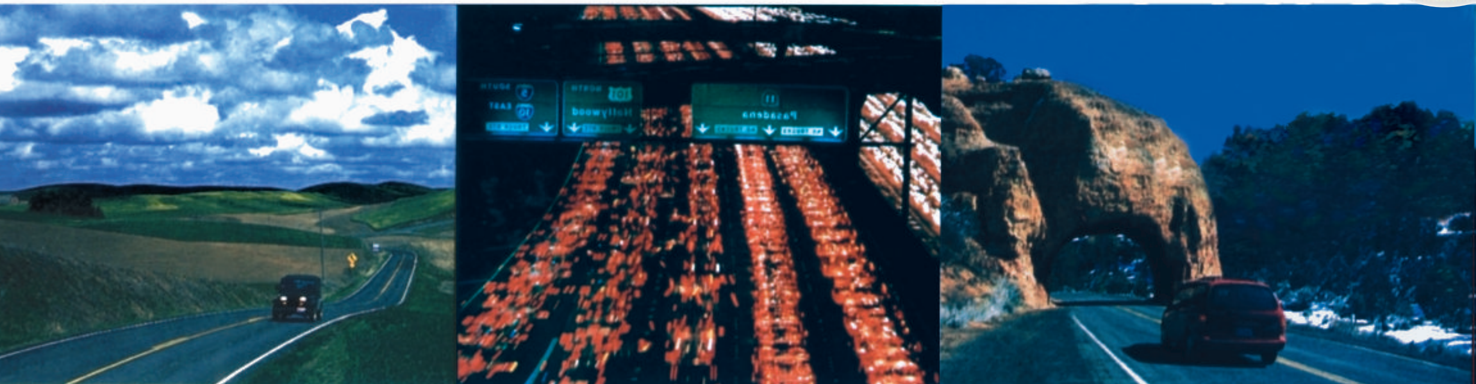
## تێڕوانینێك بۆ پێشەوە

43 بیردۆزی فیثاغورس بەکاربێنە بۆ هەژمارکردنی دووری نێوان ئەو دوو خاڵەی لە شێوەکەی بەرامبەرتدا دیاریکراوە.



پرۆژەی بەش

# کام ناوەند هەڵدەبژێرێت؟



بۆ هەر كۆمەڵە بەهایەك دوو ناوەند هەیە كە ناوەندە ژمارەیی وناوەندە گونجاون. ناوەندە ژمێرەیی دوو ژمارەی $b$ و $c$ بریتیە لە $\frac{a+b}{2}$ بەڵام ناوەندە گونجاو بۆ دوو ژمارەی $b$ ، $c$ بریتیە لە $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

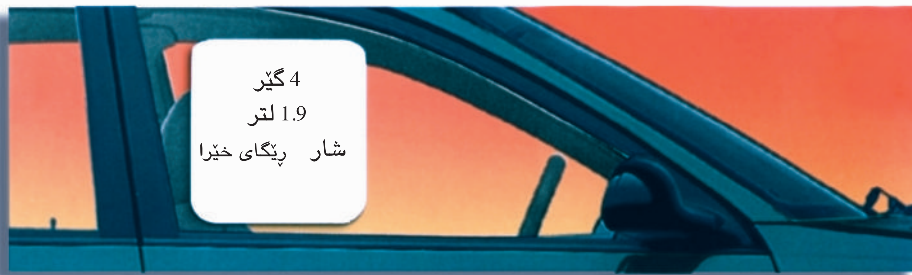
لە هەندێك شیكاری پرسیارەكان پشت بە ناوەندە ژمارەیی دەبەسترێت، بەڵام لە شیكاری هەندێكی تردا پشت بە ناوەند گونجاو دەبەسترێت. پشتبەستن بە یەكێك لەم دوو ناوەندە كارێكی جیاكەرەوەیە، چۆن ئەنجامەكان لەهەردوو بارەكەدا ڕەنگە بە تەواوەتی جیاوازبن.

بە ئامانجی پێدانی پێوەرێك كە ڕێگە بدات بە خەڵكانێك بەراوردی بەكاربردنی بەنزینی ئوتومبیلە نوێیەكان بكەن كە چەند گڵدانەوەی بەنزین دەكات.

دەزگای پاراستنی ژینگە بڵاوكراوەكانی بەسەر جامی ئوتۆمبیلەكاندا هەڵواسی كە تیایدا بڕی بەنزینی بەكاربراو تێداپشاندراوە. بۆنموونە دەزگاكە خەمڵاندنی ئوتۆمبیلێك كە 4 گێرو فراوانی مەكینەكەی 1.9 لیتر بێت یەك گاڵۆن بەنزین بۆ 39 كیلومەتر لەناوشار ویەك گاڵۆن بۆ 54 كیلومەتر لەسەر ڕێگای خێرا. وەزارەتی وزە لە هەندێك وولاتان ڕابەرێكی ساڵانە بڵاودەكاتەوە كە یاریدەدەری ئەو كەسانە دەدات كە دەیانەوێ ئۆتۆمبیلی تازە بكڕن. ئەم ڕابەرە مەزندەی بەكاربوونی ووزە بۆ هەر جۆرێك لە ئوتۆمبیلە تازەكان دیاریدەكات و ئەم ڕابەرە ووریاكردنەوەی بەكارهێنەرەكان وریا دەكاتەوە.

**وریاكردنەوەی خاوەن ئوتۆمبیلەكان**

تكایە ئاگاداری ئەوە بن ناوەندەكان كە بەكاربردنی ئوتۆمبیلەكان لەناو شارەكاندا یان لەسەر ڕێگا خێراكان دەست نیشان دەكات تەنها خەملاندنە ڕەنگە خەملانەكە هەڵە تێبكرێت بۆ تێچوونی ساڵانەی ئوتۆمبیلەكە.




## چالاكی 1

1. ناوەندە ژمێرەیی بۆ بەكاربردنی ئەو ئوتۆمبیلەی لەوێنەكەی سەرەوەدایە هەژمار بكە لەهەمموو ڕۆیشتنەكەیدا.
2. ناوەندە گونجاو بۆ بەكاربردنی ئەو ئوتۆمبێلەی، لەوێنەكەی سەرەوەدا دیارە هەژمێر بكە لە هەمموو ڕۆیشتنەكەیدا.
3. لەهەردوو ناوەندەكە بكۆڵەوە هۆكاری ئاگاداركردنەوەی ڕابەرەكە شیبكەرەوە.





## چالاکی 2

لەوانەیە ژمارەی ئەو کیلۆمەترانەی ئوتۆمبیلێك دەیبڕێت لە شاردا یەکسان نەبێت بە ژمارەی ئەو کیلۆمەترانەی کە دەیبڕێت لەسەر ڕێگا خێراکان. ئەمەش وا دەکات کە هەژمێری ناوەندە سالآنە کە بیرۆکەی بەکارچوونی سالآنە دەدا بکرێت، هێمای گۆڕاوی $d_1$ بۆ ژمارەی کیلۆمەترەکانی ناوشار وگۆڕاوی $d_2$ بۆژمارەی کیلۆمەترەکانی سەر ڕێگای خێرا لەسالێکدابن.

بۆ هەژمێری ژمارەی گالۆنە بەکاربراوەکان لە سالێکدا هەڵدەستین بەم هەژمارانە:

ناو شار: $(d_1\,\text{km})\left(\frac{\text{Galon}}{39\,\text{km}}\right)=\frac{d_1}{39}\,\text{gal}$

لەسەر ڕێگای خێرا: $(d_2\,\text{km})\left(\frac{\text{Galon}}{54\,\text{km}}\right)=\frac{d_2}{54}\,\text{gal}$

دەکرێ بەکارچوونی سالآنەی ئوتۆمبیل بە هۆی برێکی ڕێژەیی وەك لای خوارەوە دەربببڕێت:

ناوەندە بەکاربردنی سالآنە

$$a(d)=\frac{\text{ژمارەی کیلومەتری سالآنە}}{\text{ژمارەی گالۆنی سالآنە}}=\frac{d_1+d_2}{\frac{d_1}{39}+\frac{d_2}{54}}$$

1 وای دابنێ ئەو ئوتۆمبیلەی کە لەسەرەوە باسکراوە بکرێت. ئەوا ناوەندە بەکارچوونی سالآنەی بەنزین چەندە ئەگەر $800Km$ لەناو شار و $400Km$ لەسەر ڕێگا خێراکان بڕوات؟

2 هەژماری تێچوونی بەنزینی ئوتۆمبیلەکە لە سالێکدا بکە ئەگەر نرخی یەك گالۆن لە بەنزین 700 دینار بێت.

## چالاکی 3

ئامانج مەشق لەسەر پایسکل سواری دەکات، هەموو ڕۆژێك $2Km$ دەبڕێت. لە کیلۆمەتری یەکەمدا خێراییەکەی $20Km/h$ و لە کیلۆمەتری دووەمدا خێراییەکەی $10Km/h$ ئەویش بە هۆی هیلاکیەوە.

1 ئایا ناوەندە ژمێرەیی هەردوو خێراییەکە دەربڕین لە تێکڕای خێرایی ئامانج دەکات لەوماوەیدا؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

2 هەژماری ئەو خێراییە بکە کە پێویستە ئامانج پێی بڕوات لە کیلۆمەتری دووەمدا بۆ ئەوەی تێکڕای خێراییەکەی لەم دوو کیلۆمەترەدا $15Km/h$ بێت.

# 5

# پێداچوونەوەی بەش

**1** گۆڕاوی $m$ ڕاستەوانە لەگەڵ گۆڕاوی $b$ و پێچەوانە لەگەڵ گۆڕاوی $c$ دەگۆڕێت بەهای $m$ چەندە کاتێک $a=9$ و $b=12$ ئەگەر $m=6$ لەکاتێکدا $a=7$ و $b=4$ ؟

**2** گۆڕاوی $y$ ڕاستەوانە لەگەڵ گۆڕاوی $x$ وپێچەوانە لەگەڵ گۆڕاوی $z$ دەگۆڕێت. بەهای $y$ چەندە کاتێک $x=20$ و $z=2$ ئەگەر $y=3$ لەکاتێکدا $x=18$ و $z=2$ ؟

بوارو دەرکەنارەکانی هەریەکە لەم نەخشانە دیاریبکە.

**3** $f(x)=\frac{2x-3}{x^2-8x+12}$

**4** $f(x)=\frac{3x-5}{x^2-25}$

**5** $f(x)=\frac{x^2+4x-12}{3x^2-12}$

**6** $f(x)=\frac{x^2-9}{3x+5}$

**7** $f(x)=\frac{2x}{6x^4-18x^3}$

ئەم برانە سادەبکە.

**8** $\frac{x^2+6x}{10}\times\frac{4}{x^2-36}$

**9** $\frac{x^2+10x-8}{3x^2-17x+10}\times\frac{2x^2+9x-5}{x^2+3x-4}$

**10** $\frac{4x+8}{5x-20}\div\frac{x^2+3x-10}{x^2-4x}$

**11** $\frac{2x^2-9}{6}\div\frac{4x-12}{x}$

**12** $\dfrac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x+2}{x}}$

**13** $\dfrac{\frac{a+1}{a^2}}{\frac{(a-1)^2}{a}}$

**14** $\dfrac{\frac{x+1}{x}}{\frac{(x+1)^2}{x+2}}$

**15** $\dfrac{\frac{4x^2}{6x-3}}{\frac{15x}{2x-1}}$

ئەم برانە سادەبکە.

**16** $\frac{3x-5}{3x-6}+\frac{4x-2}{5x-15}$

**17** $\frac{9y+3}{y^2-11y+18}+\frac{y+3}{y-9}$

**18** $\frac{2x-3}{x^2-3x}-\frac{9x+1}{x-3}$

**19** $\frac{3y-39}{y^2-7y+10}-\frac{3}{y-2}$

**20** $\frac{2}{\frac{x}{4}}+\frac{5}{\frac{x}{3}}$

**21** $\frac{x}{3+\frac{5}{x}}-\frac{4}{1+\frac{2}{x}}$

هەریەکە لەم هاوکێشانە شیکاربکە.

**22** $\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2}$

**23** $\frac{4}{x^2+1}=1$

**24** $\frac{3x-1}{x^2+2x}=-1$

**25** $\frac{1}{x^2-1}=1$

**26** $\frac{2}{1-x^2}=\frac{x^2}{x^2+1}$

**27** $\frac{1}{x}=\frac{x+2}{x+1}$

**28** $\sqrt{x+2}=-2$

**29** $\sqrt{x}=2x$

**30** $\sqrt{x-2}=\sqrt{x}-2$

ئەم لاسەنگانە بەجەبری شیکاربکە.

**31** $\frac{1}{x}<1$

**32** $\frac{1}{x}\geq 2$

**33** $\frac{1}{x^2+1}<\frac{1}{2}$

**34** $\frac{1}{x^2+1}\geq\frac{1}{3}$

**35** $\frac{x+1}{2x+3}<1$

**36** $\frac{2x+1}{2x-1}<2$

بەڕوونکردنەوەی هەریەك لەم لاسەنگانە شیکاربکە

**37** $\frac{1}{x}\geq x$

**38** $\frac{1}{x^2+2x+1}>2$

**39** $\frac{1}{x}<2x$

**40** $\frac{1}{x^2-x+2}<x$

بواری هەریەك لەم نەخشانە دیاریبکە.

**41** $f(x)=\sqrt{2x-3}$

**42** $f(x)=\sqrt{x}-5$

**43** $f(x)=5\sqrt{3(x-1)}+1$




# تاقیکردنەوەی بەش

**هەموو بەها قەدەغەکراوەکان وهەموو دەرکەنارەکان بۆ هەریەکە لەم نەخشانە دیاریبکە.**

1 $f(x)=\frac{x-4}{x^2-16}$

2 $h(x)=\frac{x^2+2x-15}{2x^2-18}$

3 $g(x)=\frac{2x^3-16}{x^3-2x^2-9x+18}$

4 میکانیك: باری سلنگێك ڕاستەوانە لەگەڵ گۆڕانی پانیەکەیدا وپێچەوانە لەگەڵ سێجای درێژییەکەی دادەگۆڕێت.سلنگێك پانیەکەی $10m$ و درێژییەکەی $20m$ بێت بارێکی هەڵگرتووە کە $1200Kg$ ئەوا سلنگێك پانیەکەی $8m$ و درێژیەکەی $25m$ چەند دەتوانی هەڵبگرێت.

**هەریەك لەم بڕانە سادەبکە**

5 $\frac{x^2-9}{2x^2-8x+6}\times\frac{4x^2-12x+36}{x^3+27}$

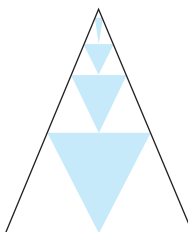
6 $\dfrac{\frac{x^3}{3x^2-12}}{\frac{x^3+5x^2}{3x^2+9x-30}}$

7 $\frac{3x}{x-2}\div\frac{6x^2}{2x^2-8}\times\frac{5x+1}{2x+4}$

8 $\frac{4}{x^2-4}+\frac{x+3}{x+2}$

9 $\frac{x-37}{x^2-2x-15}-\frac{5}{x+3}$

10 ئەندازە: هەژمێری ڕووبەری ناوچە ڕەنگکراوەکە بە پێی ڕووبەری سێگۆشەکەبکە.کە بە گۆڕاوی $x$ هێماکراوە.



**هەریەکە لەم هاوکێشە ولاسەنگانە شیکاربکە.**

11 $\frac{x+3}{x-1}=2$

12 $\frac{a-4}{a+2}+\frac{a-5}{a-4}=1$

13 $\frac{3}{x+4}\leq 5$

14 $\frac{3}{x+4}<\frac{5}{x+7}$

جێگۆری ئەندازەیی دیاربکە کە ڕێگا دەدات بە گواستنەوەی وێنە ڕوونکردنەوەیی نەخشەی بنەرەتی $y=\sqrt{x}$ بۆ وێنە ڕوونکردنەوەی نەخشەکانی خوارەوە:

15 $y=\sqrt{x-4}$

16 $y=-\sqrt{x}+3$

**هەژمارەی $x$ بە پێی $y$ بکە.**

17 $y=x^2+x$

18 $y=5x^2-3x-4$

**هەژمێری هەریەك لەم بڕانەبکە.**

19 $\left(3\sqrt[4]{81}\right)^2-31$

20 $\frac{1}{5}\left[\left(\sqrt{9}\right)^3-\left(\sqrt[3]{64}\right)^2+2\right]$

هەریەك لەم بڕانە سادە بکەوە وای دابنێ هەریەکە لە گۆڕاوەکان جگە لە بەهای موجەب هیچ بەهایەك وەرناگرن.

21 $5\sqrt{8x^3y^6}\times\left(2x^5y\right)^{\frac{1}{2}}$

22 $\frac{8\sqrt{5x^7y^9}}{\sqrt{25x^3y^5a}}$

23 $\left(5-\sqrt{12}\right)-\left(2\sqrt{27}+8\right)$

24 $\left(2+\sqrt{5}\right)\left(3-2\sqrt{5}\right)$

**هەریەکە لەم بڕانە بە سادەترین شێوە بنووسە کە ژێرەیان ڕێژەییبن.**

25 $\frac{4}{\sqrt{11}}$

26 $\frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

27 $\frac{2\sqrt{7}-\sqrt{35}}{35}$

**هەریەك لەم هاوکێشە ولاسەنگانە شیکاربکە.**

28 $\sqrt{2x+7}=-3$

29 $\sqrt[4]{3x}=\sqrt[4]{4x-7}$

30 $\sqrt{x-7}<0$

31 $\sqrt[3]{2x+1}\geq 3$

# 5

# تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

**1** ئەگەر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ئەوا کام لەمانەی دێن ڕاستن بە تەواوەتی.

أ $ad=bc$    ج $ad=cb$

ب $\frac{a}{d}=\frac{c}{b}$    د $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

**2** $\left(6\sqrt{8}-6\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}+1\right)$ سادەبکە.

أ $6\sqrt{2}-24$    ج $6\sqrt{2}+24$

ب $12\sqrt{2}-23$    د $6\sqrt{2}-23$

**3** ژمارەی شیکاری سیستمی $\begin{cases} y=3x+2 \\ y=3x-2 \end{cases}$ چەندە؟

أ 0    ج 1

ب 2    د ناکۆتا

**4** ماوەی دابەشکردنی $2x^2-5x+8$ بەسەر $x+4$ دا چەندە؟

أ 60    ج $-44$

ب سفر    د 20

**5** $(x^3y^{-2})^{-2}$ سادەبکە.

أ $\frac{y^4}{x^6}$    ج $\frac{1}{x^2y}$

ب $\frac{x^6}{y^4}$    ب $x^2y$

**6** کام لەمانەی خوارەوە نابێتە ڕەگی هاوکێشەی

$$x^3+x^2-9x-9=0$$

أ $-3$    ج $-1$

ب 3    د 1

**7** چ ژمارەیەك لەمانەی خوارەوە بخرێتە سەر $x^2-10x$ بۆ ئەوەی ببێتە دووجایەکی تەواو.

أ 5    ج $-25$

ب $-5$    ب 25

**8** هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بنووسە کە بەدوو خاڵی $(-3, 8)$ و $(-4, 9)$ دا دەڕوات.

**9** بڕی $25x^2-60x+30$ شیتەڵبکە.

**10** بڕی $\frac{x+1}{x^2+4x-4} \div \frac{x^3}{x^2+4}$ سادەبکە.

**11** پاش ڕێژەکردنی ژێرەی $\frac{8}{5-3\sqrt{2}}$ بڕەکە سادەبکە.

**12** **بەهای ئەوپەڕ** بە بۆنەی چەژنی نەورۆز، شارەوانی شارێك تیری ئاگراوی بە خێراییەکی سەرەتایی $75m$ لە چرکەدا تەقاند. هەژماری ئەوپەڕی بەرزی بکە کە یەکێك لە تیرەکان دەیگاتێ وەهەروەها هەژماری کاتە خایەنراوەکەی بکە ئەگەر بزانیت $h(t)=75t-4.8t^2$ بەرزیە بە پێی کات، $h$ بەرزیە بە مەترو $t$ کاتە بە چرکە.

**13** گەورەترین ژمارەی تەواو کامەیە لە پاسادانی $-6x-1>10$ دەکات

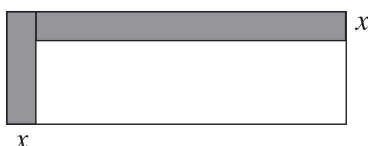
**ئەمانە شیکاربکە.**

**14** $2\sqrt{x-4}=\sqrt{x-2}$

**15** $1-2x=5$

**16** $-5x+3=\frac{1}{2}x-1$

**17** **بۆ خۆشی**: درێژی تەختەی نواندی شانۆیەك $38m$ و پانیەکەی $20m$، بەشێك لە تەختەکە بڕا هەروەك چۆن لە وێنەکەدا دیارە. بەهای $x$ چەندە ئەگەر بزانیت ئەو برینە لە ڕووبەری تەختەکە $265m$ دووجا کەمدەکاتەوە.



## بەشی شەشەم

# ئەگەر و ئامار
# Probability and Statistics

1. دەستپێکێك بۆ ئەگەر.
2. گۆڕینەکان و ڕیزکردنەکان.
3. گونجێنەکان.
4. کۆکردنەوەی ئەگەرەکان.
5. ڕووداوە سەربەخۆیەکان.
6. پێوەرەکانی پەرتبوون.

پرۆژەی بەشەکە

پێداچوونەوە

تاقیکردنەوەی بەش

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

# بەشی 6

# ئەگەر و ئامار

## Probability and Statistics

ئەگەر بریتییە لە هاتنەدی ڕووداوێك كە دەتوانیت نیپێشبینی ڕوودانی بكەیت و ناتوانیت ئەنجامەكانی دیاریبەكەیت لەگەڵ ئەوەی كە بەچەند مەرجێكی دیاریكراو پێناسەكراوە. ئەگەرەكان بەكارهێنانی زۆری هەیە بەرچاومان دەكەوێت لە كۆمپانیاكانی دڵنیابوون و دامەزراوەكانی لێكۆڵینەوەی وەك لێكۆڵینەوەی پزیشكی و ئەوانی تر، و لە جێبەجێكردنی یاساكان و لە زانستە ڕامیارییەكاندا.





**وانەكان**



### دەربارەی پرۆژەی بەش

پێشبینییەکی دروست بۆ ئەنجامەکانی ڕووداوە هەڕەمەکییەکان، ڕۆڵێکی گرنگ دەبینێت بۆ بڕیاردان، ئاسان یان ئاڵۆز. لە زۆر بواردا دەتوانرێت پێشبینی ئەگەری ڕووداوێکی هەڕەمەکی دیاریبکرێت بەڕێگای تاقیکردنەوە، ئەویش بە چاودێریکردنی ژمارەی ئەو جارانەی کە ڕووداوەکەی تێیدا دێتەدی. بەڵام لەوانەیە ئەمە نیمچە ستەم بێت کاتێك ڕووداوەکە ئاڵۆز بێت. لەو کاتەدا، مرۆڤ پەنا دەباتە بەر نواندن. لەمەودوا ئەم ڕێگایە بەکاردێت لەکاتی کارکردنتدا. لە دوای کۆتایی ئەم بەشەدا دەتوانیت هەستیت بە ئەمانەی خوارەوە.

- دروستکردنی نموونەکان (سامپڵ) (نموذج) بۆ نواندنی ڕووداوە هەڕەمەکییەکان.
- بەکارهێنانی پێدراوەکان کە لە نواندنەکە دەستدەکەوێت بۆ خەملاندنی ئەگەری ڕووداوەکە.

وانەی 1

# دەروازەیەك بۆ ئەگەر

## Indroduction To Probability

**بۆچی؟**

زۆرجار توێژینەوەی ئەگەر بەبەکارهێنانی شتەکان لە ژیاندا وەك بەردەزار یان تیر یان پارچە دراوی کانزایی دەکرێت.



**ئامانجەکان**

- زاراوەکانی تایبەت بە ئەگەر بەکاردەهێنێت.
- یاسای ژماردنی بنەڕەتی بەکاردەهێنێت.
- یەکسانبوون لە ئەگەرەکاندا دەناسێت.
- ئەگەری تیۆری ڕووداوێك دیاریدەکات.

گەلێك کۆمپانیای بازرگانی هەن. لەوانەش کۆمپانیاکانی دڵنیابوون، کارەکانیان بەندە بەو شتانەی کە پێشبینیکردنی ئەنجامەکانیان کارێکی ئاسان نیە، بۆمان هەیە بپرسین: چۆن دەتوانێت قازانج بکات، لەڕاستییدا دەتوانین پێشبینی ئەگەری ڕووداوی کارێك دیاریبکەین لە ڕێگای چاودێریکردنی ئەنجامەکانی بارە زۆرەکان کە لەوانەیە ببنە هۆی ڕوودانی ڕووداوەکە. بۆ نموونە دیاریکردنی ئەگەری مردنی جگەرەکێشێك بە چاودێریکردنی ڕێژەی ئەو کەسانەی کە بەهۆی جگەرەکێشانەوە دەمرن. کە ئەمەش ڕێژەیەکی زۆربەرزە هەروەکو توێژینەوە پزیشکییەکان سەلماندویانە. لە خوێندنی ئەگەرەکان کۆمەڵێك زاراوە بەکاردەهێنرێت خوێندکار پێویستە فێریان ببێت وبە شێوەیەکی دروست بەکاریان بهێنێت. ئەم خشتەی خوارەوە پێناسەکانی هەندێ لە زاراوەکانمان بۆ ڕوونەدەکاتەوە هەروەکو ڕوونکراوەتەوە بە نموونەی هەڵدانی بەردەزارێك.

| پێناسە | نموونە |
|---|---|
| **کاری هەڕەمەکی Trial**: کارێکە ناتوانین پێشەکی ئەنجامەکەی دیاریبکەن | هەڵدانی بەردەزاێك |
| **تاقیکردنەوە(هەڕەمەکی) Experiment**: کارێکی هەڕەمەکییە یان دووبارەبوونەوەی کارە هەڕەمەکیەکەیە چەند جارێك | هەڵدانی بەردەزارێك 10جار |
| **کۆمەڵەی ئەنجامەکان(بۆشایی نموونە) Sample Space** : کۆمەڵەی هەموو ئەنجامەکانی لە تواناداببێت لە کارێکی هەڕەمەکیدا. | $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ |
| **ڕووداو Event** : ئەنجامێکی لە توانادایە یان کۆمەڵێك ئەنجامی لە توانادایە. | دەستکەوتنی 3 یان دەستکەوتنی ژمارەیەکی تاك |

بە ئەنجامەکانی کارێکی هەڕەمەکی دەڵێین ئەگەری یەکسان ئەگەر لە تواناداببێت هەموو ئەو ئەنجامانەی دەردەکەون یەکسان بن. لەڕاستیدا سەلماندنی ئەوەی هەموو ئەنجامەکانی کاری هەڕەمەکی لە ژیاندا ئەگەر تیایاندا یەکسان بن کارێکی گرانە. بەڵام دەتوانین خۆمان وای دابنێین کە وایە. بۆ نموونە دەتوانیت ئەنجامەکانی هەموو کارە هەڕەمەکیەکانی خوارەوە بە ئەگەری یەکسان دابنێیت: هەڵدانی بەردەزارێك، هەڵدانی پارچە دراوێکی کانزایی، ئەنجامی چەرخێکی میلدار، ڕەگەزی لە دایکبوو.

**نموونە 1**

ئەگەری چاکبوونەوەی یەکێکی توشبوو بە شێرپەنجەی سی چەندە، ئەگەر بزانیت توێژینەوەیەك لەسەر 5000 توشبوو کراوە لەوانە 250 یان چاکبوونەتەوە؟

**شیکار**

دەتوانیت کۆمەڵەی ئەنجامەکانی 5000 توشبوو، لە نێوانیاندا 250 کەس چاکبووەتەوە ئەگەری چاکبوونەوەی نەخۆشەکە بریتیە لە.

$$P(c)=\frac{250}{5000}=\frac{1}{20}=0.05=5\%$$

هێمای $c$ بەکاردێت بۆ ڕووداوی ( چاکبوونەوەی نەخۆش)

**نموونە 2**

دۆستی بەردەزارێکی هەڵدا ئەگەری دەستکەوتنی یەکێك لە چەند جارەکانی 3 چەندە؟

**شیکار**

بۆشایی نموونە = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ڕووداوەکە دێتەدی ئەگەر دۆستی 3 یان 6ی دەستبکەوێت.

ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت کە ئەگەری ڕووداوەکە بریتییەلە2 لە بنچینەی 6 واتە:

$$P(M3)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\approx 0.3333\approx 33.33\%$$

گریمانM3 هێمایەکە بۆ یەکێك لە چەند جارەکانی 3

**ئەگەری تیۆری Theoritical Probability**

ئەگەر تاقیکردنەوەیەکی هەڕەمەکی دیاریکراو و ڕێکبوو ئەوا ئەگەری ڕووداوێك $A$ لە ڕووداوەکانی بریتییە لە ژمارەی ڕاستی:

$$P(A)=\frac{\text{ژمارەی ئەنجامەکانی کە پاسادانی ڕووداوەکە دەکات}}{\text{ژمارەی هەموو ئەنجامەکان}}$$

**بەرەنگاری**

چێنەر گۆیەکی لە تورەگەیەکدا ڕاکێشا کە 4 گۆی سوور و 7 گۆی ڕەشی تیدابوو. ئەگەری ئەوەی گۆیە ڕاکێشراوەکە شین بێت چەندە؟

**ئەگەر Probability**

پێوانەی ئەگەری ڕووداوێك ژمارەیەکی ڕاستییە ودەکەوێتە نێوان سفر ویەك.

ئەگەر ڕووداوەکە ئەستەم بێت **Impossible** ئەوا ئەگەری ڕووداونی = 0

ئەگەر ڕووداوەکە دڵنیایی بێت **Certain** ئەوا ئەگەری ڕووداونی = 1

سەرجەمی ئەگەرەکانی هەموو ئەنجامەکانی لە تواناداوبێت = 1

### ئەگەری تیۆری Theoretical Probability

ئەگەری ڕوداووێك لە ڕووداوەكانی تاقیكردنەوەیەك كە ئەنجامەكەی ئەگەری یەكسانیان هەبێت، بریتیە لە ژمارەیەكی ڕاستی و یەكسانە بەم كەرتە.

$$p(A) = \frac{\text{ژمارەی ئەو بارانەی كە ڕووداوەكە دێنێتەدی}}{\text{ژمارەی هەموو بارە لە تواناكان}}$$

ئەگەرێك

**نموونە** 3



مەریوان پەپكێكی لە قوتوویەك ڕاكێشا كە 2 پەپكی سوور 4 پەپكی شین و 3 پەپكی زەردی تێدایە.

**ئەگەری ئەوەی پەپكە ڕاكێشراوەكە زەرد بێت چەندە؟**

**شیكار**

ئەنجامەكانی ئەم تاقیكردنەوە هەرەمەكیە ئەگەری یەكسانە.دەتوانیت بۆشایی نموونەكە بەم شێوەیە بنوێنین.

ئەگەری ئەوەی پەپكە ڕاكێشراوەكە زەرد بێت 3 لە 9 یە.

$$\{R_1, R_2, B_1, B_2, B_3, B_4, Y_1, Y_2, Y_3\}$$

$Y$ هێمای ڕوودانی «ڕاكێشانی پەپكی زەردە» $P(Y) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

هەوڵبدە

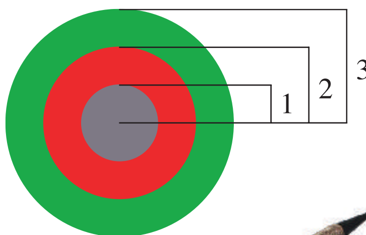
كامەران پەپكێكی لە قوتوویەك ڕاكێشا كە 3 پەپكی سوور و 5 پەپكی شین و 7 پەپكی زەردی تێدابوو. ئەگەری ئەوەی پەپكی ڕاكێشراو شین بێت چەندە؟

بۆشایی نموونە لە نموونەكانی ڕابردوو لە كۆمەڵەیەكی دواهاتوو پێكدێت. لە كاتێكدا تاقیكردنەوەی هەرەمەكی وا هەیە بۆشایی نموونەكە تیایاندا كۆمەڵەیەكی دوانە هاتووە.

**نموونە** 4

بەستنەوە

ئەندازە




بڕیار تیرێكی هەڵدا بۆ ئەوەی بچەقێت لە پارچە تەختەیەكی بازنەیی كە بەدیوارێكدا هەڵواسرابوو. **ئەگەری ئەوەی تیرەكە بچەقێت لە ناوچەی سەوز چەندە؟**



**شیكار**

هەر خاڵێك لە خاڵەكانی بازنەكە ئەنجامێك دەردەبڕێت كە لە تواناادایە. لەم بارەدا، دەڵێین، كە بۆشایی نموونەكە، كۆمەڵەیەكی دوانەهاتووە، خاڵەكانی ڕووداوەكە دێننەدی بریتین لە خاڵەكانی ناوچە سەوزەكە. بۆ هەژمێركردنی ئەگەری ڕووداوی داواكراو، ڕووبەری ناوچە سەوزەكە بەسەر ڕووبەری گشتی تەختەكە دابەشبكە.

$$P(G) = \frac{\text{ڕووبەری ناوچەی سەوز}}{\text{ڕووبەری گشتی تەختە بازنەییەكە}} = \frac{\pi(3)^2 - \pi(2)^2}{\pi(3)^2} = \frac{5\pi}{9\pi} = \frac{5}{9} = 0.556 = 55.6\%$$

كە $G$ هێمایەك بێت بۆ ڕووداوەكە «چەقینی تیرەكە لە ناوچە سەوزەكە».

هەوڵبدە

ئەگەری ئەوەی تیرە كە لە ناوچە سوورەكە بچەقێت چەندە؟

**نمـــوونـــه** 5

**جێبەجێکردنەکانی**

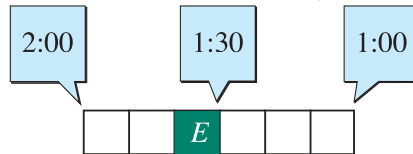
بژمێر

**شەماڵ ڕۆژانە سەیری پۆستە ئەلکترۆنییەکەی دەکات لە نێوان کاتژمێر یەک 1:00 و کاتژمێر دوو 2:00 ی پاش نیوەڕۆ ئەگەری ئەوەی لە نێوان 1:30 و 1:40 بەو کارە هەستێت چەندە؟**

**شیکار**

بۆشایی نموونە لەهەرساتێکی نێوان کاتژمێر 1:00و 2:00 پێکدێت و ڕووداوەکە لە 1:30 تا 1:40 بۆ هەژمێرکردنی ڕێژەی ئەگەری ئەو ڕووداوە، ماوەی نێوان کاتژمێر 1:00و 2:00 دابەش دەکەیت بۆچەند ماوەیەك کە هەریەکەیان 10 خولەك بێت

(درێژی ماوەی نێوان 1:30 و 1:40 کەڕووداوەکە دەنوێنێت ).




ماوە سەوزەکە ڕووداوەکە دەنوێنێت. ئەگەری ڕوودانی ڕووداوەکە، واتا، ماوەیەك لە 6 ماوە واتە:

$$P(E) = \frac{1}{6} = 0.167 = 16.7\%$$

کاتێك $E$ هێمایەك بێت بۆ ڕووداوەکە

(سەیرکردنی شەماڵ بۆ پۆستە ئەلکترۆنییەکەی لە 1:30 بۆ 1:40)

**هەوڵبدە** ئەگەری ئەوەی لە نێوان 1:30 و 1:35 بەو کارە هەستێت چەندە؟

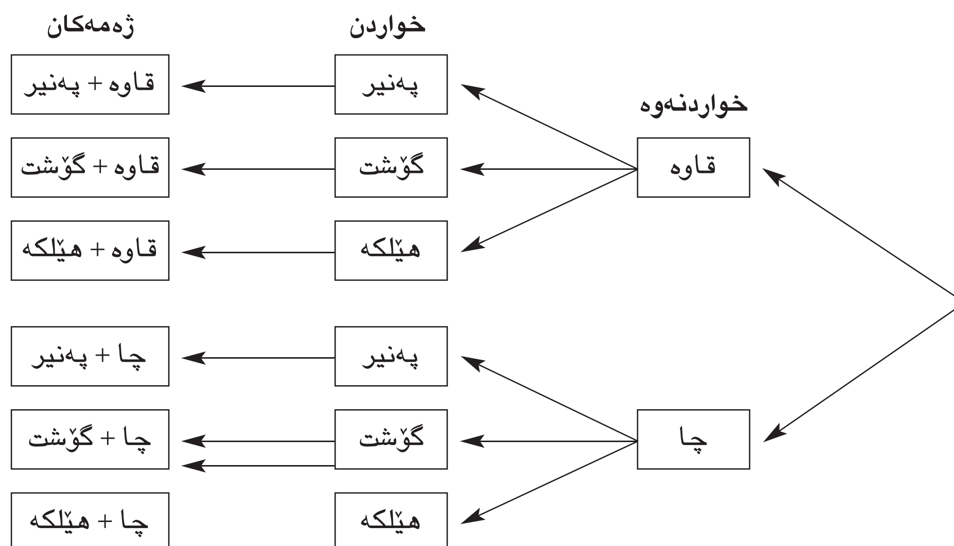
## یاسای بنەڕەتی ژماردن Fundamental Counting Principle

کە لە ڕووداوێك دەکۆڵێتەوە بۆ ئەوەی ڕێژەی ئەگەرەکەی هەژمێربکەی پێویستت بەمانە دەبێت:

**1.** هەموو ئەم ئەنجامانەی کە لە توانادایە بژمێرە (دانەکانی بۆشایی نموونە بنووسە).

**2.** ئەو ئەنجامانە بژمێرە کە پاسادانی ڕووداوەکە دەکات. دەتوانیت هێڵکاری درەختی بەکاربهێنیت بۆ ئەنجامدانی ئەم کارە.

بۆ نموونە ژەمی خواردنی بەیانی لە یەکێك لە ئوتێلەکاندا، میوانەکە دەتوانێت لە نێوان قاوە وچای یەکێکیان هەڵبژێرێت و لە نێوان سێ جۆری خواردن پەنیر و گۆشت و هێلکەدا یەکێك هەڵبژێریت. ئەم هێڵکارییەی خوارەوە هەموو ڕێگاکانی کە لە توانادا یە بۆ ژەمی خواردنی بەیانی ڕووندەکاتەوە .



## چالاكی

## Exploring Tree Diagram دۆزینەوەی هێڵکاری درەختی

خواردنگەیەك دوو جۆر خواردنی بۆ میوانەكانی ئامادەكرد بۆ ژەمی ئێوارە هەر ژەمێك پێكهاتبوو لە قاپێك زەڵاتە و قاپێك گۆشت، میوانەكە بۆی هەیە یەك جۆر لەدوو جۆر زەڵاتە هەڵبژێرێت: زەڵاتەی كاهو، زەڵاتەی تەماتە، قاپە گۆشتەكە سێ جۆرە: گۆشتی برژاو، گۆشتی سورەوەكراو، گۆشتی مریشك

1. دەستبكە بەكێشانی هێڵكاری درەختی تێیدا هەڵبژاردنی زەڵاتە ڕوونبكەوە بەم شێوەیە

زەڵاتەی كاهو
زەڵاتەی تەماتە

2. لە دەستپێكردنی هەڵبژاردنی زەڵاتەكەوە هێڵكاری درەختی ڕوونبكەوە بۆ هەڵبژاردنەكانی سێ جۆرە گۆشتەكە.
3. ئەو ژەمانەی كەپێكدەهێنرێت كامانەن؟ ژمارەیان چەندە؟
4. خواردنگەكە ئێستا پیازی برژاو یان سیری برژاو دەخاتە سەر قاپی گۆشتەكە تۆش ئەمە بخەرەسەر هێلكاری درەختەكە كە ڕێگا بە ژماردنی ئەم ژەمە خۆراكییانەی كە ئێستا دروستبوون، ئەو ژمارەیە چەندە؟

خاڵی چاودێری

خاڵی چاودێری

هێڵكارییەكی درەختی دروستبكە بۆ نموونەی پێشوو. بەبێ گوێدانە خستنەڕووی خاڵی چوارەم. بە قاپی گۆشت دەستپێبكە وەك هەڵبژاردنی یەكەم. ئایا ئەم گۆڕانكارییە لەڕیزكردنی دوو هەڵبژاردنەكە كاری كردە سەر گۆڕانی ئەنجامەكان؟
وردبوونەوە لە هێڵكاری درەختی وزانینی ڕێگای دروستكردنی دەبێتە هۆی ڕوونكردنەوەی یاسای ژماردنی بنەڕەتی.

### Fundamental Counting Principle یاسای بنەڕەتی ژماردن

ئەگەر $m$ ڕێگا بۆ هەڵبژاردنی یەكەم و $n$ ڕێگا بۆ هەڵبژاردنی دووەم هەبێت ئەوا $m \times n$ ڕێگا بۆ هەردوو هەڵبژادنەكە بەیەكەوە هەیە.

### نموونە 6

جێبەجێكردنەكانی
بژمێر

دانا ویستی وشەی نهێنی تایبەتی چوونە ناو ئینتەرنێت هەڵبژێرێت. ئەم وشەیە پێكدێت لە دوو پیت لە پیتەكانی ئەبجەدی ئینگلیزی بەدوایدا چوار ڕەنووس. دانا دەتوانێ چەند وشەی نهێنی دروستبكات ئەگەر زانیت كەوا ناتوانێت پیتی O و ڕەنووسی سفر بەكاربهێنێت؟(ژمارەی پیتەكانی ئەبجەدی ئینگلیزی 26 پیتە)

**شیكار**

دانا دەتوانێت هەرپیتێك لە نێوان 25 پیت هەڵبژێرێت و هەر ڕەنووسێك لە نێوان 9 ڕەنووس هەڵبژێرێت. بەجێبەجێكردنی یاسای بنەڕەتی ژماردن ئەمەی خوارەوەمان دەست دەكەوێت ;

| | پیتی یەكەم | پیتی دووەم | ڕەنووسی یەكەم | ڕەنووسی دووەم | ڕەنووسی سێیەم | ڕەنووسی چوارەم |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ژمارەی وشە نهێنییەكان ← | 25 × | 25 × | 9 × | 9 × | 9 × | 9 |

$$25^2 \times 9^4 = 41\ 00\ 625$$

**نموونـــــــه** 7

تابلۆی ئۆتۆمبێلەکان پێکدێن لە سێ پیت بەدوایدا لە سێ ڕەنووس دێت. ئەگەری ئەوەی پیتەکانی تابلۆی ئۆتۆمبیلەکە پێکبێت لە پیتەکانی یەکەمی ناوی سیانی خۆت بەڕیز ( ژمارەی پیتەکانی ئەبجەدی عەرەبی 28 پیتە) چەندە؟

**شیکار**

دانەکانی بۆشایی نموونەکە:

| پیتی یەکەم | پیتی دووەم | پیتی سێیەم | ڕەنووسی یەکەم | ڕەنووسی دووەم | ڕەنووسی سێیەم |
|---|---|---|---|---|---|
| 28 × | 28 × | 28 × | 10 × | 10 × | 10 |

ژمارەی تابلۆکانی لەتوانادایە دەبێتە $28^3 \times 10^3 = 21\ 252\ 000$ تابلۆ.

پاشان ژمارەی ئەو تابلۆیانە بدۆزەرەوەکە مەرجەکە دێنێتەدی.

| پیتی یەکەم | پیتی دووەم | پیتی سێیەم | ڕەنووسی یەکەم | ڕەنووسی دووەم | ڕەنووسی سێیەم |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 × | 1 × | 1 × | 10 × | 10 × | 10 |

بەمەش ژمارەی تابلۆکانی مەرجەکە دێننەدی بریتین لە $10^3 = 1\ 000$ تابلۆ.

ئەگەری ئەوەی پیتەکانی تابلۆی ئۆتۆمبێلەکە پێکبێت لە پیتەکانی یەکەمی ناوی سیانیت بەڕیز

بریتییە لە: $\frac{1000}{21\ 952\ 000} = 0.000045$ واتە 45 لە ملیۆنێك.

**جێبەجێکردنەکانی**

بازرگانی

# ڕاهێـــــــنـــــــان

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 سێ نموونە لەسەر ڕووداوێك بهێنەوە کە ئەنجامەکانیان وەك یەك نەبن.

2 ئەگەری تیۆری وئەگەری تاقیکردنەوە لە چیدا لێکدەچن؟ لە چیدا جیاوازن؟

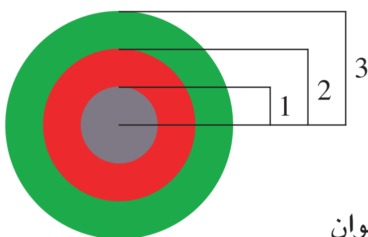
3 چۆن ڕووبەرەکان بەکار دەهێنرێت بۆ هەژمارکردنی ئەگەرەکان؟

4 چۆن هێڵکاری درەختی یارمەتیت دەدات بۆ تێگەیشتنی یاسای ژماردنی بنەڕەتی؟

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو



5 دارا گۆیەکی شوشەیی لە تورەگەیەك ڕاکێشا کە 5 گۆی شین و 3 گۆی سوور و یەك گۆی سپی تێدایە. ئەگەری ئەوەی کە گۆی ڕاکێشراو سوور بێت چەندە؟




6 ڕێژین تیریکی گرتە تابلۆیەکی تەختەی ڕەنگراوی هەڵواسراو لە سەر دیوارێك. ئەگەری ئەوە بدۆزەوە کەتیرەکە لەناوچەی بازنە بچووکەکە بچەقێت؟

7 ئاکام ڕۆژانە سەیری پۆستی ئەلیکترۆنیەکەی دەکات لە نێوان کاتژمێر حەوت و کاتژمێر هەشتی بەیانی. ئەگەری ئەوەی ئەم کارە لە نێوان 7:30 و 7:45 ئەنجام بدات چەندە؟

8 ڕەوەز ویستی وشە نهێنیە تایبەتییەکەی هەڵبژێریت بوچوونە ناو ئینتەرنێتەوە، ئەم وشە پێکدێت لە 3 پیت لە پیتەکانی ئەبجەدی ئینگلیزی و سێ ڕەنووسی بەدوایيدا بێت. چەند وشەی نهێنی دەتوانیت پێکبهێنێت، ئەگەر بزانی ناتوانێت پیتی O و ڕەنووسی 0 بەکاربهێنێت.

## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

**تورەگەیەك 3 پلێتی سپی و دوو پلێتی ڕەش و 5 پلێتی سووری تێدایە هەموویان هاوشێوەن و زانا پلێتێکی ڕاکێشا. ئەگەری ئەو پلێتە ڕاکێشراوە بدۆزەوە بۆ ئەوەی.**

9 سپی بێت
10 ڕەش بێت
11 سوور بێت

**ئەگەر بەردەزارێك یەك جار هەڵبدرێت ئەگەری ئەم ڕووداوانەی خوارەوە بدۆزەوە.**

12 دەستکەوتنی ژمارە 1
13 دەستکەوتنی ژمارە 4 .
14 دەستکەوتنی ژمارەی جووت
15 دەستکەوتنی ژمارەی تاك.
16 دەستکەوتنی ژمارەی بچووکتر لە3 .
17 دەستکەوتنی ژمارەی گەورەتر لە 3 .
18 دەستکەوتنی ژمارەی گەورەتر لە 6 .
19 دەستکەوتنی ژمارەی بچووکتر لە 7 .

**پاسی گواستنەوە دەگاتە شوێنی ڕاوەستانی تەنیشت ماڵی دانا لە نێوان کاتژمێر هەشت و 5 خولەکی بەیانی. ئەگەری ئەوەی کە دانا سواری پاسەکە بێت کاتی گەیشتە شوێنی وەستان لەم کاتانەی خوارەوەدا بدۆزەوە.**

20 8:04
21 8:02
22 8:01
23 8:03

**لە دوو پرسیاری 4224 و 25 هێڵکاری درەختی دروستبکە بۆ ئەوەی بۆشایی نموونەی ڕووداوەکە ڕوونبکاتەوە.**

24 تۆمارکرن لە چالاکییەکانی دەرەکییەکان (یەك چالاکی لە هەریەك لە چەشنەکانی (1,2,3

**وەرزش** : تۆپی پێ، تۆپی سەبەتە، تۆپی سەرمێز.

**هونەر** : مۆسیقا، وێنە.

**یانە** : زانست، بیرکاری

25 ئارەزووەکان (خولیاکان) ( ئارەزوویەك لە هەر یەکە لە دوو چەشنی A ، B )

**لەناوماڵ** : خوێندنەوە، سەیرکردنی تەلەفزیۆن، گوێگرتن لە مۆسیقا.

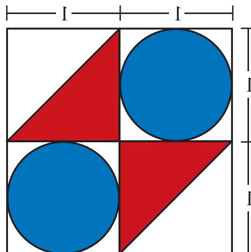
**لە دەرەوەی ماڵ**: ڕاکردن، گەشتکردن، چوونە یانە.

**ژمارەی وشە نهێنیەکان کە دەتوانرێت پێکبهێنرێن بەبەکارهێنانی هەموو پیتەکانی ئەبجەدی ئینگلیزی و هەموو ڕەنووسەکان لە هەریەك لەم بارانەی خوارەوە دیاریبکە.**

26 دوو ڕەنووس بەدوایيدا سێ پیت و بەدوای ئەوانە یەك ڕەنووس بێت.
27 سێ ڕەنوس بەدوایيدا دوو پیت و بەدوای ئەوان یەك ڕەنووس بێت.
28 سێ پیتی جیاواز بەدوایيدا سێ ڕەنووسی جیاواز بێت.
29 دوو پیت بەدوایيدا چوار ڕەنووس بێت.

**بەستنەوە**

**ئەندازە** کامەران تیرێکی هەڵدا بۆ سەر تابلۆیەکی تەختەیی ڕەنگکراو کەلەم وێنەیەدا ڕوونکراوەتەوە. ئەگەری هەریەك لەم ڕووداوانە هەژمێربکە.



**30** تیرەکە ناوچەیەکی بازنەیی بپێکێت.

**31** تیرەکە یەکێك لە دوو سێگۆشە سوورەکە بپێکێت.

**32** تیرەکە یەکێك لە دوو سێگۆشە سپییەکە بپێکێت.

**بەرەنگاری**

**33** تیرەکە ناوچەیەکی سپی بپێکێت.

**جێبەجێکردنەکان**

**دیمۆگرافیا** ئەم خشتەیەی خوارەوە چەند خوێندکارێکی تۆمارکراو لە یەکێك لە کۆلێژەکانی زانکۆیەك بە پێی تەمەن و ڕەگەزیان پێشاندەدات.

| تەمەن | هاتووەکان | هاوڵاتی |
|---|---|---|
| 14 – 17 | 83 | 93 |
| 18 – 19 | 1 224 | 1 416 |
| 20 – 21 | 1 294 | 1 414 |
| 22 – 24 | 1 260 | 1 263 |
| 25 – 29 | 950 | 1 058 |
| 30 – 34 | 661 | 811 |
| 35 و سەروتر | 955 | 1 824 |

**ڕاگری کۆلێژ هەستا بە هەڵبژاردنی یەکێك لە تۆمارکراوەکان. ئەگەری ئەوەی تەمەنی ئەو کەسە لە یەکێك لەم چەشنانە بێت چەندە؟**

**34** 18 – 24 **35** 25 – 29 **36** 30 – 34 **37** 30 بەرەوژوور

**38** **ئاسایش** یەکێك لە پسپۆرەکانی ئاسایش ویستی کلیلێك دروستبکات بۆیەکێك لە سیستمەکانی ئاسایش ئەم کلیلە لە سێ پیت پێکدێت $C$ ،$B$ ،$A$ لە تواناداپە هەریەکێك لەم پیتانە زیاتر لە جارێك دوبارەببێتەوە، ئەو پسپۆرە ویستی ئەگەری سەرکەوتنی هەوڵەکانی کردنەوەی کلیلەکە لە 0.001 کەمتر بێت، کەمترین ژمارەی پیتەکانی ئەو کلیلە دەگاتە چەند؟

## ڕوانین بۆ دواوە

پلەی هەریەك لەم ڕادەدارانە چەندە؟

**39** $x^3+4x^5-6x^2+x-10$

**40** $x+3x^5$

هەریەك لەم هاوكێشە و لاسەنگەیە شیكاربكە.

**41** $x^3-2x^2-x+2=0$

**42** $x^2-3x+2>0$

**جێبەجێكردنەكانی**

**ئابووری**

**43** پیشەسازكارێك وایدانا نەخشەی $C(x)=0.1x^2+5x+40$ نموونەیەك بۆ تێچوونی كاڵاكانی پێكدەهێنێت. هێمای $x$ لەم نەخشەیەدا ئاماژەیە بۆ ژمارەی یەكەكانی بەرهەم هێنان و هێمای $C$ بۆ تێچوونی بەرهەمەكەیە. تێچوونی بەرهەمهێنانی 10 كاڵا چەندە؟ لەبارێكی تردا پیشەسازكارەكە بڕیاریدا بەرهەمەكە بفرۆشێت بە 60 هەزار دینار بۆ هەر دانەیەك. دەبێت چەند ژمارە لەو كاڵایانە بفرۆشێت بۆ ئەوەی گەورەترین قازانجی دەستبكەوێت؟

## ڕوانین بۆ پێشەوە

**44** سامان ویستی دوو پیت لەم پیتانە هەڵبژێرێت $E$، $D$، $C$، $B$ $A$ ژمارەی شیكارەكانی لە توانادا چەندە؟ئەگەر سامان گرنگی بدات بە ڕیزكردن لەكاتی ڕاكێشان ( شیكاری $B$، $A$ وەك شیكاری $A$، $B$ نیە).

ئەگەر سامان بایەخ نەدات بەڕێزكردن ( هەردوو شیكار $A$، $B$ و $B$، $A$ هەمان شیكارە).

# وانەی 2

# گۆڕینەکان و ڕیزکردنەکان

## Permutations and Arrangements



**بۆچی؟**
لێرەدا زۆر بار هەیە بایەخ دەدات بە ڕێکخستنی ژمارەیەک لەدانە دیاریکراوەکانی کۆمەڵەیەک بە شێوەیەکی ڕێزکراو.

**ئامانجەکان**

- شیکارکردنی ئەو پرسیارانەی کە پێویستی بە گۆڕینەکان هەیە. و دیاریکردنی ژمارەی گۆڕینەکانی کۆمەڵەیەک کە لە $n$ دانە پێکهاتووە دیاردەکات.
- شیکارکردنی ئەو پرسیارانەی کە پێویستیان بە ڕیزکردن هەیە ودیاریکردنی هەموو ڕیزکراوەکانی $m$ دانەیە لە $n$ .

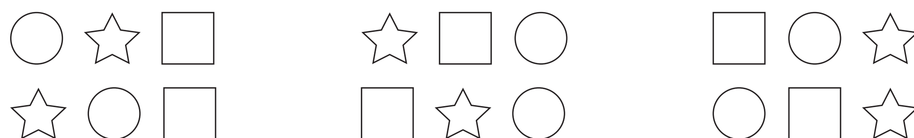
ئەرنۆلد شوینبرگ مۆسیقایەکی داهێنا کە لە 12 ئاواز پێکهاتووە. پێویستە هەر نۆتەیەك لە نۆتەکانی پەیژەی مۆسیقی بە لایەنی کەمەوە یەك جار بەکاربێت، پێش لەرینەوەی هەر یەکێکیان. بەهەر کۆمەڵەیەك لە 12 ئاوازەکە دەوترێت **ئاوازە دێر Tone Row**. چەند ئاوازە دێری جیاواز دەتوانیت بنووسی؟

## گۆڕینەکان Permutations

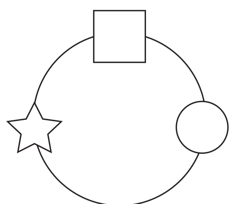
گۆڕین ڕێکخستنی ژمارەیەك شتە لە ڕیزکردنێکی دیاریکراودا.

**نموونە 1** هەموو گۆڕینەکانی ئەم شتانە بکێشە ☆ ○ □

**شیکار**



دەتوانیت شتەکان لە سەر هێڵێك ڕێکخەیت وەك نموونەکەی پێشوو.
و دەتوانیت ڕێکیان بخەیت لەسەر بازنەیەك وەك ئەم وێنەیە.
ڕێکخستنی شتەکان لە باری یەکەمدا گۆڕینێکی هێڵییە و لەباری دووەمدا گۆڕینێکی بازنەییە.



## نموونە 2

**شیکارکردنی پرسیارەکان**

**دروستکردنی لیستی ڕێکخراو:** ئەم خشتەی خوارەوە هەموو ئەو گۆڕینانەی لە توانادایە بۆ پیتە لاتینیەکان $D$ ،$C$ ،$B$ ،$A$ ڕوونەدەکاتەوە چۆن یاسای ژماردنی بنچینە بەکاردێنێت بۆ دۆزینەوەی ژمارەی ئەم گۆڕینانە؟

| | | | |
|---|---|---|---|
| $DABC$ | $CABD$ | $BACD$ | $ABCD$ |
| $DACB$ | $CADB$ | $BADC$ | $ABDC$ |
| $DBAC$ | $CBAD$ | $BCAD$ | $ACBD$ |
| $DBCA$ | $CBDA$ | $BCDA$ | $ACDB$ |
| $DCAB$ | $CDAB$ | $BDAC$ | $ADBC$ |
| $DCBA$ | $CDBA$ | $BDCA$ | $ADCB$ |

**شیکار**

دەتوانیت ژمارەی ئەو گۆڕینانە دیاریبکەیت بە بەکارهێنانی یاسای بنەڕەتی ژماردن وەك لە خوارەوە ڕوونکراوەتەوە

| دەتوانرێت پیتی چوارەم هەڵبژێرێت لە | دەتوانرێت پیتی سێیەم هەڵبژێرێت لە | دەتوانرێت پیتی دووەم هەڵبژێرێت لە | دەتوانرێت پیتی یەکەم هەڵبژێرێت لە |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |

ژمارەی گۆڕینەکان بریتییە لە $4\times3\times2\times1=24$ گۆڕین.

بۆ دەربرینێکی پوختە بۆ ئەم لێکدانە ئەمە: $4!=4\times3\times2\times1=24$ بەکاربێنە

**لێکدراوی $n$ factorial $n$**

ئەگەر $n$ ژمارەیەکی تەواوی نا سالیب بێت. ئەوا لێکدراوی $n$ بە $n!$ دەنووسرێت وەدەکاتە:

$$n!=\begin{cases}1 & \text{کە } n=0 \\ 1\times2\times\ldots\times n & \text{کە } n>0\end{cases}$$

## نموونە 3

ڕاستی و دۆستی وڕەوەز بەشداریانکرد لە یاری بازداندا، بۆشایی نموونە بۆ ئەم یارییە دیاریبکە؟ژمارەیان چەندە؟ئەگەری ئەوەی ڕەوەز یەکەم بێت چەندە؟

**شیکار**

ئەو ئەنجامامەی لە توانادایە لەم یارییەدا:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ڕەوەز | ڕەوەز | دۆستی | دۆستی | ڕاستی | ڕاستی | یەکەم |
| دۆستی | ڕاستی | ڕەوەز | ڕاستی | ڕەوەز | دۆستی | دووەم |
| ڕاستی | دۆستی | ڕاستی | ڕەوەز | دۆستی | ڕەوەز | سێیەم |

ژمارەی ئەنجامەکانی لەتوانادایە دەکاتە 6 .

ژمارەی ئەو ئەنجامانەی کە پاسادانی ڕووداوەکە دەکات (ڕەوەز یەکەم بێت) دووە. ئەگەری ئەوەی کە ڕەوەز یەکەم بێت $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=0.3333=33.33\%$

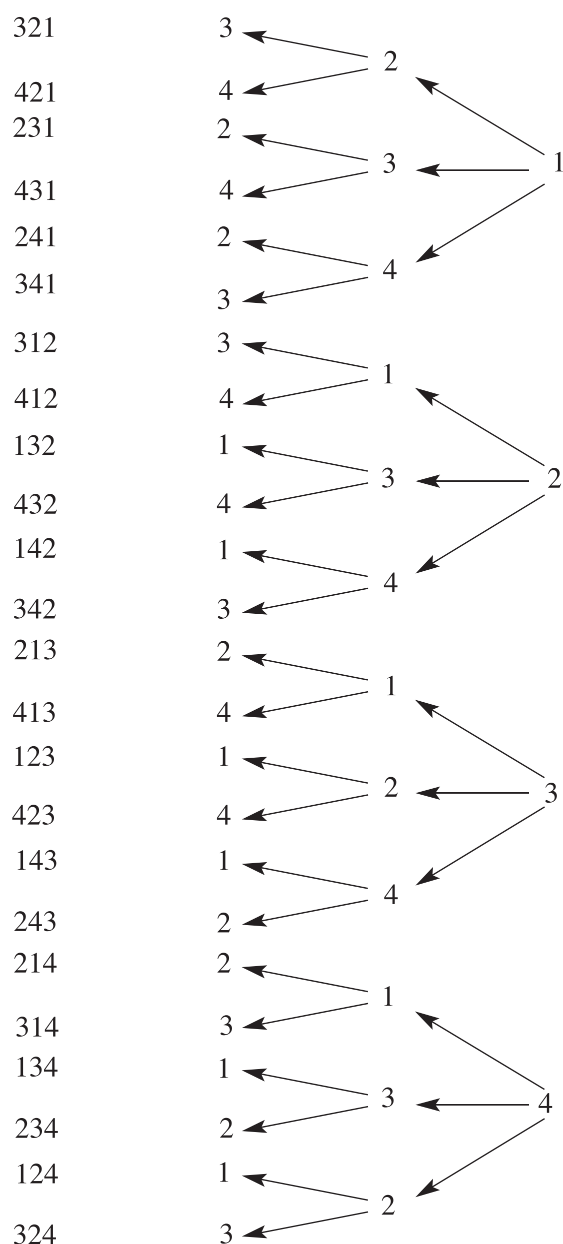
**هەوڵبدە** دەتوانیت چەند ژمارەی 4 ڕەنووسی پێکبهێنیت بەبەکارهێنانی ڕەنووسەکانی 1، 2، 3، 4 بەبێ دووبارەبونەوە؟ ئەو ژمارانە بنووسە.

**نمـــوونـــه** 4 **دەتوانیت چەند ژمارەی 3 ڕەنوسی پێکبهێنیت بەبەکارهێنانی ڕەنووسەکانی 1، 2، 3، 4 بەبێ دوبارەبوونەوە؟ ئەو ژمارانە بنووسە؟**

**شیکار**

هێڵکاری درەختی بەکاربهێنە. ئەم هێڵکارییە درەختییەی خوارەوە هەموو ئەو هەڵبژاردنانەی کە لە توانادا هەیە ڕووندەکاتەوە بۆ هەڵبژاردنی ڕەنووسی یەکان لە دواییدا ڕەنووسی دەیان، پاشان ڕەنووسی سەدان. و هەروەها ژمارەکەش دیاریدەکات لەهەر بارێکدا.

دەتوانی 24 ژمارە پێکبهێنیت کە لە 3 ڕەنوس پێکهاتبێت بەبەکارهێنانی ڕەنووسەکانی 1، 2، 3، 4، بەبێ دووبارەبوونەوە




**هەوڵبدە** دەتوانیت چەند ژمارەی 4 ڕەنووسی پێکبێنیت بەبەکارهێنانی ڕەنووسی1، 2، 3، 4، 5، بەبێ دووبارەبوونەوە؟

ئەوەی پێی هەڵسایت لە نموونەی پێشوو دەتوانین بڵێین 3 ڕەنووست ڕێکخست لە 4 ڕەنووسەکانی 1, 2, 3, 4 ئەوەی تۆ دەستتکەوت بریتییە لە ریزکردنەکانی 3 شت لە 4 شتی بنەڕەتی، بۆ دەستکەوتنی ژمارەی ئەم ریزکردنانە یاسای ژماردنی بنەڕەتی بەکاربێنە.

| دەتوانرێ ڕەنووسی یەکان هەڵبژێرێ لە | | دەتوانرێ ڕەنووسی دەیان هەڵبژێرێ لە | | دەتوانرێ ڕەنووسی سەدان هەڵبژێرێ لە |
|---|---|---|---|---|
| 4 | × | 3 | × | 2 |

بەمەش ژمارەی ڕیزکردنەکان دەبێتە $4 \times 3 \times 2 = 24$ .

نموونە 5

جێبەجێکردنەکانی

مۆسیقا

باوکی ئاڵان 10 C.D موسیقای بە دیاری دایە کورەکەی. ئاڵان ویستی گوێ لە سێیانیان بگرێت یەك لەدوای یەك. ئایا ئاڵان چەند هەڵبژاردنی هەیە؟



شیکار

ئاڵان دەتوانێ پەپکی یەکەم هەڵبژێرێت لە 10 پەپك، دووەم لە 9 پەپك، و سێیەم لە 8 پەپك. ئەگەر ئاڵان یاسای ژماردنی بنەڕەتی بەکاربهێنێت دەبینێت کە: $10 \times 9 \times 8 = 720$ هەڵبژاردنی هەیە.

هەوڵبدە

شێرزاد 5 ڕۆمانی کری بۆ ئەوەی سێیانیان بخوێنێتەوە یەك بەدوای یەك لە پشووی هاویندا. شێرزاد بەچەند ڕێگا دەتوانێت ئەم کارە ئەنجام بدات؟

**Arrangements of *n* Objects Taken *r* at a Times ژمارەی ریزکردنەکانی *r* شت لە *n* شتی بنەڕەتی**

ژمارەی ریزکردنەکانی $r$ شت لە $n$ شتی بنەڕەتی کاتی $r \leq n$ بریتییە لە $P(n, r) = {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

نموونە 6

**شیلان ویستی 4 پەرتووك لە کتێبخانەکەیدا دابنێ کە لە 10 ڕەفە پێکهاتبوو بەمەرجێك لە یەك کتێب زیاتر لە ڕەفەیەکدا دانەنێت. شیلان بە چەند ڕێگا دەتوانێت ئەم کارە ئەنجام بدات.**

شیکار

پرسیارەکە دەگەڕێتەوە بۆ ریزکردنی 4 ڕەفە لە بنەڕەتی 10 .شیلان ڕەفەی یەکەم لە 10 ،و دووەم لە 9 ، و سێیەم لە 8 ، و چوارەم لە 7 هەڵدەبژێرێت بەمەش ژمارەی ڕێگاکان دەبێتە $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$ .

هەوڵبدە

ئاکام 8 قوتووی ڕەنووسکراو و 5 گۆی ڕەنگاوڕەنگی جیاوازی هەیە. ویستی گۆیەکان بخاتە ناو چەند قوتوویەکەوە بەمەرجێك لە گۆیەك زیاتر لە قوتوویەکدا نەبێت. چەند ڕێگای هەیە؟

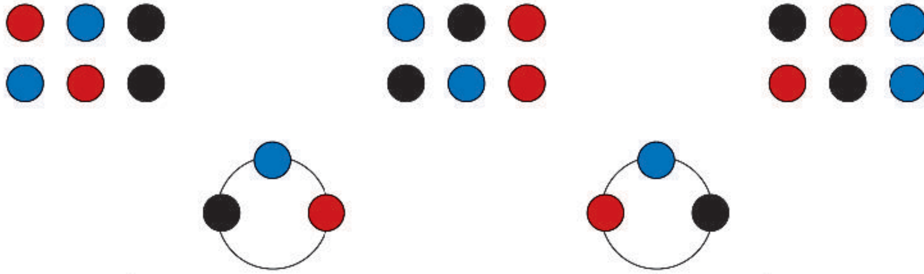
## Circular Permutations گۆڕینەکانی بازنەیی

نموونە 7

لە باخچەکەی ڕووناکدا 3 کورسی هەیە: شین وسوور و ڕەش. ڕووناك ویستی ئەو کورسییانە بەریز لە دەوری مێزێکی بازنەیی دابنێ **چەند ڕێگای هەیە؟ ژمارەیان چەندە؟**

**شیکار**

ئەگەر سەرنجی گۆڕینە هێلییەکانی سێ کورسیەکە بدەیت ئەمەی خوارەوەت دەستدەکەوێت



تێبینی بکە کە گۆڕینە هێلییەکان لە ڕیزی یەکەمدا ( شین، سوور، ڕەش) یەك گۆڕینی بازنەیی پێکهێناوە. و گۆڕینەکان لە ڕیزی دووەم ( شین، ڕەش، سوور) یەك گۆڕینی بازنەیی پێکهێناوە.
کەواتە ڕووناك دوو ڕێگای هەیە بۆ دانانی کورسیەکان بە دەوری مێزەکەدا.

**هەوڵبدە** چەند ڕێگات هەیە بۆ ڕیزکردنی 4 جۆر لە خواردنی سورەوەکراو لە قاپێکی بازنەییدا؟

# ڕاهێـــــــنـــــــان

## بەردەوامبوون لەبیرکاریدا

**1** چۆن یاسای بنەڕەتی ژماردن یارمەتیت دەدات بۆ دیاریکردنی ژمارەی گۆڕینەکان بۆ چوار شت؟

**2** چۆن یاسای ژماردنی بنەڕەتی یارمەتی دەدات بۆ دیاریکردنی ژمارەی ڕێزکردنەکانی چوار شت لە بنەڕەتی پێنج شت؟

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

**3** چەند ژمارە دەتوانی بنووسی بەبەکارهێنانی شەش ڕەنووس بەبێ دووبارەبونەوە؟

**4** چەند ڕێگات هەیە بۆ بینینی 3 شریتی ڤیدیۆ یەك بەدوای یەك لە بنەڕەتی حەوت شریت؟

**5** چەند ڕێگا هەیە بۆ دانشتنی 12 کەس دابنیشێت بەدەوری مێزێکی بازنەیی بۆ خواردنی نانی ئێوارە.

**هەژمێربکە**

**6** $7! - 5$ **7** $6! - 4!$ **8** $(7-5)!$ **9** $(6-4)!$

**10** $\frac{8!}{5! \times 3!}$ **11** $\frac{10!}{4! \times 6!}$ **12** $\frac{0! \times 5!}{(4-1)!}$ **13** $\frac{3! \times (7-2)!}{0!}$

## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

**ناز 8 ڕەنووسی هەیە دەتوانێت، چەند ژمارە پێکبهێنێت بە، بەکارهێنانی ڕەنووسەکان بەبێ دووبارەبونەوە لەم بارانەی خوارەوەدا.**

**14** لە 5 ڕەنووس **15** لە 3 ڕەنووس **16** لە 4 ڕەنووس

**17** لە 6 ڕەنووس **18** لە یەك ڕەنووس **19** لە 8 ڕەنووس

**جێبەجێکردنەکان**

**کارگێڕی دەزگاکان** یەکێك لە کۆمپانیاکان پێشوازی لە 8 کارمەندی تازەکرد. ژمارەی ڕێگاکانی دابەشکردنیان بەسەر پۆستەبەتاڵەکان دیاریبکە لە هەر بارێك لەم بارانەدا:

20 X<¤Ä 8 21 X<¤Ä 9 22 X<¤Ä 10 23 X<¤Ä 15

24 vJ¦e0î ñ<Wì †UJ! g|U/ ËU"WÙ ÈWJK|ËUÇ ñ¤3 7 v¶fi|Ë WJK|ËUÇ vJ¦ñUOÅËd ã
ÊU0ïœdëe|ñ ¤! W|WÙ U~¦ñ bïWÇ v|Wï"U!

25 7 Wì †UJ§|ñU|œ „W|…ñUî¸ vïUë…bïWîñUë Wì p¦bïWîñUë ñWÙ ¤! v¶fi|Ë ÊUëU0ïUáî¤ë Wì p0ëW|
ñWÙ Èdï«u"…œ vïe! ñWÖWz ¨W|«œUï«u" Wì Wë…bïWÇ ÊUëW"UNJ0Ä È…ñUî¸ v§"UNJ0Ä ” Ëuï…ñ
ø…ËWïËu!…ñU!ËËœ v! …bïWÇ ÊU|…ñUî¸ ÈdM0N!ñUëW! 9 U" dH< vïUëW<Ëuï…ñ …œ

26 X¦d~!¤8 Wì 3 U" 1vïUëW<Ëuï…ñ Wë †UJ! X<Ëñœ ñ«bK0î vJ08ñWÇ v¶fi|Ë ñUÖ“ñ
øW<Ëuï…ñ v< ËWz vM0<Ëuï ¤! W|WÙ ÈU~¦ñ bïWÇ ÊUfiëW| vÅW! 3 W! œdë ÈWëW8ñWÇ

Ë«b|d0

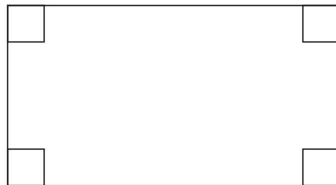
WïU|U~¦ñ ËWz È…ñUî¸ X¦dï…œ ËUï vïUë…ñW< vïUëW¶0Ä vïUM0ÙñUëW!W! ôbïWÇ ñU3 ñË“ …“«bïWz
∫WïU¶0Ä ÂWz vM0N!ñUëW! W! vOM!ËUï …Ë…ñ«u8 ÈWïU|ôbïWÇ ÂWì „W|ô bïWÇ Èdï«u"…œ Wë WJ§|ñU|œ
A, B, C, D, E, F

27 WÅ¤~0< 28 ôñ«uÇ 29 öÅWÅ 30 ö°M0Ä

ÈœJ03W§03

31 ‘“ñ…Ë 7 ZïWÖ …bïWÇ ÊUë…Ë«d! vïUëWïœdëe|ñ È…ñUî¸ «bJ0ïœdë«ñ Wì œdë ÊU|ñ«bÅW! ZïWÖ
ø©ÂW| v< ¨Â…ËËœ ¨ÂWëW|®

## …Ë«Ëœ ¤! 5ï«Ëñ



32 v|WA0ëô vJ0ï¤"ñUë WÇñUÄ W˜üuÖ ÊUëUÙW! ÈñWÄËWz
v¶fi|Ë 36cm ÈWëW00ïUÄ ¨48cm ÈWëW|ó¦ñœ W|WÙ
ñW<Wì X0! …Ëdë …Ë…ñW< Wì †UJ§¶<Ëñœ vì vëW|Ëu"uè
Wì „Ëuâ! ÈWÅ¤ÖñuÇ 4 vM|d!W! V|ñW" WA0ëô È…u0Å
Èó|ñœ …ËWï«dM0¶Åuï ÊUëW|ô «b0|«Ëœ Wì ¨«b|Wë…ñW< ñ«uÇ
È…ËWz ¤! ¨X0! bïWÇ X0!…œ WëWÅuÖñuÇ ÈWë…Ë«d!ô
øX0!WÙ È…ñU!Wè s|d"…ñËWÖ Wë…Ëu"uè

33 p0ëW| W!ñ«œUÖUz ® WJ! ñUJ0Å W0|…ËWJ0Ä W|WA0ëËUÙ ËËœ ÂWz
©W0ï v˙0Ù ÈWA0ëËUÙ ÊUëWA0ëËUÙ Wì

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ 3x - y = -11 \end{cases}$$

## ËWA0Ä ¤! 5ï«Ëñ

34 bïWÇ ñW<W! ÊœdJ0ÅW!«œ WëWìu8 Èñ‹J¦ñ ¨œdë ÊU0|ñ«bÅW! «b0Ä vÅ¤" vJ0ìu8 Wì WïU| 6
øX0M0N§J0Ä X0ï«u"…œ W˜Wî¤ë bïWÇ Ëu§"UNJ0Ä WïU| ËËœ Wì „W|W˜Wî¤ë ñWÙ «bëW|W˜Wî¤ë

وانەی 3

# گونجێنەکان

# Combinations



**بۆچی؟**

گونجێنەکان رۆڵێکی گرنگی هەیە لە ژیاندا. بۆ نموونە رێگا دەدات بە هەژمارکردنی ژمارەی ئەو تیپانەی پێکدێت لە 3 خوێندکار لە خوێندکارەکانی پۆلی دەیەم.

**ئامانجەکان**

- ئەو پرسیارانە شیکار دەکات کە گونجێنی تێدایە. هەموو گونجێنەکانی $r$ دانە لە $n$ دانە دیاریدەکات.
- ئەو پرسیارانە شیکاردەکات کە پەیوەندی نێوان گۆڕێن و گونجێنی تێدایە.

لەبیرت بێت کە ریزکردن بریتییە لە رێکخستنی $r$ شت لە بنەڕەتی $n$ شت لە ریزکردنێکی دیاریکراودا. ئەگەر لە رێکخستنەکەدا هیچ گرنگیەك نەدرا بەریزکردن. ئەوەی دەستمان دەکەوێت پێی دەڵێین گونجێن. گونجێنی $r$ دانە لە بنەڕەتی $n$ دانە بریتییە لە کۆمەڵەیەك کە پێکدێت لە $r$ دانە لە بنەڕەتی $n$ دانە.

ئەگەر ئەم ژمارانەت هەبێت، 1، 2، 3، 4، 5، ژمارەکانی 2، 3، 5 گونجێنی 3 دانە لە بنەڕەتی 5دانە پێکدێنێت. سەرنجبدە کە ژمارەکانی 3، 2، 5 هەمان گونجێن پێکدێنێت بە پێچەوانەی ریزکردنەکەوە.

**نموونە 1**

یانەیەکی وەرزشی هەڵبژاردنێکی نهێنی سازدا بۆ هەڵبژاردنی لیژنەیەکی کارگێڕی کە پێکدێت لە سەرۆك و یاریدەدەری سەرۆك و ڕازگر و بەرپرسی دارایی و بەرپرسی پەیوەندییەکان. لە نێوان 7 پاڵێوراودا. بۆ وەرگرتنی لیژنەی کارگێڕی یانەکە، چەند لیژنە دەتوانرێ پێکبهێنرێت؟

**جێبەجێکردنەکانی وەرزش**

| هەڵبژاردنی بەرپرسی پەیوەندیەکان لە | | هەڵبژاردنی بەرپرسی دارایی لە | | هەڵبژاردنی ڕازگر لە | | هەڵبژاردنی یاریدەدەری سەرۆك لە | | هەڵبژاردنی سەرۆك لە |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | × | 4 | × | 5 | × | 6 | × | 7 |

$$7\times6\times5\times4\times3=\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1}=\frac{7!}{2!}=\frac{7!}{(7-5)!}=2520$$

**نموونە 2**

یانە وەرزشییەکە رێگای هەڵبژاردنی لیژنەی کارگێڕی گۆڕی بەمەرجێك هەر ئەندامێك لە ئەندامەکان بۆی هەبێت 5 هەڵبژێراو لە حەوت هەڵبژێرێت، بۆ دروستبوونی لیژنەی کارگێڕی بێ دیاریکردنی کاری هەریەکەیان، بۆئەوەی ئەندامانی لیژنە هەڵبژێراوەکە خۆیان کارەکان دابەشبکەن.

## شیکاری پرسیارەکان

أ بەچەند ڕێگا دەتوانرێ پێنج ئەندامە هەڵبژێراوەکە لەنێوان خۆیاندا کارەکانیان دابەشبکەن؟

ب چەند لێژنەی سەرپەرشتی ئەندامەکان دەتوانن پێکیبهێنن بەڕێگای هەڵبژاردنە تازەکە.

### شیکار

أ ژمارەی ڕێگاکان بریتییە لە ژمارەی گۆڕینەکانی کۆمەڵەی 5 دانەییەکە کە دەکاتە

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$

ب یاسای ژماردنی بنەڕەتی بەکاربێنە

ژمارەی لێژنە پێکهاتوەکان = ژمارەی لێژنە هەڵبژێراوەکان × ژمارەی گۆڕینەکانی هەموو لیژنەکە 2520 = ژمارەی لێژنە هەڵبژێراوەکان × 120

ژمارەی لێژنەکان کەدەتوانین هەڵیانبژێرین. $\frac{2520}{120} = 21$ واتا 21 لیژنە.

## چالاکی

## بەراوردکردنی ڕیزکردنەکان و گونجێنەکان Comparing Arrangements and Combinations

یەکێك لە یانەکان یارییەکی سازکرد لە نێوان ئەندامەکانی بەم شێوەیەی خوارەوە.

- یاریکەر 3 ڕەنووس لە دە ڕەنووس ( لە 0 تا 9 ) هەڵدەبژێرێت و لەسەر بۆردەکە دەینووسێت.
- یاریکەر 3 گۆی ڕەنووسکراو لە 0 تا 9 لە تورەگەیەك ڕادەکێشێت یەك لەدواییەك.
- بۆ ئەوەی یاریکەرەکە ببباتەوە پێویستە ڕەنووسە نووسراوەکان لەسەر بۆردەکە بەهەمان ڕیز ڕابکێشێت.

1. ئارام ڕەنووسەکانی 8، 4، 1 ی هەڵبژارد یەکبەدواییەك. ئەو ئەنجامانەی کە دەبنە هۆی بردنەوەی چین؟
2. ڕێکخەری یارییەکە ڕێساکەی گۆڕی بۆ ئەوەی یاریکەرەکە بباتەوە مەرجی دانا، ئەویش بە ڕاکێشانی سێ ڕەنووسەکە بەبێ بایەخدان بەڕیزکردن.ئارام یاریەکەی دووبارەکردەوە و سوور بوو لەسەر ڕەنووسەکانی خۆی، ئەو ئەنجامانە چین کە دەبێتە هۆی بردنەوەی؟
3. کام دوو یاری گەورەترین بەختیان هەیە بۆ یاریکەرەکە: یەکەم یان دووەم؟هۆی وەڵامەکەت دیاربیکە.

خاڵی چاودێری ✓

### گونجێنی r شت لە بنەڕەتی n شت Combinations of n Objects Taken r at a Time

ژمارەی گونجێنەکانی $r$ شت لە بنەڕەتی $n$ شت کاتێك $r \leq n$ بریتییە لە $C(n, r) = {}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

بەرەنگاری پەیوەندی نێوان ${}_nP_r$، ${}_nC_r$ چییە؟

## نموونە 3

ئاکام پێویستە 3 پەرداخ لە 5 پەرداخ هەڵبژێرێت کە ئاوی ئەم میوانەی تیدایە: لیمۆ، سێو، ترێ، مۆز، ئەناناس. چەند ڕێگای هەیە بۆ ئەم کردارە؟

**جێبەجێکردنەکانی**
بازرگانی

**شیکار**

دەتوانی پەرداخی یەکەم لە 5 پەرداخ و دووەم لە 4 پەرداخ و سێیەم لە 3 پەرداخ هەڵدەبژێرێت. بەڵام هەڵبژاردنی ئاوی لیمۆ و ئاوی مۆز و ئاوی ترێ هیچ جیاوازیەکی نییە لە هەڵبژاردنی ئاوی مۆز و ئاوی ترێ و ئاوی لیمۆ. واتە ڕیزکردن هیچ بایەخێکی نییە لێرەدا ئەمە ئەوە دەگەیەنێت کە ژمارەی ئەو ڕێگایانەی لەبەردەم ئاکام دایە بریتییە لە ڕیزکردنی 3 لە 5 دابەشبێت لەسەر گۆڕینی 3 شت واتە:

$$\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=\frac{5!}{(5-3)!}\div3!=\frac{5!}{3!\,(5-3)!}=10$$

**هەوڵبدە**

ئاکام چەند هەڵبژاردنی هەیە ئەگەر وا پێویست بوو 4 پەرداخ هەڵبژێرێت؟

**هزرێکی ڕەخنەگرانە**

کامیان گەورەترە: ژمارەی ڕیزکردنی 3 لە 5 یان ژمارەی گونجێنەکانی 3 لە 5 ؟

لە دوو نموونەکەی پێشوو ئەوەمان دەستدەکەوێت کە پەیوەندیەك هەیە لە نێوان ژمارەی ڕیزەیتی $r$ شت لە بنەڕەتی $n$ شت و ژمارەی گونجێنی $r$ شت لە بنەڕەتی $n$ شت.

**پەیوەندی لە نیوان ڕیزکردنەکان و گونجێنەکاندا**
**Relation Between Arrangements and Combinations**

ژمارەی ڕیزکردنەکان $r$ شت لە بنەڕەتی $n$ شت = ژمارەی گونجێنەکانی $r$ شت لە بنەڕەتی $n$ شت × ژمارەی ڕیزکردنەکان $r$ شت.

## نموونە 4

لە شیکارکردنی پرسیارێکدا، زۆر جار پێویستیمان بە هەڵبژاردنی شێوازێکی گونجاو دەبێت: ڕیزکردنەکان یان گونجێن.

**شێوازێکی گونجاو دیاریبکە بۆ هەریەك لەمانەو لە دواییدا ژمارەکانی هەژمێربکە.**

أ چەند ڕێگا هەیە بۆ هەڵبژاردنی سەرۆك و یاریدەدەری سەرۆك و ڕازگر لە 5 هەڵبژێراو؟

ب چەند ڕێگا هەیە بۆ هەڵبژاردنی لێژنەیەکی 3 ئەندامی لە 5 هەڵبژێراو.

**شیکار**

أ شێوازەکە لێرەدا شێوازی ڕیزکردنەکانە. چونکە داواکراو هەڵبژاردنی کەسێکە بۆ سەرۆك و ئەوی تریان بۆ یاریدەدەری سەرۆك و سێیەمیان بۆ ڕازگر. $\frac{5!}{(5-3)!}=5\times4\times3=60$

ب شێوازەکە لێرەدا شێوازی گونجێنەکانە چونکە داواکراو کۆمەڵەیەکە لە 3 کەس پێکهاتووە.ژمارەی ڕێگاکان $_5C_3=\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!\,(5-3)!}=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10$

**هەوڵبدە**

چەند ڕێگا هەیە بۆ هەڵبژاردنی لێژنەیەکی دوو کەسی لە نێوان 7 کەسدا؟ چەند ڕێگا هەیە بۆ هەڵبژاردنی سەرۆك و یاریدەدەر لە ئەندامەکانی لیژنەیەك کە لە 7 کەس پێکهاتووە؟

## بەکارهێنانی گونجێنەکان لەهەژمێرکردنی ئەگەرەکان
## Using Combinations in Probability

## نموونە 5

**گێلاس دوو گۆی لە تورەگەیەك راکێشا 5 گۆی سوور و 3 گۆی شینی تێدابوو، ئەگەری ئەوەی دوو گۆ ڕاکێشراوەکە سووربن چەندە؟**

**شیکار**

ئەم ئەگەرە یەکسانە بەڕێژەی ژمارەی ئەو بارانەی کەدوو گۆیە ڕاکێشراوەکە سوور بن بۆ ژمارەی

دانەکانی کۆمەڵەی ئەنجام ( بۆشایی نموونە). ژمارەی یەکەم ژمارەی گونجێنی 2 بۆ 5 ودووەم ژمارەی گونجێنی 2 بۆ 8. ژمارەی یەکەم $_5C_2 = \binom{5}{2} = \frac{5\times4}{2\times1} = 10$ ،ژمارەی دووەم $_8C_2 = \frac{8\times7}{2\times1} = 28$ ئەگەری ئەوەی دوو گۆیەکە سوور بن.

$$\frac{10}{28} = 0.3\ 571 = 35.71\%$$

**هەوڵبدە** ئەگەری ئەوەی دوو گۆیەکە دوو ڕەنگی جیاواز بن چەندە؟

# ڕاهێـــــــنـــان

## بەردەوامبوون لەبیرکاریدا

1 جیاوازی نێوان ریزکردنەکان و گونجێنەکان ڕوونبکەوە. بەنموونەیەك زیاتر ڕوونیبکەوە.

2 پەیوەندی چییە لە نێوان ریزکردنی 5 لە بنەڕەتی 7 و گونجێنی 5 لە بنەڕەتی 7 ؟ئەو پەیوەندیە بنووسە. و ژمارەی گونجێنی 5 لە بنەڕەتی 7 هەژمێربکە؟

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

3 چەند ڕێگا دەکرێت سەرۆك و یاریدەدەری سەرۆك و ڕازگر لە نێوان ئەندامەکانی لێژنەیەکی 6 کەسی هەڵبژێردرێت؟

4 چەند ڕێگا دەکرێت 3 پەرتووك و 4 شریتی مۆسیقا لە هاوڕێیەکت کە 9 پەرتووك و 7 شریتی هەبێت وەربگری؟

## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ئەمانە هەژمێربکە:

5 $_7C_4$

6 $_8C_4$

7 $_{10}C_7$

8 $_9C_5$

9 $_9C_1$

10 $_{11}C_1$

11 $_{15}C_{15}$

12 $_{12}C_{12}$

13 $\frac{6!}{2!\times4!}\times\frac{5!}{4!\times1!}$

14 $\frac{4!}{3!\times1!}\times\frac{9!}{4!\times5!}$

15 $\frac{_6C_5\times{}_{15}C_2}{_{21}C_7}$

16 $\frac{_{14}C_5\times{}_9C_7}{_{23}C_{12}}$

چەند لێژنە دەتوانری پێکبهێنرێت لە هەر یەکێك لەم بارانەی خوارەوەدا.

17 3 ئەندام لە 5 پاڵێوراو

18 7 ئەندام لە 8 پاڵێوراو

19 8 ئەندام لە 12 پاڵێوراو

20 6 ئەندام لە 10 پاڵێوراو

تورەگەیەك 5 گۆی سپی و 3 گۆی سەوزی تێدایە ئەگەری ئەم ڕاکێشانانە چین؟

21 دوو گۆی جیاواز لە ڕەنگدا.

22 3 گۆ دووانیان سەوز و سێیەم سپی بێت

**23** 4 گۆ دووانیان سپی و دووانیان سەوز بن **24** 5 گۆ سێیان سەوز ودووانیان سپی بێت.

**لە پرسیاری 25-28 ڕێگای شیکاری هەریەك لەم بارانە دیاریبکە. «ڕیزکردن یان گونجێن».**

**25** هەڵبژاردنی 4 پەرتووك بۆ بڵاوکردنەوە لە بنەڕەتی کۆمەڵە پەرتووکێك کە ژمارەیان 302 پەرتووکە.

**26** هەڵبژاردنی 9 یاریکەر لە15 یاریکەر بۆ پێکهێنانی تیپێکی سەبەتە.

**27** هەڵبژاردنی چوار پاڵێوراو لە 200 بۆ وەرگرتنی پاداشت لە 100 هەزار دینار و 200 هەزار دینار و 500 هەزار دینار، و ملیۆنێك دینار.

**28** هەڵبژاردنی سەرۆك و یاریدەدەری سەرۆك بۆ سەندیکایەك کە 100 ئەندامی تێدایە.

**جێبەجێکردنەکان**

**29** **پزیشکی** لە توێژینەوەیەکی نەخۆشییەکانی دڵدا. یەکێك لە توێژەرەوەکان سامپڵێکی هەڵبژارد لە 5 کەس لە نێوان 10 کەس کە وەرزشی ڕاکردنیان ئەنجامدەدا. و15کەس ئەم وەرزشەیان نەدەکرد.

أ ژمارەی ئەو پێکهاتانەی لەتوانادایە چەندە؟

ب ژمارەی ئەو پێکهاتانەی پێکدێت لە 3 کەس لەوانەی ئەو وەرزشە دەکەن چەندە؟

ج ئەگەری ئەوەی لە نێوان ئەو پێنج پێکهاتانە تەنها 3 یان ئەم وەرزشە بکەن چەندە؟



## ڕوانین بۆ دواوە

**ئەم برانە بە سادەترین شێوە بنووسە.**

**30** $\frac{x}{x+1}+\frac{1}{x^2-1}$ **31** $\frac{2}{x(x-2)}-\frac{x}{x^2-4}$

**ئەم هاوکێشانە شیکاربکە:**

**32** $\sqrt{x+4}=2$

**33** $\sqrt{x-1}=3\sqrt{x-2}$

**34** $\sqrt{-x}=4\sqrt{-x-2}$

## ڕوانین بۆ پێشەوە

**35** بەمەبەستی ناونانی ئەندامەکانی نوسینگەی یانەی بروسك. 5 ناو بە تیروپشك ڕاکێشرا لە نێوان ناوی 8 پاڵێوراو کە پێکهاتبوو لە 8 ئەندامی شەرەف و 22 ئەندامی کارا.

أ ئەگەری ئەوەی پێنج ناوەکە ئەندامانی شەرەف بن چەندە؟

ب ئەگەری ئەوەی 4 ناو لە پێنج ناوەکە ئەندامەکانی شەرەف بن چەندە؟

ج ئەگەری ئەوەی لە نێوان پێنج ناوەکە 3 ناویان بەلایەنی کەمەوە ئەندامانی شەرەف بن چەندە؟

وانەی

4

# کۆکردنەوەی ئەگەرەکان

## Adding Probabilities



بۆچی؟

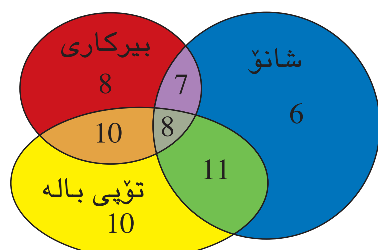
دەتوانیت کرداری کۆکردنەوە بەکاربهێنێت بۆ هەژمێرکردنی ئەگەری ڕووداانی دوو ڕووداو یان زیاتر.

**ئامانجەکان**

- ئەگەری دووڕووداوی جیا هەژماردەکات.
- ئەگەری دوو ڕووداو جیانەبن هەژماردەکات.
- ئەگەری دژە ڕووداو هەژماردەکات.

جێبەجێکردنەکان

بۆ خۆشی




لە ئامادەیی ڕزگاریدا سێ جۆر یانە هەیە. یانەی شانۆ لە 32 ئەندام پێکهاتووە و یانەی بیرکاری لە 33 ئەندام پێکهاتووە ویانەی تۆپی باڵە لە 39 ئەندام پێکهاتووە. هەندێ لە خوێندکاران سەر بەیانەیەك زیاترن هەروەك لەم هێڵکاریەی بەرامبەرت ڕوونکراوەتەوە بەڕێوەبەر یەکێك لە ئەندامەکانی یانەکانی بەشێوەیەکی ڕەمەکی هەڵبژارد. ئەگەری ئەوەی ئەو خوێندکارە ئەندام بێت بە لایەکی کەمەوە لە دوو یانە چەندە؟ هەندێ

لە ڕووداوەکان جیان ئەگەر یەکێکیان ڕوویدا ئەوا ئەوانی تر ڕوونادەن. ئەگەر زارێك هەڵبدەین ئەو دوو ڕووداوی (دەستکەوتنی ژمارەی تاك) و ( دەستکەوتنی ژمارەی جووت) دوو ڕووداوی جیان.

بەپێچەوانەی ئەوە دوو ڕووداوی ( دەستکەوتنی ژمارەی جووت ) و ( دەستکەوتنی ژمارەی کەمتر لە 3 )دوو ڕوداوی جیانین چونکە دەستکەوتنی 2 پاسادانی هەردوو ڕووداوکە بەیەکەوە دەکات.

### چالاكی

**دۆزینەوەی ئەگەری ڕووداانی دوو ڕووداو** — **Exploring Two-Events Probability**

لەمەودوا پێویستیت بە دوو بەردەزاری ڕەنگاورەنگی جیاواز دەبێت.

1. خشتەی خوارەوە بنووسەوە پاشان تەواوی بکە. بەهەڵدانی دوو بەردەزار 10 جار. لەگەڵ وەرگرتنی ئەو دوو ژمارەیەی لەسەر هەردوو ڕووی سەرەوەی دوو بەردەزارەکە دەردەکەوێت.

| هەڵدان | بەردەزاری یەکەم | بەردەزاری دووەم | سەرجەم | ئەنجامی لێکدان |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| ⋮ | | | | |

2. ئەم خشتەیەی بەرامبەرت تەواوبکە بەسوود وەرگرتن لە خشتەی نموونەی یەکەم و ئەگەری ڕوودانی هەر ڕووداوێك لەم ڕوودانە ڕوونبکەوە.

| | أ | ب | ج |
|---|---|---|---|
| $P(A)$ | | | |
| $P(B)$ | | | |
| $P(A \cup B)$ | | | |
| $P(A)+P(B)$ | | | |

أ لەم بارەدا $A$ : «ڕووداوێکە ژمارەی 6 لەسەر ڕووی زاری یەکەم دەرکەوێت» و $B$ «ڕووداوێکە ژمارە 3 لەسەر ڕووی زاری یەکەم دەردەکەوێت».

ب لەم بارەدا $A$ :«ڕووداویکە. لەسەر ڕووی زاری یەکەم 6 دەرکەوێت» و $B$ : «ڕووداوێکە کۆی ژمارەی سەر هەردوو زارەکە 7 بێت».

ج لەم بارەدا $A$ لەسەر ڕووی زاری یەکەم ئەو ژمارەیەی دەرکەوت بچوکترە لە 5 و $B$ ڕووداوێکە (ئەنجامی لێکدانی دوو ژمارەی سەر دوو زارەکە گەورەترە لە 5 ).

3. بە پشت بەستن بەو ئەنجامانەی دەستتکەوتووە ئایا $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ؟ لە چ بارێکدا ئەم پەیوەندیە ڕاستە؟

خاڵی چاودێری ✓

بۆ ئەوەی زیاتر هەستبکەیت بە ئاشکرایی جیاوازی نێوان ڕووداوە جیاکان و ڕووداوە ناجیاکان سەرەنجی ئەمانەی خوارەوە بدە.

**دوو ڕووداوی جیا**

$A$ = دەستکەوتنی ژمارەی جووت

$P(A) = \frac{3}{6}$

$B$ = دەستکەوتنی ژمارە 3

$P(B) = \frac{1}{6}$

بڕوانە $A \cap B = \varnothing$ وە $P(A \cap B) = 0$

$P(A \cup B) = \frac{4}{6}$

لەبەرئەوەی دوو ڕووداوەکە جیان. ئەگەری ڕووداوی $A \cup B$ یەکسانە بە کۆی ئەگەری هەردوو ڕووداوەکە

$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

**دوو ڕووداوی ناجیا**

$A$ = دەستکەوتنی ژمارەی جووت

$P(A) = \frac{3}{6}$

$C$ = دەستکەوتنی ژمارە 4

$P(C) = \frac{1}{6}$

بڕوانە $A \cap B \neq \varnothing$ ، $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

$P(A \cup C) = \frac{3}{6}$

لەبەرئەوەی دوو ڕووداوەکە جیانین.پێویستە ئەگەری ڕووداوی $A \cap C$ لە کۆی ئەگەری دوو ڕووداوەکە دەربکەین.

$P(A \cup C) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

**ئەگەری ڕووداوی $A$ یان $B$** — **Probability of $A$ or $B$**

$A$ ، $B$ دوو ڕووداوی هەمان تاقیکردنەوەی ڕەمەکین

ئەگەر $A$ و $B$ جیابن ئەوا: $P(A \text{ یان } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

ئەگەر $A$ و $B$ جیانەبن ئەوا: $P(A \text{ یان } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

خاڵی چاودێری ✓

کام لە دوو ڕێسایەی پێشوو بۆ هەموو بارەکان بەکاردێت؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

نموونە 1

جێبەجێکردن
ئامار

لە ڕاپرسییەکدا بۆ ڕای گشتی لەبارەی نوێکردنەوەی شێوازە پەروەردەییەکان. نموونەیەك کە لە 100 هاوڵاتی پێکهاتبوون پرسیاریان ئاراستەکرا. ئەم خشتەیەی بەرامبەرت ئەنجامی ئەم ڕاپرسییە ڕووندەکاتەوە

| | نێر | مێ | سەرجەم |
|---|---|---|---|
| لەگەڵ | 18 | 9 | 27 |
| دژ | 12 | 25 | 37 |
| بێ ڕا | 20 | 16 | 36 |
| سەرجەم | 50 | 50 | 100 |

یەکێك لەوانەی ڕاپرسییەکەیان ئاراستەکردبوو وبەشێوەیەکی هەڕەمەکی هەڵبژێرا. ئەگەری ئەوەی ئەو هاوڵاتییە دژی نوێخوازیی بێت یان هیچ ڕایەکی نەبێت چەندە؟

شیکار

هەردوو ڕووداوی ( دژ ) و ( بێڕا ) دوو ڕوداوی جیان. لێرەدا ئەوەی هەمانە

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{37}{100} + \frac{36}{100} = \frac{73}{100} = 73\%$$

نموونە 2

ئەگەری ئەوەی ئەو کەسەی هەڵبژێراوە بە هەڕەمەکی نێربێت یان لەوانە بێت کە دژی نوێخوازی بێت چەندە؟

شیکار

هەردوو ڕووداوی ( نێر ) و ( دژ ) دوو ڕووداوی جیانین

$$P(\text{نێر یان دژ}) = P(\text{نێر}) + P(\text{دژ}) - P(\text{نێر و دژ})$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{50}{100} + \frac{37}{100} - \frac{12}{100} = \frac{75}{100} = 75\%$$

هەوڵبدە ئەگەری ئەوەی ئەو کەسەی هەڵبژێراوە بە هەڕەمەکی مێ بێت یان لەوانەبێت کە (بێڕا)ن چەندە؟

## دژە ڕووداو Probability of an Event

ئەگەر بگەڕێینەوە بۆ نموونەکەی پێشوو. دوو ڕووداوی ( دژ ) و ( لەگەڵ یان بێڕا ) تەنها دوو ڕووداوی جیانین. بەڵکو ڕوونەدانی یەکێکیان واتە ڕوودانی ئەوی تریان لەم بارەدا هەریەکێکیان دژی ئەوەی تریانە **Complement**. بەشێوەیەکی گشتی: دەڵێین ڕووداوی $B$ دژی ڕووداوی $A$ دەبێت کاتێك دوو ڕووداوەکە جیابن ویەکێکیان بە دڵنیاییەوە ڕووبدات.

**ئەگەری دژە (تەواوکەری) ڕووداو Probability of the Complement**

ئەگەر ڕووداوی $B$ دژە ڕووداوی $A$ بێت ئەوا.

$$P(A) = 1 - P(B) \qquad P(B) = 1 - P(A) \qquad P(A) + P(B) = 1$$

بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە ئەو هۆیە چییە کە ڕێگات پێدەدات بە نووسینی $P(A) + P(B) = 1$ کاتێك دوو ڕووداوی $A$ و $B$ تەواوکەری یەکترین.

نموونە 3

جێبەجێکردنەکان
بۆ خۆشی

بە گەڕانەوە بۆ ئەو پرسیارەی کە لە سەرەتای وانەدا باسکرا. ئەگەری ئەوەی ئەو خوێندکارەی بەهەڕەمەکی هەڵبژێرا ئەندام بێت بەلایەنی کەمەوە لە دوو یانەدا چەندە؟

شیکار

ڕووداوی ( ئەندام لە یەك یانەدا) تەواوکەری ڕووداوی ( ئەندام بەلایەنی کەمەوە لە دوو یانەدا ).

کەواتە p ( ئەندام تەنیا لەیەك یانە ) = 1 − p ( ئەندام لە دوو یانەدا بەلایەکی کەمەوە )

$$P(A)=1-P(B)=1-\frac{6+8+10}{60}=\frac{36}{60}=0.6=60\%$$

**هەوڵبدە** ئەگەری ئەوەی ئەو خوێندکارەی بەڕەمەکی هەڵبژێرا ئەندام بێت لە دوو یانەدا چەندە؟

# ڕاهێنــــــــــان

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 نموونەیەك بێنەوە بۆ دوو ڕووداوی جیا، ویەکێکی تر بۆ دوو ڕووداوکە جیانەبن.

2 تەواوکەری ڕووداوی ئەم ڕووداوە چییە: «دەستکەوتنی 1 یان 2 » لە کاتی هەڵدانی بەردەزارێکدا

3 چۆن ئەگەری ئەم ڕووداوە هەژمێردەکەیت: « دەستکەوتنی ژمارەی تاك یان 3 » لە هەڵدانی بەردەزارێکدا؟

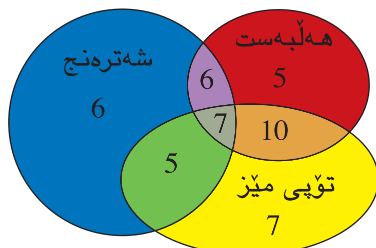
## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

**ئەنجامەکانی ڕاپرسی بۆ نویکردنەوەی شێوازی پەروردەیی بکاربهێنە بۆ شیکارکردنی هەردوو پرسیاری 4 و5 .**

4 ئەگەری ئەو کەسەی بەڕەمەکی هەڵبژێرا ڕای هەبێت چەندە ؟

5 ئەگەری ئەوەی ئەو کەسەی بە هەرەمەکی هەڵبژێرا نێر بێت یان لەوانە نەبێت کە لەگەڵ نوێخوازی بێت چەندە ؟

6 لە دواناوەندییەکدا سێ یانە هەیە: یانەی شەترەنج 24 ئەندامی هەیە و یانەی تۆپی سەرمێز 29 ئەندامی هەیە و یانەی هەڵبەست 28 ئەندامی هەیە، هەندێ لە خوێندکارەکان سەربەیانەیەك زیاترن. هەروەك لەم هێڵکارییەی بەرامبەردا ڕوونکراوەتەوە. بەڕێوەبەر ئەندامێکی ئەم یانەی بەڕەمەکی هەڵبژارد. ئەگەری ئەوەی ئەو خوێندکارە بەلایەنی زۆرەوە ئەندام بێت لە دوو یانەدا چەندە؟




## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

**هەڵۆ بەردەزارێکی هەڵدا. ئەگەری دەستکەوتنی ئەم ڕوداوانە چەندە؟**

7 5 یان 6 ؟

8 1 یان 4 ؟

9 ژمارەی جووت یان3 ؟

10 ژمارەی تاك یان 2 ؟

11 1 یان ژمارەیەك بچوكتر لە 4؟

12 6 یان ژمارەیەك گەورەتر لە 2 ؟

13 ژمارەیەك بێجگە لە یەك؟

14 ژمارەیەك جووت نەبێت؟

15 ژمارەیەکی جووت یان تاك؟

**جێبەجێکردنەکان**

**ئەم خشتەیە ئەنجامەکانی هەڵدانی دوو بەردەزار ڕوونەدکاتەوە. لە پرسیاری 16 تا 18 خشتەکە بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی ئەوەی کە دوو ڕووداوەکە جیان، و بۆ دۆزینەوە ئەگەری ڕووداوە ئاوێتەکە**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (6 ;1) | (5 ;1) | (4 ;1) | (3 ;1) | (2 ;1) | (1 ;1) |
| (6 ;2) | (5 ;2) | (4 ;2) | (3 ;2) | (2 ;2) | (1 ;2) |
| (6 ;3) | (5 ;3) | (4 ;3) | (3 ;3) | (2 ;3) | (1 ;3) |
| (6 ;4) | (5 ;4) | (4 ;4) | (3 ;4) | (2 ;4) | (1 ;4) |
| (6 ;5) | (5 ;5) | (4 ;5) | (3 ;5) | (2 ;5) | (1 ;5) |
| (6 ;6) | (5 ;6) | (4 ;6) | (3 ;6) | (2 ;6) | (1 ;6) |

16 دەستکەوتنی سەرجەمێك یەکسان بێت بە 2 یان دەستکەوتنی سەرجەمێك یەکسان بێت بە 4 .

17 دەستکەوتنی سەرجەمێك گەورەتربێت لە 2 یان دەستکەوتنی سەرجەمی گەورەتربێت لە 6 .

18 دەستکەوتنی سەرجەمێك بچوکتربێت لە 3 یان دەستکەوتنی سەرجەمێك بچوکتربێت لە 10 .

19 چەند ژمارەی تەواو لە 1 تا 600 هەیە کە توانای دابەشبوونی هەیە بەسەر 2 یان 3 دا ؟ ئەگەری ئەوەی ئەو ژمارەی کە بە هەڕەمەکی هەڵبژێراوە لە نێوان 1 تا 600 و توانای دابەشبوونی نیە بەسەر 2 و 3 دا چەندە؟

20 چەند ژمارەی تەواو لە 1 تا 500 3 هەیە کە توانای دابەشبوونی هەیە بەسەر 5 یان 7 دا ؟ ئەگەری ئەوەی ئەو ژمارەی بە هەڕەمەکی هەڵبژێراوە لە نێوان 1 تا 500 3 و توانای دابەشبوونی نەبێت بەسەر 5 و 7 دا چەندە؟

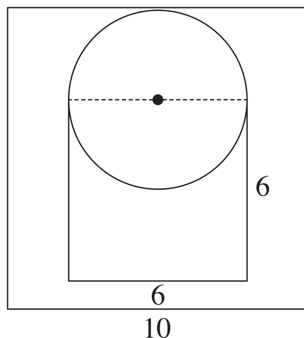
**لە پرسیاری 21–26 ئەگەری تەواوکەری ڕووداوی هەریەك لەم ئەگەرانەی خوارەوە بدۆزەوە.**

21 $\frac{1}{3}$ 22 $\frac{4}{11}$ 23 0.782

24 0.324 25 0 26 1

**بەستنەوە**

**ئەندازە** ئالآن تیرەکەی بۆ سەر چوارگۆشە گەورەکە هەڵدا. ئەگەری ئەوەی ئەو تیرە کە هەریەك لەمانەی خوارەوە بپێکێت چەندە.




27 بازنەکە؟

28 چوارگۆشە بچووکەکە؟

29 چوارگۆشە بچووکەکە بە مەرجێك ئەو بەشەی تێدانەبێت کە هاوبەشە لەگەڵ بازنەکە؟

30 ناوچەی هاوبەش لە نێوان بازنە و چوارگۆشە بچووکەکە یان بازنەکە؟

31 چوارگۆشە بچووکەکە یان بازنەکە؟

**جێبەجێکردن**

32 **چاودێری جۆری** سندوقێك 35 پارچەی یەدەگی ئۆتۆمبیلی تێدایە، 8 پارچەیان باش نییە، یەکێك لە پشکێنەرانی فەرمانگەی چاودێری جۆری هەستا بەوەرگرتنی 5 پارچە بۆ پشکنینیان. ئەگەری ئەوەی یەکێك لەم پارچانە باش نەبێت چەندە؟

## ڕوانین بۆ دواوە

**ئەمانە بەرێگای ڕوونکردنەوە شیکاریکە لە ڕووتەختی پۆتاندا.**

33 $3 < x < 8$ 34 $-14 \le x \le -2$ 35 $-1 < y < 3$

**ئەم برانە شیتەڵبکە.**

36 $x^2 - x - 42$ 37 $3x^2 - 16x - 12$ 38 $81x^2 + 18x + 1$

## ڕوانین بۆ پێشەوە

39 تورەگەیەك4 گۆی سووری تێدایە ڕەنوسکراون لە 1 تا 4 و 4 گۆی شینی تێدایە ڕەنوسکراون لە 1 تا 4 ، و 4 گۆی سەوزی ڕەنووسکراو لە 1 تا 4. ڕزگار گۆیەکی ڕاکێشا ئەگەری ئەوەی گۆیەکە ژمارە 1 هەڵگربێت چەندە؟ ڕزگار گۆیەکەی گەڕاندەوە بۆ تورەگەکە. ئەم جارەیان گۆیەکی تری ڕاکێشا سوور بوو. ئایا گۆڕانکاری بەسەر ئەگەری ئەوەی کە گۆیەکە هەڵگری ژمارەی 1 بێت چەندە؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەرەوە.

# ڕووداوە سەربەخۆییەکان
## Independent Events



وانەی 5

**ئامانجەکان**

- هەژمێری ئەگەری ڕوودانی دوو ڕووداوی سەربەخۆ یان زیاتر دەکات

**بۆچی؟** دەتوانیت یاسای ئەگەری دووڕوداوی سەربەخۆ بەکاربهێنێت بۆ دۆزینەوەی گەلێك لە ئەگەرە گرنگەکان. نموونە بۆ ئەوە ئەگەری ئەوەی کە دوو خوێندکار لە پۆلێکدا لەیەك ڕۆژدا لە دایك بووبن.

پۆلی دەیەم 35 خوێندکار دەگرێتەوە، ئەگەری ئەوەی دوو خوێندکار لەوانە بەلایەنی کەمەوە لەیەك مانگ ولە یەك ڕۆژدا لە دایك بووبن چەندە!

بۆ ئەوەی وەلامی ئەم پرسیارە بدەیتەوە، پێویستە بزانیت چۆن جیاوازی دەکەیت لە نێوان ڕووداوە سەربەخۆیەکان و ڕووداوە بەیەکبەستراوەکان و چۆن هەژمێری ئەگەری ڕوودانی دوو ڕووداوی سەربەخۆ دەکەیت. ئەمەت لەم چالاکییەی خوارەوە بۆ ڕووندەبێتەوە.

### چالاکی

### دۆزینەوەی ڕووداوە سەربەخۆیەکان — Exploring Independent Events

کامەران پارچە دراوێکی کانزایی و بەردەزارێکی هەڵدا.

**1.** هێمای $A$ دابنێ بۆ ڕووداوی: « دەستکەوتنی شێر » لەکاتی هەڵدانی پارچە پارەکە، ئەگەری ئەم ڕووداوە چەندە $P(A)$ ؟ ×

**2.** هێمای $C$ دابنێ بۆ ڕوداوی: « دەستکەوتنی ژمارە 3 » لەکاتی هەڵدانی زارەکە ئەگەری ئەم ڕووداوە چەندە $P(C)$ ؟

**3.** ئایا ڕوودانی یەکێك لەو دوو ڕووداوە کاردەکاتە سەر ڕوودانی ئەوی تریان؟هۆیەکەی دیاریبکە.

**4.** بەشێوەی جووتە ڕێکخراو ئەنجامی هەڵدانی پارچە پارە کانزاییەکە و زارەکە بەیەکەوە بنووسە. بۆ نموونە $(A, 3)$ ئەگەر کامەران شێر و ژمارەی 3 دەستکەوت. لیستێك پێکبهێنە کە هەموو ئەنجامەکانی لە توانادا هەیە لە هەڵدانی پارچە پارەکە و زارەکە. هەژمێری ئەگەری ڕوودانی هەردوو ڕووداوی $A$ و $C$ بەیەکەوە بکە واتا $P(A)\times P(C)$ .

**5.** هەژمێرەی$P(A)\times P(C)$ بکە. ئایا $P(A\cap C)$ یەکسانە بە $P(A)$ x $p(C)$.

**6.** هێمای $D$ دابنێ بۆ ڕووداوی: « دەستکەوتنی ژمارەی جووت » لە کاتی هەڵدانی زارەکە$P(D)$ بدۆزەرەوە $P(A\cap D)$ .

**7.** $P(A\cap D)$ بدۆزەرەوە بەبەکارهێنانی ئەو لیستەی کە دروستتکردووە لە پرسیاری 4 دا. ئایا $P(A\cap D)$ یەکسانە بە $P(A)\times P(D)$ ؟

**8.** چیت دەست دەکەوێت لە ئەگەری ڕوودانی دوو ڕووداو بەیەکەوە. ئەگەر ڕوودانی یەکێکیان کارنەکاتە سەر ڕوودانی ئەوی تریان؟

خاڵی چاودێری ✓

بە زۆر ڕووداو دەوترێت سەربەخۆن **Independent**. ئەگەر ڕوودانی یەکێکیان یان ڕوونەدانی کارنەکاتە سەر ڕوودانی ڕووداوەکانی تر. نموونە بۆ ئەوە هەڵدانی دوو بەردەزار. بەزۆر ڕووداو دەوترێت بەیەکبەستراو **Dependent** ئەگەر ڕوودانی یەکێکیان یان ڕوونەدانی کاربکاتە سەر ڕوودانی ڕووداوەکەی تر یان ڕووداوەکانی تر.

**ئەگەری دوو ڕووداوی سەربەخۆ Probability of Independent Events**

دوو ڕووداوی $A$ و $B$ سەربەخۆ دەبن تەنها ئەگەر $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ و دوو ڕووداوەکە **بەیەکبەستراو** دەبن لە بارەکانی تردا.

**نموونە** 1

**خونچە دوو تورەگەی هەبوو یەکێکیان 9 گۆی سوورو 3 گۆی سەوزی تێدابوو و ئەوی تریان 9 گۆی ڕەش و 6 گۆی زەردی تێدابوو. خونچە گۆیەکی لەهەر تورەگەیەك ڕاکێشا. ئەگەری ئەوەی گۆیە ڕاکیشراوەکە لە تورەگەی یەکەمدا سەوز بێت و گۆیە ڕاکێشراوەکە لە تورەگەی دووەمدا ڕەش بێت چەندە.**

**شیکار**

**تورەگەی یەکەم**

$P(G) = \frac{3}{3+9} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ کاتێك $G$ ڕووداوی «گۆی سەوز» بێت

**تورەگەی دووەم**

$P(B) = \frac{9}{6+9} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ کاتێك $G$ ڕووداوی «گۆی ڕەش» بێت

لەبەر ئەوەی دوو ڕوداوەکە سەربەخۆن

$$P(G \cap B) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$$

ئەگەری ئەوەی گۆی ڕاکێشراو لە تورەگەی یەکەم سەوز و لە تورەگەی دووەم ڕەش بێت بریتییە لە $\frac{3}{20} = 0.15 = 15\%$

**نموونە** 2

**خوێندکارەکانی هەر یەکە لە هۆبەکانی $A$ و $B$ لە پۆلی دەیەم نوێنەرێکیان بۆ خۆیان هەڵبژارد بەناوی ئەوانەوە لە ئاهەنگی کۆتایی ساڵی خوێندن قسەبکات. دانا لە هۆبەی $A$ کەژمارەیان 18 خوێندکار بوو و زانا لەهۆبەی $B$ کە ژمارەیان 20 خوێندکارە بوو. ئەگەری ئەوەی ئەم دووانە نوێنەرین چەندە؟**

**شیکار**

گریمان $M$ هێمابێت بۆ ڕووداوی ( دانا نوێنەربێت) و هێمای $T$ کەزانا نوێنەربێت.

$P(M) = \frac{1}{18}$ $\quad P(T) = \frac{1}{20}$

لەبەر ئەوەی هەردوو ڕووداوی $M$ و $T$ سەربەخۆن ئەوا.

$$P(M \cap T) = P(M) \times P(T) = \frac{1}{18} \times \frac{1}{20} = \frac{1}{360} \approx 0.03\%$$

**بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە**

یاسای ئەگەری دوو ڕووداوی سەربەخۆ دەتوانیت گشتگیری بکەیت بۆ ئەوەی ژمارەیەکی زۆر ڕووداوی سەربەخۆ بگرێتەخۆ ئەگەری دەستکەوتنی ژمارەی جووت لە هەڵدانی بەردەزارێکدا سێ جار بەیەك بەدواییەك بریتیە لە $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

ئەگەری ئەوەی 4 شێرت دەستکەوێت لە هەڵدانی پارچە پارەیەکی کانزایی 4 جاری یەك بەدواییەك، چەندە، یاسایەك بنووسە بۆ هەژمێرکردنی ئەگەری ڕوودانی $n$ ڕووداو بەیەکەوە کاتێك ئم ڕوداوانە سەربەخۆ بن.

نموونە 3

بەگەڕانەوە بۆ پرسیارەکەی سەرەتای وانەکە، کرا ئەگەری ئەوەی کە دوو خوێندکارەکە بەلایەنی کەمەوە لە یەك مانگ و لە یەك ڕۆژدا لە دایك بووبن لە نێوان کۆمەڵە 5 خوێندکاردا چەندە؟

جێبەجێکردنەکان
بۆخۆشی

شیکار

لە گۆشەیەکی جیاوازەوە. سەیری کارەکە بکە دژە ڕووداو بەکاربهێنە. وا دابنێ کە لە پۆلەکەدا دوو خوێندکار نییە کە لەیەك مانگ ویەك ڕۆژدا لە دایك بوون. وای دابنێ کە ساڵەکە 365 ڕۆژە.

لەوانەیە ڕۆژی لە دایکبوونی یەکەم هەر ڕۆژێك بێت لە ڕۆژەکانی ساڵ $\frac{365}{365}$ .

لەوانەیە ڕۆژی لە دایکبوونی دووەم هەر ڕۆژێك بێت لە 364 ڕۆژدا $\frac{364}{365}$ .

لەوانەیە ڕۆژی لە دایکبوونی سێیەم هەر ڕۆژێك بێت لە 363 ڕۆژدا $\frac{363}{365}$ .

بەم شێوەیە بەردەوام دەبێت هەتا خوێندکاری چوارەم و پێنجەم $\frac{362}{365}$ ، $\frac{361}{365}$ .

$$P(\overline{B}) = \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \times \frac{361}{365} \approx 0.97$$

یاسای ئەگەری دژە ڕووداو بەکاربێنە بۆ هەژمێرکردنی ئەگەری ئەوەی کە دوو خوێندکارەکە بەلایەنی کەمەوە لە یەك مانگ و یەك ڕۆژدا لە دایك بووبن.

(دوو خوێندکار لە هەمان مانگ و ڕۆژ لە دایك بووبن)P – 1 = ( بەلایەنی کەم دوو خوێندکار لە هەمان مانگ و ڕۆژ لە دایکبووبن)P .

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0.97 = 0.03 = 3\%$$

کەواتە، ئەگەری ئەوەی کە دوو خوێندکار بەلای کەمەوە هەمان ڕۆژی لەدایکبوونیان هەبێت نزیکەی 3% .

**هەوڵبدە** ئەگەری ئەوەی دوو خوێندکار بەلای کەمەوە لەیەك مانگ ولەیەك ڕۆژدا لە دایك بووبن لە نێوان 7 خوێندکاردا چەندە؟

# ڕاهێنان

## بەردەوامبوون لەبیرکاریدا

**1** نموونەیەك بهێنەوە لەسەر دوو ڕووداوی سەربەخۆ و نموونەیەکی تر لەسەر دوو ڕووداوی بەیەکبەستراو؟

**2** چۆن ئەگەری ڕوودانی دوو ڕووداوی سەربەخۆ بەیەکەوە ئەژمێر دەکەیت؟

**3** جیاوازی چییە لە نێوان دوو ڕووداوی جیا و دوو ڕووداوی سەربەخۆ. نموونە بۆئەمانە بهێنەرەوە.

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

**4** دارا دوو تورەگەی هەیە یەکەمیان 5 گۆی ڕەش و 5 گۆی سپی تێدایە. دووەمیان گۆیەکی سەوز دوو و گۆی سووری تێدایە. دارا گۆیەکی لە هەر تورەگەیەك ڕاکێشا ئەگەری ئەوەی گۆیە ڕاکێشراوەکە لە تورەگەی یەکەم ڕەش بێت و لە تورەگەی دووەم سەوزبێت چەندە؟

**5** خوێندکارەکانی هەردوو هۆبەی A و B پۆلی دەیەم هەریەکەیان نوێنەرێکی هەڵبژارد کە بە ناویانەوە قسەبکات لە ئاهەنگی کۆتایی ساڵی خوێندندا. تارین لە هۆبەی A هەڵبژێرا کە ژمارەیان 22 خوێندکارە وزارا لە هۆبەی B هەڵبژێرا کە ژمارەیان 19 خوێندکارە. ئەگەری ئەوەی هەردووکیان نوێنەر بن چەندە؟

6 یانەیەکی هەڵبەست لە دواناوەندییەکدا 40 ئەندامی هەیە. ئەگەری ئەوەی بەلایەنی کەمەوە دوو خوێندکار لە ئەندامەکانی یانەکە لە یەك مانگ و لە یەك ڕۆژدا لە دایك بووبن چەندە؟

## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ڕووداوەکانی $A,\ B,\ C, D$ سەربەخۆن $P(D)=0.1, P(C)=0.75, P(B)=0.25, P(A)=0.5$ ئەمانە هەژمێربکە.

7 $P(A\cap B)$

8 $P(A\cap C)$

9 $P(C\cap B)$

10 $P(C\cap D)$

11 $P(A\cap D)$

12 $P(B\cap D)$

**لە کاتی هەڵدانی بەردەزارێکدا ئایا ئەم دوو ڕووداوانەی خوارەوە سەربەخۆن یان بەیەکبەستراون.**

13 «دەستکەوتنی ژمارەی جووت»؛«دەستکەوتنی ژمارەی 2 یان 4 ».

14 «دەستکەوتنی ژمارەی جووت»؛«دەستکەوتنی ژمارەی 1 یان 4 ».

15 «دەستکەوتنی ژمارەی 6 »؛ «دەستکەوتنی ژمارەیەك كەلە 5 بچووکتربێت ».

16 «دەستکەوتنی ژمارەی 4 »؛ «دەستکەوتنی ژمارەیەك لە 3 گەورەتربێت ».

**سەیری ئەم چەرخە میلداریەی بەرامبەرت بکە. کاتێك هەشت پارچەکەی لە ڕووبەردا یەکسان بن و چەرخەکە ژمارەکانی 1 تا 8 هەڵگرتووە.ئەگەری هەر ڕووداوێك لەم ڕووداوانەی خوارەوە بدۆزەرەوە لە کاتی جوولانی چەرخەکە سێ جار.**

17 میلەکە لە هەر جارێکدا لە بەردەم ژمارە 3 یان لە بەردەم ئەو ژمارەی لە 5 گەورەترە ڕابوەستێت.



18 میلەکە لە هەر جارێکدا لە بەردەم ژمارە 4 یان لە بەردەم ئەو ژمارەی لە 6 بچووکترە ڕابوەستێت.

19 میلەکە لە هەر جارێکدا لە بەردەم ژمارە 5 یان لە بەردەم ئەو ژمارەی لە 7 بچووکترە ڕابوەستێت.

20 میلەکە یەك جار لە بەردەم ژمارە 8 یان لە بەردەم ئەو ژمارەی لە 3 گەورەترە ڕابوەستێت.

21 ئەگەری ئامادەبوونی کامەران لە ئاهەنگێکدا 80% بێت و ئەگەری ئامادەبوونی هەڵۆ 95% بێت ئەگەری ئامادەبوونی هەردووکیان پێکەوە چەندە، ئەگەربزانیت ئامادەبوونی یەکێکیان کارناکاتە سەر ئامادبوون و نەبوونی ئەویتریان.

22 تورەگەیەك 15 گۆی ڕەنوس کراوی لە 1 تا 15 تێدایە، باوان گۆیەکی ڕاکێشا لە دواییدا گەراندییەوە بۆ تورەگەکە، پاشان گۆیەکی بۆ جاری دووەم ڕاکێشا.

أ ئەگەری ئەوەی ئەو گۆیەی کە باوان ڕایکێشا لە هەردوو جاردا ژمارە 8 بێت چەندە؟

ب ئەگەری ئەوەی ئەو گۆیەی کە باوان ڕایکێشاوە ژمارەی 8 بێت لەیەك جاردا چەندە؟
(یارمەتی: ئەژمێری ئەگەری ئەوەی ئەو گۆیەی ژمارە 8 بێت لە یەکەم جاردا ڕاکیشرابێ یا لە دووەم جاردا نەك لە هەردوو جاردا بەیەکەوە)

23 **فرۆکەوانی** تۆمارەکانی یەکێك لە کۆمپانیاکانی فرۆکەوانی پێشانی دەدات کە گەشتەکەیان لە تاران بۆ هەولێر کە لە کاتی خۆیدا دەگات لە 92% ی گەشتەکانیانە. گەشتەکەیان لەهەولێرەوە بۆ عەمان دەردەچێت لە کاتی خۆیدا لە 97% گەشتەکانە. ئاشتی ویستی گەشتێك بکات لە تارانەوە بۆ عەمان بەمەرجێك بە هەولێردا بڕوات، ئەگەری ئەوەی فرۆکەکەی دەیگوازێتەوە بۆ هەولێر لە کاتی خۆیدا بێت چەندە لە دوایدا بگاتە عەمان لەکاتی خۆیدا؟

## ڕوانین بۆ دواوە

ئەگەر $x$ ، $y$ سفر نەبن. ئەم بڕانەی خوارەوە بە سادەترین شێوە بنووسە.

**24** $(x^{-2}y^{3})^{2}(3xy^{0})^{3}$

**25** $(2x^{2}y^{-2})^{-3}(-x^{2}y)^{3}$

**26** $\left(\dfrac{3x^{2}y^{-2}}{5x^{2}y}\right)^{2}$

## ڕوانین بۆ پێشەوە

**27** نیاز 3 پارچە دراوی کانزایی هاوشێوەی هەڵدا. ئەگەری دەستکەوتنی 3 خەت لە هەر بارێك لەم بارانەی خوارەوە بدۆزەرەوە.

أ بـاری یەکەم: یەکێك لە ڕووەکانی هەریەك لە پارچەکان شێربێت. ( هەرسێ پارچە پارەکە ئاسایی بن)

ب یەك لە پارچەکان شێر لەسەر هەردوو ڕووەکەی هەبێت. (دوو پارچەکەی تر ئاسایی بن).

ج دوو لە پارچەکان شێر لەسەر هەردوو ڕووەکەی هەبێت. ( پارچە پارەی سێیەم ئاسایی بێت).

وانەی 6

# پێوەرەکانی پەرتبوون

## Measurments of Dispersion







**بۆچی؟** دەتوانیت پێوەرەکانی پەرتبوون بەکاربهێنیت بۆ بەراوردکردنی دوو کۆمەڵە پێدراوی هاوشێوە وەک تێکرای مانگانە بۆ پلەکانی گەرما لە دوو شاردا.

**ئامانجەکان**

- پێوەرەکانی پەرتبوون وەک مەودا لادانی ناوەندی و لیکنەچوون و لادانی پێوانەیی هەژمێردەکات وبەکاریان دەهێنێت.

## چەمکی پەرتبوون — Dispersion Concept

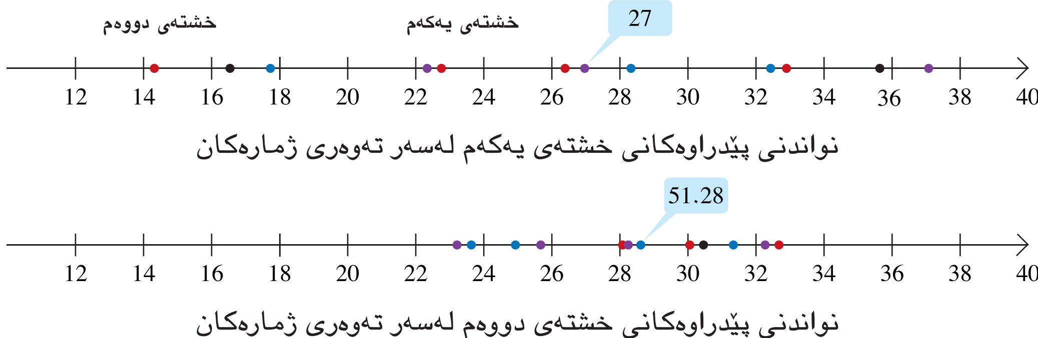
**جێبەجێکردنەکان**

کەش و هەوا

ئەم خشتەی بەرامبەرت تێکرای پلەکانی گەرما لە 12 مانگدا ڕوونەدەکاتەوە لە هەردوو شاری ریاز و جدە. ناوەندی پلەکانی گەرما لە خشتەی یەکەمدا دەگاتە 27 بەڵام لە خشتەی دووەمدا ناوەندی پلەکانی گەرما دەکاتە 28.51، ئەگەر بەهاکانی دوو خشتەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان دابنێین دەبینین:

| ناوەندی پلەکانی گەرما لە شاری ریاز | |
|---|---|
| کانوونی دووەم | 16.63 |
| شوبات | 17.8 |
| ئازار | 22.94 |
| نیسان | 26.37 |
| مایس | 32.61 |
| حزیران | 35.62 |
| تموز | 37.06 |
| ئاب | 36.81 |
| ئەیلول | 33.06 |
| تشرینی یەکەم | 28.34 |
| تشرینی دووەم | 22.5 |
| کانونی یەکەم | 14.35 |

| ناوەندی پلەکانی گەرما لە شاری جەدە. | |
|---|---|
| کانوونی دووەم | 23.32 |
| شوبات | 23.77 |
| ئازار | 25.8 |
| نیسان | 28.08 |
| مایس | 30.51 |
| حزیران | 31.25 |
| تموز | 32.7 |
| ئاب | 32.25 |
| ئەیلول | 31.27 |
| تشرینی یەکەم | 30.1 |
| تشرینی دووەم | 28.2 |
| کانونی یەکەم | 24.9 |




نواندنی پێدراوەکانی خشتەی یەکەم لەسەر تەوەری ژمارەکان

نواندنی پێدراوەکانی خشتەی دووەم لەسەر تەوەری ژمارەکان

ناوەندی خشتەی دووەم(28.51) پلەکانی گەرما دەردەبڕێ لە شاری جدە بە شێوەیەکی باشتر لە دەربڕینی

تێکرای خشتەی یەکەم (27) کە پلەکانی گەرما لە شاری ڕیاز ە. پلەکانی گەرما لە جدە نزیکە لە ناوەندەکەی بە پێچەوانەی پلەکانی گەرما لە شاری ڕیاز. ئەمەش ئەوە دەگەیەنێت کە دەتوانین بڵێین کە کۆمەڵەی بەهاکانی خشتەی یەکەم پەرتبوونەکەی زیاترە لە بەهاکانی خشتەی دووەم.

## پێوەرەکانی پەرت بوون — Measures of Dispresion

ئامارناسان هەندێ لە پێوەرەکان بەکاردەهێنن بودەربڕینی پێوانی مەودای پەرتبونی کۆمەڵە بەهایەك.

**مەودا Range**: بریتییە لە جیاوازی نیوان گەورەترین بەها **Maximum Value** – وبچووکترین بەها **Minimum Value** لە کۆمەڵەکە. (مەودا = گەورەترین بەها – بچووکترین بەها)

**بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە**

ئایا وادەبینی کە مەودا پەرتبوونی کۆمەڵە بەهایەك دەردەبڕێ؟

**لادانی ناوەندی Mean Deviation**: بریتییە لە تێکرای دوورکەوتنەوەی کۆمەڵە بەهایەك لە ناوەندە کە. (لادانی ناوەندی) $= \frac{1}{n}\left(|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|\right)$

بۆ ئەوەی لادانی نێوانەیی هەژماربکەین بۆ کۆمەڵەی بەهای $x_1, x_2 ..., x_n$ لادانی هەرێکیان دەدۆزینەوە لە ناوەندە ژمێرەییەکەوە واتە $|x_1 - \bar{x}|, |x_2 - \bar{x}|, ..., |x_n - \bar{x}|$ پاشان تێکرای ئەو لادانانە دەدۆزینەوە.

$$\text{لادانی نێوانەیی} = \frac{1}{n}\left(|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|\right)$$

**بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە**

بۆچی ئامار ناسان بری $|x_n - \bar{x}|$ بەکاردێن بۆ دۆزینەوەی لادانی بەهای $x_n$ و لە ناوەندە ژمێری و $x_n - \bar{x}$ بەکارناهێنن لە جیاتی ئەو.

### نموونە 1

**جێبەجێکردنەکان**
بازرگانی

یەکێك لە کۆمپانیاکان تایە بۆ ئۆتۆمۆبیلەکان دروست دەکات، 5 تاقیکردنەوەی ئەنجامدا لە سەر دوو چەشنی تایە.ژمارەی ئەو کیلۆمەترانەی تۆمارکرا کە هەر تایەك بریویەتی پێش ئەوەی لە کەلك بکەوێت ئەم خشتەی خوارەوە ئەنجامەکانی ئەم تاقیکردنەوانە ڕوونەکاتەوە، بەهەزاران کیلۆمەتر.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| تایەی چەشنی 1 | 66 | 43 | 37 | 50 | 54 |
| تایەی چەشنی 2 | 54 | 49 | 47 | 48 | 52 |

أ هەریەك لە مەودا و لادانی ناوەندی بۆ ژمارەی ئەو کیلۆمەترانە بدۆزەرەوە کە هەریەك لەم جۆرە تایانە بریویەتی.

ب ئەم پێوەرانە ئاماژە بۆچی دەکەن دەربارەی هەریەك لەم دوو جۆرە تایانە.

**شیکار**

أ

**تایەی چەشنی یەکەم**

مەودا $66 - 37 = 29$ واتە 29 000 م

بۆ هەژمێرەی لادانی ناوەندی. دەست بکەبە هەژمێرکردنی ناوەند

$\bar{x} = \frac{66+43+37+50+54}{5} = 50$

پاشان لادانی هەر بەهایەك لەم ناوەندەوە هەژمێربکە.

بۆ ئەمەش ئەم خشتەیە ڕێك بخە .

**تایەی چەشنی دووەم**

مەودا $54 - 47 = 7$ واتە 7 000 م

بۆ هەژمێرکردنی لادانی ناوەندی. دەست بکەبە هەژمێرکردنی ناوەند

$\bar{x} = \frac{52+48+47+49+54}{5} = 50$

پاشان لادانی هەر بەهایەك لەم ناوەندەوە هەژمێربکە.

بۆ ئەمەش ئەم خشتەیە ڕێك بخە .

| $x_n$ | $\lvert x_n-\bar{x}\rvert$ |
|---|---|
| 66 | 16 |
| 43 | 7 |
| 37 | 13 |
| 50 | 0 |
| 54 | 4 |
| کۆ | 40 |

پاشان لادانی ناوەندی هەژمێر بکە بەم شێوەیە:
لادانی ناوەندی
$\frac{16+7+13+0+4}{5}=8$ واتا $8000\ km$

| $x_n$ | $\lvert x_n-\bar{x}\rvert$ |
|---|---|
| 54 | 4 |
| 94 | 1 |
| 47 | 3 |
| 48 | 2 |
| 52 | 2 |
| کۆ | 12 |

پاشان لادانی ناوەندی هەژمێر بکە بەم شێوەیە:
لادانی ناوەندی
$\frac{4+1+3+2+2}{5}=2.4$ واتا $2400\ km$

ب تێبینی بکە کە لادانی ناوەندی بۆ تایەی چەشنی 2 کەمترە لە لادانی ناوەندی تایەی چەشنی 1ئەمەش ڕێگات پێیدەدات کە بلێیت کە ناوەندی پێدراوەکانی چەشنی 2 زیاتر باوەڕی پێدەکرێت.

**هەوڵبدە** مەوداو لادانی ناوەندی بۆ پێدراوەکانی تایەی چەشنی سێیەم هەژمێربکە و بەراوردی بکە لەگەڵ پێوەرەکانی کە دەگەڕێنەوە بۆ دوو تایەی پێشوو.

| تایەی چەشنی 3 | 64 | 52 | 50 | 49 | 35 |
|---|---|---|---|---|---|

**خاڵی چاودێری** ✓ ئایا دەتوانرێ بۆ دوو کۆمەڵە پێدراوەکانی هەمان مەوادیان هەبێت بی ئەوەی لادانە ناوەندییەکانیان وەك یەك نەبن؟ وەڵامەکەت ڕوونبکەرەوە بە نموونە.

**لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی:** دوو پێوەرن بۆ پەرتبوون بەکاردەهێنرێن بۆ بەراوردکردنی پێدراوەکان و شیکارکردنیان.

**لێکنەچوون:** $\sigma^2=\frac{1}{n}\left((x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2\right)$

**لادانی پێوانەیی** $\sigma=\sqrt{\sigma^2}$ ڕەگی دووجای لێکنەچوون.

## نموونە 2

**لادانی پێوانەیی هەژمێربکە بۆ ئەو دوو تایەی کە دوو چەشنی تایەکە لە نموونەی پێشوو بڕیویانە.**

**شیکار**

جێبەجێکردنەکان
پیشەسازی

**تایەی چەشنی یەکەم**

$\bar{x}=\frac{66+43+37+50+54}{5}=50$

| $x_n$ | $x_n-\bar{x}$ | $\lvert x_n-\bar{x}\rvert^2$ |
|---|---|---|
| 66 | 16 | 256 |
| 43 | −7 | 49 |
| 37 | −13 | 169 |
| 50 | 0 | 0 |
| 54 | 4 | 16 |
| سەرجەم | 0 | 490 |

**تایەی چەشنی دووەم**

$\bar{x}=\frac{54+49+47+48+52}{5}=50$

| $x_n$ | $x_n-\bar{x}$ | $\lvert x_n-\bar{x}\rvert^2$ |
|---|---|---|
| 54 | 4 | 16 |
| 49 | −1 | 1 |
| 47 | −3 | 9 |
| 48 | −2 | 4 |
| 52 | 2 | 4 |
| سەرجەم | 0 | 34 |

| | |
|---|---|
| لێکنەچوون: $\sigma^2 = \frac{490}{5} = 98$ | لێکنەچوون : $\sigma^2 = \frac{34}{5} = 6.8$ |
| لادانی پێوانەیی: $\sigma = 9.9$ واتە $km$ 9 900. | لادانی پێوانەیی: $\sigma = 2.6$ واتە $km$ 2 600. |

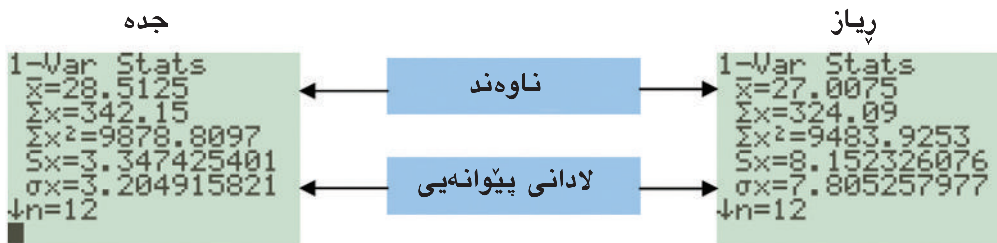
ئەم ئەنجامانەی لە نموونەی پێشوودا دەست کەوتووە دڵنیامان دەکات کە لادانی پێوانەیی بۆ تایەی 2 کەمترە لە لادانی پێوانەی بۆ تایەی 1 .

**هەوڵبدە** لادانی پێوانەیی چەندە بۆ تایەی 3 .

**خاڵی چاودێری** ✔ ئەگەر لادانی پێوانەیی بۆ تایەی چوارەم یەکسان بێت بە 500km 1. لەبارەی ئەم تایە چی دەڵێیت بە بەراوردکردنی لەگەڵ دوو تایەی 1 ، 2 ؟

**بیرکردنەوەی رەخنەگرانە** کام دوو پێوەر زیاتر بەکاردێت: لێکنەچوون یان لادانی پێوانەیی؟هۆی وەڵامەکەت لێکبدەوە؟ بەگەڕانەوە بۆ ناوەندی پلەکانی گەرما لە دوو شاری ڕیاز و جدە.ئەم خشتەیەی خوارەوە پێوەرەکانی پەرتبوون ڕوونددەکاتەوە بۆ ناوەندی پلەکانی گەرما لەم دوو شارەدا.

| پێوەر | ڕیاز | جدە |
|---|---|---|
| مەودا | 22.71 | 9.38 |
| لادانی ناوەندی | 6.91 | 2.83 |
| لێکنەچوون | 66.46 | 11.2 |
| لادانی پێوانەیی | 8.15 | 3.35 |




ئەوە مانای ئەوەیە کە ناوەندی پلەی گەرما پەرتبوونەکەی کەمترە لە جدە تا ڕیاز لە بەرئەوەی لادانی پێوانەیی شاری یەکەم کەمترە لە لادانی پێوانەیی شاری دووەم.

# ڕاهێنــــــــان

## بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1. بۆچی هەریەك لە لادانی ناوەندی و لادانی پێوانەیی ژمارەیەکی سالب نین؟
2. پەیوەندی لە نێوان لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی ڕوونبکەرەوە. ئایا لادانی پێوانەیی هەمیشە کەمترە لە لێکنەچوون؟ وەڵامەکەت لێکبدەوە.
3. بۆچی هەریەك لە لادانی ناوەندی و لادانی پێوانەیی زیاتر پەرتبوون دەردەخەن وەك لەمەودا؟

## ڕاهێنان و ئاڕاستەکراو

جێبەجێکردنەکان

**4** تاقیکردنەوە ئەم خشتەیەی بەرامبەر نمرەکانی دوو خوێندکار لە 5 تاقیکردنەوە ڕووندەکاتەوە. مەوداو لادانی ناوەندی بۆ نمرەکانی هەردوو قوتابی ئەژمێربکە. وە ڕوونی بکەوە کە ئەم پێوانانە چی دەگەیێنن؟

**5** لادانی پێوانەیی بۆ نمرەکانی ئەو دوو خوێندکارە ئەژمێربکە.

| ئاری | توانا |
|---|---|
| 81 | 98 |
| 84 | 68 |
| 88 | 99 |
| 82 | 59 |
| 85 | 96 |

## ڕاهێنانی جێبەجێکردن

**مەودا و لادانی ناوەندی بۆ ئەمانە ئەژمێربکە.**

**6** 8; 10; 3; 9; 10

**7** 1; 2; 4; 2; 6

**8** 31; 103; 34; 98; 107; 23

**9** 32; 23; 68; 74; 26; 93

**10** 2; 13; 9.4; 7.3; 12.3; 8.6; 7.6

**11** 1; 11; 14.2; 8.4; 12.2; 15.2; 10.9

**12** −1.22; 4.35; −2.42; 2.33; 4.66

**13** 8.72; 7.43; 2.92;−3.56; 8.78

**لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی بۆ ئەمانە ئەژمێربکە.**

**14** 9; 10; 10; 8; 7; 11; 12; 9

**15** 8.1; 10.3; 3.4; 9.8; 10.7

**16** −3; 2; −5; 4; −2; 8; 9;−1

**17** 2; 4; −8; 8; 7; −2;−4; 3; 7

**لادانی ناوەندی و لادانی پێوانەیی ئەژمێربکە، کام پێوەر لەم دوو پێوەرانە کەمتر پابەندە بەبەهای دەستکەوتووەوە؟**

**18** 20; 30; 40; 500

**19** 0; 500; 510; 520

بەرەنگاری

**20** دوو کۆمەڵە بەها پێك بهێنە کە هەمان مەودایان هەبێت. ولادانی پێوانەکانیان جیاواز بێت

**21** ئایا دەبێت لادانی پێوانەیی بۆ کۆمەڵە بەهایەك یەکسان بێت بە سفر؟ئەگەر ئەوە لە توانادایە، مەرجەکانی بەدی هێنانی دیاریبکە. نموونەیەك بەکاربهێنە بۆ باسەکەت.

بەستنەوە

**22** گۆڕانکاری چی ڕوودەدات لە لادانی پێوانەیی بۆ کۆمەڵە بەهایەك ئەگەر ژمارەیەکی دیاریکراوی $a$ بخریتە سەر هەموو بەهاکانی کۆمەڵەکە؟ چی ڕوودەدات لە لادانی پێوانەیی کۆمەڵە بەهایەك ئەگەر هەموو بەهاکانی کۆمەڵەکە لە ژمارەیەکی دیاریکراوی وەك $a$ بدرێت؟

وەرزش ئەم خشتەیەی خوارەوە ژمارە پێوانەییەکان ( بە خولەك و چرکە و بەشەکانی سەد لە چرکەدا ) بۆ کوڕان وکچان ڕووندەکاتەوە کە بەشداریان لە پێشبرکێیەکی هەزارمەتریدا کرد بۆ خلیسکاندن لەسەر بەفر.



| | 1976 | 1980 | 1984 | 1988 | 1992 | 1994 | 1998 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| کوڕان | 1:59.38 | 1:55.44 | 1:58.36 | 1:52.06 | 1:54.81 | 1:51.29 | 1:47.87 |
| کچان | 2:16.58 | 2:10.95 | 2:03.42 | 2:00.68 | 2:05.87 | 2:02.19 | 1:57.58 |

23 ناوەند و ناوەڕاستە بۆ ژمارە پێوانەییەکانی کوڕان وکچان هەژمێربکە.

24 مەوداو لادانی پێوانە بۆ کوڕان وکچان هەژمێربکە: بەو پێوەرانە دەربارەی ژمارە پێوانەییەکان کوڕان وکچان چی دەڵێیت؟

25 لادانی پێوانەی بۆ کوڕان وکچان چی دەڵێن؟



## ڕوانین بۆ دواوە

بەبەکارهێنانی یاسا، دوو ڕەگی ئەم دوو هاوکیشە دووجایانە بدۆزەرەوە. وەڵامەکەت نزیکبکەوە بۆ نزیکترین دە نزیکبکەوە.

26 $3x^2 = 10x + 1 = 0$

27 $2x^2 + 12x - 4 = 0$



## ڕوانین بۆ پێشەوە

28 زۆرجار ئامارناسان پەنادەبەن بۆ بەکارهێنانی سامپلێك بۆ توێژینەوەی کۆمەڵە بەهایەك، بۆ ئەمەش دەست بەکار دەبن لە پێوەرەکانی ئاماری سامپلەکە هەمووی. ئەوان وای دادەنێن کە ناوەندی نموونەکە ناوەندی کۆمەڵەکە دەردەخات. بەڵام بۆ لادانی پێوانەیی ئەوان لێکنەچوونی سامپلەکە هەژمێر دەکەن بە یاسایەك کەمێك جیاوازە لەگەڵ یاسای هەژمێرکردنی لێکنەچوونی کۆمەڵەکە. ئەوانە ئەم یاسایە بەکاردەهێنن.

لێکنەچوونی سامپلەکە $= \frac{1}{(n-1)}\left((x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2\right)$

أ لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی بۆ ئەم نموونەیە هەژمێربکە. 12 ;5 ;16 ;18 ;15

ب بۆ مەبەستی هەژمێرکردنی ناوەندی ژمارەی ئوتومبیلەکان لە خێزانێك. ئەنجوومەنی شارەوانی شارێك هەستا بە بەکارهێنانی سامپلێك کە لە 10 خێزان پێکهاتبوو بە هەڕەمەکی هەڵبژێرابوون. لە وەرگرتنی ڕاپرسی لەم سامپلە گەیشتنە ئەم ژمارانە:
4 ;3 ;1 ;2 ;4 ;1 ;1 ;2 ;3 ;2 ناوەندی ژمارەی ئوتومبیلەکان لای یەك خێزان بخەملێنە لەگەڵ لادانە پێوانەییەکەی.



# ئەی گەشتیار لەگەڵ خۆتم بەرە

لەگرنگترین کێشەکانی بەرەو ڕووی کۆمپانیاکانی فڕۆکەوانی دەبنەوە کێشەی ڕێکخستنی ڕێکوپێك بۆ کرداری تۆمارکردنی گەشتیارەکان و کەلوپەلەکانیانە. بۆ گەیشتن بە باشترین چارەسەر بۆ ئەم کێشانە پلاندانەرەکانی ئەم کۆمپانیایانە پەنا دەبەنە بەر ئەنجامدانی کردارە ئامارییەکان و تویژینەوەی ئەنجامەکان بەکرداری بیرکاری، لەوانەش هەژمارکردنی ئەگەرەکان. لەمەودوا کۆمپانیاکە هەڵدەستێت بەسێ چالاکی لە بارەی کێشەی تۆمارکردنی گەشتیارەکان.

## چالاکی 1

ئامارناسانی کۆمپانیاکە بەلایانەوە گرنگە توێژینەوەی تەواوبکەن لەسەر ئەو کاتەی کە کرداری تۆماری گەشتیارەکان پێویستیەتی.و شایەنی باسە لێرەدا ئاماژە بۆ ئەوە بکەین کە ئەم کاتە لە گەشتیارێکەوە دەگۆڕێ بۆ گەشتیارێکی تر. بە هۆی جیاوازی بارودۆخی گەشتیارەکان.
ئامارناسەکان دەستیانکرد بە لێکۆلینەوەی کاتی خایەنراو بۆ تۆمارکردنی هەر گەشتیارێك لەو پەنجا گەشتیارەی گەیشتونەتە نووسینگەی تۆمارگەکە، لە نێوان کاتژمێر 1:00 و کاتژمێر 1:10 و ئامارناسان گەیشتنە ئەم ئەگەرانەی کە لەم خشتەیەدا ڕوونکراوەتەوە

| کاتی خایەنراو بە چرکە | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ئەگەر | 0.052 | 0.132 | 0.158 | 0.135 | 0.123 | 0.104 |

| کاتی خایەنراو | 70 | 80 | 90 | 100 | 011 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ئەگەر | 0.058 | 0.034 | 0.116 | 0.050 | 0.026 | 0.012 |

کاتەکان نزیککراونەتەوە لە نزیکترین چەند جارە لە دە چرکەدا، و ئەگەرەکان بۆ نزیکترین بەش لە هەزار. خشتەکە بەم واتەیە دەخوێنرێنەوە ئەگەری کاتی تۆمارکردنی گەشتیارەکە لە 10 چرکەدا بریتیە لە 0.052 وئەگەری کاتی پێویست لە 20 چرکەدا دەکاتە 0.132 .
ئامارناسەکان دەیانەوی ئەگەری کاتی پێویست بۆ تۆمارکردنی 50 گەشتیارەکە زۆرتربێت لە 50 خولەکدا. ڕێگای یەکەم بۆ دیاریکردنی ئەمە. پێویست دەکات بە تۆمارکردنی هەموو ئەو کاتانەی کە ژمارەیەکی زۆر لە گەشتیارەکان پێویستیان بووە و پوختەکردنی ئەنجامەکە؟ بەڵام ئەم ڕێگایە پێویستی بە کات و توانا و تێچوون هەیە لەبەر ئەوە پەنایان بردە بەر وەك **نواندن Simulation** . چۆن هەستان بەم لێکچونە؟
پەنایان بردەبەر ئەو وردەکاریانەی کە ئەگەرەکانی پێ هەژمارکرابوو لە خشتەی پێشوو لەبەر ئەوەی وردەکارییەکە نزیککرابۆوە بۆ نزیکترین بەش لە هەزار.



بریاریاندا کە گەیشتنی 1000 گەیشتیار وەك یەك لێکردن بکەن بۆ ئەوەی بگەنە ئەو مەبەستە. هەستان بە کۆکردنەوەی ژمارەکان لە 1 بۆ 1000 لە **چەشنەکاندا**.

بەپێی ئەگەرەکانی خشتەی پێشوو وایان دانا کە ژمارەکان لە 1 بۆ 52 بەرامبەری ئەگەری 0.052 دێت. و ژمارەکان لە 53 بۆ 184 ( 132 ژمارە ) بەرامبەر ئەگەری 0.132 و بێت و هەروەها...

**خشتەکەی بەرامبەر تەواو بکە**

چۆن ئەم خشتەیە بەکار دەهێنێت؟ داوا بکە لە بژمێری ڕونکردنەوەیی بەهەڕەمەکی ژمارەیەکت بداتێ بکەوێتە نێوان 1 و 1000 کە ئەو دوو ژمارەیەی تێدابێت. وا دابنێ کە ئەو ژمارە هەڕەمەکییە گەیشتنی گەشتیارەکە بۆ نوسینگەی تۆمارکە بنوێنی. خشتەی پێشوو بەکاربێنە بۆ دیاریکردنی ئەو کاتەی کەگەشتیارەکە ویستویەتی بۆ تۆمارکردن.

| کات | ئەگەرەکان | تۆمارکردنی گەشتیار |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 000 |
| 10 | 0.052 | 052–001 |
| 20 | 0.132 | 184–053 |
| 30 | 0.158 | 342–185 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |

ئەگەر ژمارە هەڕەمەکیەکە 122 بێت بۆ نموونە وادابنێ ئەو کاتەی کە گەشتیارەکە پێویستیەتی بۆ تۆمارکردنی 20 چرکەیە چونکە ژمارە 122 دەکەوێتە نێوان هەردوو ژمارەی 53 و 418 لە ستونی سێیەمدا.

## چالاکی 2

کاتی گەیشتنی 50 گەشتیار بۆ نووسینگەی تۆمارگە لە نێوان کاتژمێر 1:00 و کاتژمێر 1:10 هەڵدەستیت بەوەی ( وەك یەکێان لێ بکەیت ) بە داواکردن لە بژمێرەکە 50 ژمارەی هەڕەمەکیت بداتێ ئەوەی کە دەستتکەوتووە لەم خشتەیەی بەرامبەرت ڕێکبخە.

1 بژمێری ڕونکرنەوەیی بەکاربهێنە بۆ دەستکەوتنی 50 ژمارەی هەڕەمەکی کە بکەوێتە نێوان1 و 1000 و ئەم دوو ژمارەیە خۆشیانی تێدابن.

2 ستوونی دووەم لەخشتەکەدا تەواوبکە.

3 ئەو خشتەیەی کە دروستتکردوە لە چالاکی یەکەم بەکاربهێنە. بۆ تەواوکردنی ستوونی سێیەم. نموونە: ئەگەر ژمارە هەڕەمەکیەکە 179 بێت ئەو کاتەی کە پێویستە دایبنێت لە ستوونی سێیەم بەرامبەر 179 دەکاتە 20 چرکە.

| کات | ئەو ژمارە هەرەمەکییە گشتیارەکە دەنوێنرێت | گەشتیار |
|---|---|---|
| | | 1 |
| | | 2 |
| | | 3 |
| | | ⋮ |
| | | 49 |
| | | 50 |

## چالاکی 3

1 نواندنی گەیشتی 50 گەشتیار کە بۆ نوسینگەی تۆمارگە 10 جار دووبارەبکەوە. ئەگەری کاتی پێویست بۆ تۆمارکردنی گەشتیارەکان کە لە 50 خولەك زیاترە بخەملێنە.

2 تێبینیت کرد لە کاتی ئیشکردنت لەم وانەیەدا چارەسەرکردنی کاری تۆمارکردنی گەشتیاران ئاسان نییە. ئایا دەتوانیت لەسەرەتایی دەستپێکردنت بەکاری ئەم پرۆژەیە نمونەیەك بدەی لەسەر بارێکی تر کە بتوانرێ نواندن بەکاربهێنرێت بۆ دیاریکردنی ئەگەرەکان؟ ئەمە ڕوونبکەرەوە.

# 6

# پێداچوونەوەی بەش

1 سۆزان گۆیەکی لە تورەگەیەك ڕاکێشا کە 3 گۆی سوور و 3 گۆی شینی تێدابوو ئەگەری ئەوەی گۆی ڕاکێشراو سوور بێت چەندە؟

2 ئاواز گۆیەکی لە تورەگەیەك ڕاکێشا کە 4 گۆی سوور و 10 گۆی ڕەشی تێدابوو. ئەگەری ئەوەی گۆ ڕاکیشراوەکە سوور بێت چەندە؟

**ئاهەنگێك لە نێوان کاتژمێر 8:00 د.ن و 8:30 د.ن دەست پێدەکات ئەگەری گەیشتنی یەکەم میوان بدۆزەرەوە لەنێوان.**

3 8:00 د ن و 8:05 د ن ؟

4 8:12 د ن و 8:18 د ن ؟

5 8:21 د ن و 8:24 د ن ؟

6 چەند وشەی نهێنی لە 4 پیت دەتوانیت پێکبهێنی بەبەکارهێنانی 5 پیت لە پیتەکانی ئەبجەدی بەبێ دووبارەبوونەوە؟

7 لە 4 پیت چەند وشەی نەهێنی دەتوانیت پێکبهێنیت بەبەکارهێنانی 5 پیت لە پیتەکانی ئەبجەدی لەگەڵ ڕێگادان بە دووبارە بوونەوە؟

8 بەچەند ڕێگا دەتوانیت 6 شەشپاڵووی ڕەنگ جیاواز لە ڕیزێکدا ڕیزبکەی.

9 بەچەند ڕێگا دەتوانیت دوو کتێب لە 5 کتێب هەڵبژێری ولەسەر ڕەفەکە ڕیزیانبکەیت.

10 بەچەند ڕێگا 5 خوێندکار دەتوانن لە دەوری مێزێکی بازنەییدا دابنیشن؟

11 بەچەند ڕێگا 8 خوێندکار دەتوانن لە دەوری مێزێکی بازنەییدا دابنیشن؟

12 بەچەند ڕێگا دەتوانیت دوو پەرتووك هەڵبژێری لە نێوان 10 پەرتووکدا؟

**دلۆڤان بەردە زارێکی هەڵدا. ئەگەری هەریەك لەم ڕووداوانە بدۆزەرەوە**

13 دەستکەوتنی ژمارەی 4 یان 7

14 دەستکەوتنی ژمارەی 1 یان 6

15 دەستکەوتنی ژمارەی تاك یان گەورەترە لە 4

16 دەستکەوتنی ژمارەی جووت یان بچووکترە لە 4

17 دەستکەوتنی ژمارەی گەورەتر لە 1

18 دەستکەوتنی ژمارەی گەورەتر لە 2

**ئەگەری ئەم ڕووداوانە هەژماربکە.**

19 لەدایکبوونی 3 منداڵی کوڕ یەك بەدوای یەك لە نەخۆشخانەی لە دایکبوون

20 دەستکەوتنی دوو ژمارەی جووت لە هەڵدانی دوو بەردەزار.

21 مەودا و لێکنەچوون و لادانی ناوەندی و لادانی پێوانەیی بۆ ئەم کۆمەڵە بەهایانە هەژمێربکە. 3، 2، 3، 5، 7، 5.

**مەودا و لادانی ناوەندی بۆ ئەم کۆمەڵە بەهایانە هەژمێربکە**

22 14; 11; 8; 14; 4; 12; 10; 6

23 20; 22; 15; 14; 13; 17

24 2; −3; 9; −7; 6; 3

25 . 21; 24; −22; 13; 12; −8; 4

**لێکنەچوون و لادانی پێوانەیی بۆ هەریەك لەم کۆمەڵە بەهایانە هەژمێربکە.**

26 20; 19; 16; 14; 13; 11; 18; 15; 12; 10

27 160; 80; 180; 130; 140; 100

38 14; 13; 11; 9; 7; 14; 12; 9; 8

29 2; 20; 18; 12; 6; 4; 3; 2; 12; 4; 3



# تاقیکردنەوەی بەش

ئەگەری هەر ڕووداوێك لەمانە دیاریبكە

1 گۆیەك لە تورەگەیەك ڕاكێشرا كە 4 گۆی سوور و 4 گۆی سەوزو 4 گۆی شین و 40 گۆی زەردی تێدابوو. ئەگەری ئەوەی گۆی ڕاكیشراو سوور بێت.

2 ڕاكێشرانی گۆیەكی سەوز لە تورەگەیەك كە 8 گۆی سەوز و 6 گۆی سووری تیدابوو لە كاتی ڕاكیشانی یەك گۆ.

3 دەستكەوتنی ژمارەی تاك لە هەڵدانی بەردەزارێك.

4 **ڕەنووسكردن** ڕەنووسكردنی پلیتی مۆڵەتی ڕاوكردن لە دوو پیتی جیا لە بیست و هەشت پیتەكانی زمانی عەرەبی و 8 ڕەنووسی جیاواز لە 10 ڕەنووسە بنەڕەتییەكە. ژمارەی ڕەنووسكراوەكانی كە لە توانادایە چەندە؟

ئەنجامی ئەم برانە بدۆزەرەوە.

5 $12! - 7!$

6 ${}_8P_3$

7 بەچەند ڕێگا دەتوانرێ سەرۆك وباریدەدەری سەرۆك ڕازگری لێژنەیەك هەڵبژێری كە پێكهاتووە لە 24 ئەندام؟

8 ژمارەی گۆڕینەكانی وشەی (كوردستان) چەندە؟

9 **وەرزش** بەچەند ڕێگا دەتوانیت 3 گۆی ڕەنگ جیاواز بەشبكەیت بەسەر 32 سەندوقی ڕەنووس كراودا ؟

ئەمانە بدۆزەرەوە

10 ${}_8C_3$

11 ${}_8C_8$

12 $\frac{{}_8C_5}{{}_5C_3 \times {}_5C_2}$

13 **بازرگانی** چێشتخانەیەك ژەمێك خواردن كەپێكدێت لە هەڵبژاردنی 3 قاپ خواردن لە نێوان 7 قاپدا میوانێك هەڵیبژێرێت ئەم هەڵبژاردنە بە چەند ڕێگا دەبێت؟

بەترۆس گۆیەكی ڕاكیشا لە تورەگەیەك كە 12 گۆی هاوشێوەی تێدابوو ڕەنووسكراون لە 1 تا 12 .ئەگەری ئەوەی گۆ ڕاكیشراوەكە یەكێك لەم ژمارانە هەڵگرێت چەندە.

14 ژمارە 7 یان ژمارەیەكی جووت.

15 ژمارەیەكی خۆبەش یان ژمارەیەكی چەند جارەی 4 .

16 ژماریەكی تاك یان ژمارەیەك چەند جارەی 5 بێت.

17 ژماریەك گەورەتربێت لە 8 یان ژمارەیەك چەند جارەی 3 بێت.

18 ژمارەیەكی جووت یان جووت یان بچووكتر بێت لە 6 .

ئەگەری هەریەك لەم ڕووداوانە بدۆزەرەوە.

19 سیروان پارچە دراوێكی كانزایی و زارێكی هەڵدا. ڕووداوەكە دەستكەوتنی خەتێك و ژمارەی 5 بێت.

20 دەزگای بۆشایی ئاسمان كاتێكی هەڵبژارد بۆ هەڵدانی مەكۆكێكی بۆشایی لە هەفتەی داهاتوودا. ڕودەدات كە پێویستە لە ڕۆژی سێشەممە بێت لە نێوان كاتژمێر1پێش نیوڕۆ و كاتژمێر 2 پێش نیوەڕۆ.

بچووكترین بەها و گەورەترین بەها و مەودا بۆ هەریەكە لەم كۆمەڵە پێدراوانە دیاریبكە.

21 34; 65; 32; 19; 28; 23; 45; 59; 24; 18 34; 41; 19; 23; 54; 42; 27; 25; 39 .

22 7; 5; 8; 2; 6; 2; 5; 6; 1; 4; 9; 8; 5; 3

مەودا ولادانی ناوەندی بۆ هەر یەكە لەم كۆمەڵە بەهایانە بدۆزەرەوە

23 13; 11; 9; 7; 5; 3

24 33; 30; 25; 23; 15; 18; 12; 10

لێكنەچوون و لادانی پێوانەیی بۆ هەر یەكە لەم كۆمەڵە بەهایانە بدۆزەرەوە.

25 13; 11; 9; 7; 5; 3 .

26 33; 30; 25; 23; 15; 18; 12; 10

27 چی دەڵێیت دەربارەی كۆمەڵە بەهایەك لادانە پێوانەكەی سفر بێت؟

# 6

# تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

1 کام لەم جووتە ڕێکخراوانەی خوارەوە ئەم سستەمە ساغدەکاتەوە $\begin{cases}2y+x\le 6\\ y-3x\ge 4\end{cases}$

أ $(0, 5)$ ب $(-1, 2)$
ج $(1, -1)$ د $(0, 0)$

2 شیکاری لاسەنگەی $2(x+2)-7<8x+15$ بریتییە لە

أ $x>-3$ ب $x<-3$
ج $x>2$ د $x<2$

3 بۆ ئەوەی ئەم برە $x^2-12x$ ببێتە دووجای تەواو دەبێت چی بخریتە سەری

أ $6$ ب $-6$ ج $36$ د $-36$

4 کام دەربڕین لەمانەی خوارەوە باسی پەیوەندی نێوان ئەم دوو ڕاستەهێڵە دەکات $y=-2x-3$ $y=\frac{1}{2}x$

أ دوو ڕاستەهێڵی ئاسۆیین ب دوو ڕاستەهێڵی ستوونین
ج ئەستوونن لەگەڵ یەکتر د تەریبن بەیەکتری

5 سادەترین شێوەی $\left(-\frac{1}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$ دەکاتە.

أ $\frac{1}{25}$ ب $-\frac{1}{25}$
ج $25$ د $-25$

6 پۆوتانی خاڵی ناوەڕاستی ئەو پارچە ڕاستەهێڵەی دوو سەرەکانی $(-4, -1)$ ، $(2, -7)$ بریتییەلە

أ $(-1, -3)$ ب $(-3, 3)$
ج $(-1, -4)$ د $(-3, -3)$

7 کامیان شێوەی گشتی ئەم برەیە دەنوێنێت.
$(5x^3-2x^2+x-10)+(2x^3-3x-1)$

أ $3x^3-2x^2-4x-9$
ب $3x^3+2x^2+4x-9$
ج $7x^3-2x^2-2x-9$
د $7x^3-2x^2-2x-11$

8 ئەم برە بەسادەترین شێوە بنووسە
$\frac{x^2+3x-4}{x^2}\times\frac{x^2-2x}{2x+8}$

9 ئەو هاوکێشەیە بنووسە لە سەر شێوەی لاری یەکتربرینی بۆ ئەو ڕاستەهێڵەی بەم دوو خاڵە دا دەڕوات $(3, -4)$ $(2, 7)$

10 سفرەکانی نەخشە $f(x)=x^2-8x+12$ بدۆزەوە.

11 ئەم برە ئەگەر لەتوانادابوو شیتەڵبکە. $5x^2+10x-40$

12 ئەم برە شیتەڵبکە $8x^3+64$

13 هاوکێشەکانی هەموو ڕاستەهێڵە دەرکەنارەکانی ئاسۆیی و ستوونی ئەم نەخشە ڕێژەییە بنووسە $f(x)=\frac{(x+2)^2}{3x}$

14 ئەم برە ئەگەر شیتەڵ دەکرێ، شیتەڵبکە.
$6x^2+8x-15x-20$

15 ئەم برە بۆ سادەترین شێوە کورت بکەرەوە. $\dfrac{\frac{x+4}{9x^2}}{\frac{x-6}{3x^4}}$

16 کۆمەڵەی شیکاری ئەم هاوکێشەیە بدۆزەرەوە $\frac{6x+2}{3x}=6$

17 لاری ئەم ڕاستەهێڵە بدۆزەرەوە $y=8$

18 چی پێویستە بخرێتە سەر بڕی $x^2+8x$ بۆ ئەوەی ببێتە دووجای تەواو.

**چالاکییەکانی دەرەوەی پۆل.یانەی شەترەنج لە قوتابخانەیەکدا لە 12** ئەندام پێکهاتوە کە **5** گەورە و **7** یان بچوکە

19 چەند تیپ لە 6 یاریکەر پێکبێت دەتوانرێ پێکبهێنرێت بەمەرجێك بە لایەنی کەمەوە 3 **گەورەی** تێدابێت.

20 چەند تیپ لە 6 یاریکەر پێکبێت دەتوانرێت پێکبهێنرێت بە مەرجێك بەلایەنی کەمەوە 3 **بچووکی** تێدابێت.

21 چەند تیپ لە 6 یاریکەر پێکبێت دەتوانرێ پێکبهێنرێت بەمەرجێك بەلایەنی زۆرەوە 3 کوڕی تێدا بێت.

**بۆ خۆشی کۆمەڵەی چاودێری کۆمەڵایەتی بە پێی ئەم خشتەیەی خوارەوە بەملیۆنان دینار یارمەتی هەژارانیدا لە ماوەی 12 مانگدا.**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 14.8 | 2.5 | 2.9 | 3.0 | 3.7 | 4.0 |
| 5.7 | 4.8 | 4.2 | 5.6 | 6.1 | 10.6 |

22 ناوەندی خەرجی مانگێك بدۆزەرەوە.

23 مەودا و لێکنەچوون و لادانی ناوەندی و لادانی پێوانەیی بۆ پێدراوەکانی خشتەکە بدۆزەرەوە.

# بەشی حەفتەم

# ئەندازە

# Geometry

1. هەندێك لە دەسپێكەكانی ئەندازەی ئیقلیدس.
2. ڕاستەهێڵەكان و ڕووتەختەكان لە بۆشاییدا.
3. وێنە بینراوەكان.
4. چەندلا ڕێكەكان.
5. هاوڕێژەی ئەندازەیی.
6. بازنە.

پرۆژەی بەشەكە

پێداچوونەوە

تاقیكردنەوەی بەش

تاقیكردنەوەی كەڵەكەبوو

# ئەندازە Geometry

## بەشی 7

ئەندازە زانستێکی کۆن و تازەیە لە یەك کاتدا. دووهەزار ساڵە ئەندازە بەبێ دابڕان پێشدەکەوێت. ئەندازە لەکۆنەوە دەستپێکردووە و جێگای خۆی کردەوە لە کارەکانی ئەقلیدس و بەبەردەوامی لە برەودابوو تا دەگاتە کارەکانی فەیلەسوف و بیرکاریزانی فەرەنسی ڕینە دیکارت، تاکو گەیشتە سەردەمی تازە بەبەکارهێنانی بژمێرەکان و بژمێرە پێشکەوتووەکان. لەم بەشەدا فێری پەیوەندییە بنەڕەتیەکان دەبیت کە پێکهێنەرەکانی ئەندازە لە ڕووتەخت و بۆشاییدا بەیەکەوە دەبەستێتەوە. هەروەها فێردەبیت چۆن تەنەئەندازە سێ دوورییەکان وێنە بکێشیت لە ڕووتەختێکدا بەوشێوەیەی بینەرێك دەیبینێت.
هەروەها جێگۆرکێیەکی ئەندازەیی نوێ فێردەبیت کە جیاوازە لەو جێگۆرکێیانەی فێری بویت، بەوەی دووریەکان پارێزراونابێت و هەندێ شتی تریش فێردەبیت.

### وانەکان




**دەربارەی پرۆژەی بەش**

پێشتر بیرکاریزان جۆرج بێڵ ڕێسایەکی بۆ ڕووبەری چەندلا دۆزیبووەوە کە جیاوازبوو لە ڕێساکانی پێش خۆی. لەمەودوا کاغەزی خاڵدار (بەیانی) بەکاردەهێنێت و هەندێك خاڵ بەیەکدەگەیەنیت بۆ ئەوەی چەندلایەکت دەستکەوێت. و لەمەودوا شێوازێکت دەست دەکەوێت کە ڕێگات پێدەدات بەداڕشتنی ڕێسایەك بۆ هەژمێرکردنی ڕووبەری ئەم چەشنە چەندلایانە. لەدوای کۆتایی هاتنی ئەم پرۆژەیە لە تواناتدا دەبێت.

- ڕووبەرەکانی هەندێك لە شێوە ئاڵۆزەکان هەژمێربکەیت، بەبێ بەکارهێنانی ڕێساکانی ڕووبەرە پەیرەوکراوەکان.

وانەی

1

# هەندێك لە دەستپێكەكانی ئەندازەی ئیقلیدس

## Building of Eculidean Geometry



بۆچی

دەتوانین شێوە ئەندازەییەكان بەكاربهێنین لە خاڵەكان و راستەهێڵەكان و رووتەختەكان بۆ ئەوەی نموونەكانی بیركاری دروستبكەین بۆ شێوە ماددەكان ئەو نموونانە بەكاردێت، بۆ شیكاركردنی پرسیارەكان لە ژیاندا بەكاردەهێنرێت.

خەتی كاكێشانی لوولپێچ $M\,31$ لە كۆمەڵەی ئەندرۆمید وەك هاوڕێی خەتی كاكێشانی ئێمە وایە. هەروەك خەتە كاكێشەكان لە ئەستێرەكان و هەسارەكان پێكدێن، ئاواش شێوە ئەندازەییەكان لە خاڵەكان پێكدێن.

**ئامانجەكان**

- خاڵ و راستەهێڵ و رووتەخت جیا دەكاتەوە.
- پارچە راستەهێڵ و تیشك و گۆشە خاڵەكانی ڕێكی یەكتر لە یەك ئاست دەناسێت.
- لەو بەڵگەنەویستانە دەكۆڵێتەوە كە پەیوەندیان بە خاڵەكان و راستەهێڵەكان و رووتەختەكانەوە هەیە.

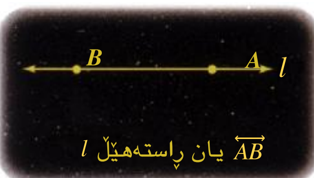
## پێكهاتە بنەڕەتییەكانی ئەندازە — Basic elements in geometry

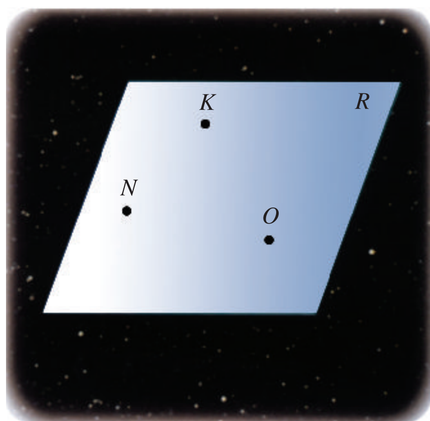
شێوە ئەندازە بنەڕەتییەكان بریتیین لە **خاڵ** و **راستەهێڵ** و **رووتەخت**. هەر ئەوانەش هەموو شێوەكان و تەنەئەندازەییەكان پێكدێنن. زاناكانی بیركاری گەیشتنە ڕێگایەكی داخراو لە پێناسەكردنی ئەم دانانە، ئەوەی لە سەری ڕێككەوتن و پەسەندیانكرد كە ئەو دانانە وەربگرن بێ ئەوەی پێناسەیان بكەن، لەگەڵ ئەوەی ئەو دانانە پێناسە نەكراون، دەتوانین لێیان بدوێین. پێشەكی پێویستە بزانین كە شێوەكان و تەنەئەندازییەكان لە جیهانی هەستپێكراوی ئێمە دانین، خاڵ پێوانەی نییە، راستەهێڵ پانی نییە ئەم پەرتووكە نواندنی شێوەكان وتەنە ئەندازەییەكانی تێدایە. بەڵام نواندن شتێكە و شێوە و تەنی ئەندازەیی شتێكی ترە. شێوەكان و تەنە ئەندازییەكان تیۆریانە تەنها لە هۆشمان هەیە.

**خاڵ** كاتێ سەیری ئاسمان دەكەیت لە شەوێكی ساماڵدا هەندێك ئەستێرەی دووری درەوشاوە دەبینیت وا دەردەكەون كە خاڵن. خاڵ بەو شوێنەوارە دەنوێنرێت كە نوكی قەڵەمەكە بەجێی دێڵی لەسەر كاغەزەكە.پێوەری ئەم نواندنە گەورە دەبێت وبچووك دەبێتەوە، لە كاتێك ئەو شوێنەوارەی كە خاڵەكە دەینوێنێ پێوانەی نییە. زۆربەی كات پیتەكانی ... $A, B, C$ بەكاردێت بۆ ناولێنانی خاڵەكان

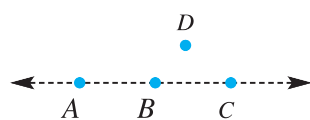



**راستەهێڵ** راستەهێڵی ئەندازەیی پانی نییە. هێڵێكە خواروخێچی تێدانییە، لە هەردوو سەرەوە بۆ ناكۆتا درێژدەبێتەوە بۆ ناولێنانی راستەهێڵ ناوی دوو خاڵی جیاواز بەكاربهێنە كە پێیاندا بڕوات لەگەڵ دانانی نیشانەی تیر لەسەر هەردوو سەرەكانی و ئەم راستەهێڵە بەم شێوەیە دەنووسرێت $\overleftrightarrow{AB}$ كە ناوی ئەو راستە هێڵەیە بە دوو خاڵی $B$ ، $A$ دەڕوات و دەتوانیت ناو لە راستەهێڵەكە بنێیت بەیەك پیت.






**ڕووتەخت** ڕوویەکی تەختە درێژدەبێتەوە بۆ ناکۆتایی لە هەموو لایەکانەوە. دەتوانیت بەشێک لە ڕووتەختێک بنوێنیت بەهەر ڕوویەک کە بەرزو نزمی تیدانەبێت. وەک ڕوویەکی مێز یان بەرگی پەرتووک. ئەو ڕوو تەختە لە وێنەی بەرامبەر دایە بەشێک لە ڕووتەختێک دەنوێنێ. بۆ ناولێنانی ڕووتەخت ناوی سێ خاڵ بنێ کە ڕووتەختەکە پێیاندا بڕوات: دەڵێین ڕووتەخت $MNO$، بەمەرجێک ئەو سێ خاڵ نەکەونە سەر ڕاستەهێڵێک و دەتوانیت یەک پیت بەکاربهێنین بۆ ناو لێنانی ڕووتەختەکە.دەڵێین ڕووتەخت $R$.




خاڵەکانی $A$، $B$، $C$ لە ڕێکی یەکترن

خاڵەکانی $A$، $B$، $D$ لە ڕێکی یەکترنین

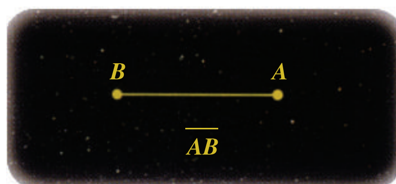
بە چەند خاڵێکی جیاواز دەڵێین لە ڕێکیەکترن ئەگەر بکەونە سەر **یەک** ڕاستەهێڵ. ئەم وێنەی بەرامبەر ڕووی دەکاتەوە کە خاڵەکانی $A$ و $B$ و $C$ لە ڕێکی یەکترن. دەڵێین ژمارەیەک لە خاڵ جیاوازەکان لەیەک ئاست دەبن ئەگەر بکەونە ناویەک ڕووتەخت. تێبینی ئەوە بکە کە دوو خاڵ هەمیشە لە ڕێکی یەکترن و سێ خاڵ هەمیشە لەیەک ئاستدان.

## پێناسەی شێوە ئەندازەییەکان بەپێی پێکهاتە بنەڕەتییەکانی ئەندازە
## Defining Figures in Terms of the Basics

دەتوانیت پێناسەی ژمارەیەک لە شێوە ئەندازییەکان بکەیت بە دەستپێکردن لە پێکهاتە بنەڕەتییەکانی ئەندازەوە. لەمەودوا پێناسەی پارچە ڕاستەهێڵ و تیشک و گۆشە دەکەین بەم شێوەی خوارەوە.

**پێناسەی پارچە ڕاستەهێڵ** **Segment Definition**

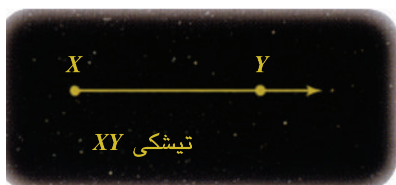
پارچە ڕاستەهێڵ **Segment** بەشێکە لە ڕاستەهێڵ لە خاڵێکەوە دەستپێدەکات و لە خاڵێکی ترەوە کۆتایی دێت **Endpoints**. دوو سەرەکانی پارچە ڕاستەهێڵەکە ئەو دوو خاڵە دیاریان دەکات.




بۆ ناو لێنانی پارچە ڕاستەهێڵ ناوی دوو سەرەکەی بەکاربهێنە، خەتێک لەسەر هەردوو ناوەکە دابنێ. پارچە ڕاستەهێڵی $\overline{AB}$ بریتیە لەو پارچە ڕاستەهێڵەی کە $A$ و $B$ دوو لایەکەی دەنوێنێ.

**پێناسەی تیشک** **Ray Definition**

تیشک **Ray** بەشێکە لە ڕاستەهێڵ کە لە خاڵێکەوە دەست پێدەکات و درێژدەبێتەوە بۆ ناکۆتا بە یەک ئاراستە. سەری تیشکەکە بریتیە لە خاڵی دەستپێکردن **Endpoints** .

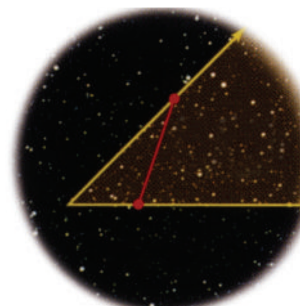



بۆ ناولێنانی تیشک ناوی خاڵی سەری تیشکەکە و ناوی خاڵێکی تر بەکاربهێنە. نوسینی تیشکی YX ئەوە دەگەیەنێت سەری تیشکەکە (X)وە بەخاڵی Y دا دەڕوات.

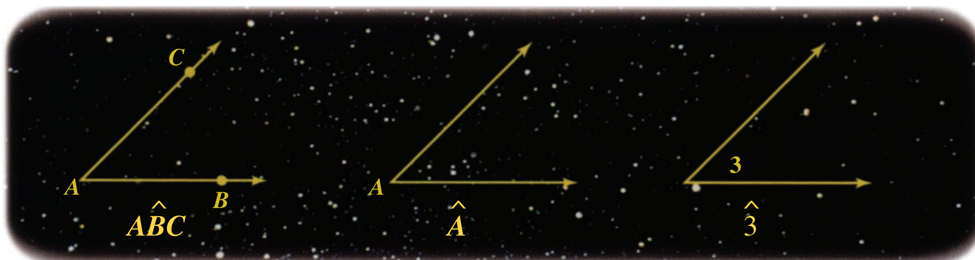
## پێناسەی گۆشە Angle Definition

گۆشە **Angle** ئەو شێوە ئەندازەییە لە ئەنجامی بەیەك گەیشتنی دوو تیشك پەیدادەبێت كە هەمان خاڵی دەستپێكردنیان هەیە. خاڵی دەستپێكردنەكە سەری گۆشەكەیە **Vertex** و دوو تیشكەكە دوو لای گۆشەكەیە **Sides** .

گۆشە ئەو ڕووتەختەی كە تێیدایە دەكات بە دوو بەشەوە دوو لاكانی گۆشەكە جیایان دەكاتەوە، ئەو دوو بەشە بریتین لە **ناوە گۆشە Interior** و **دەرەگۆشە Exterior**. ئەگەر خاڵێكی سەر یەكێك لەو دوو تیشكی گۆشە بگەیەنیت بەخاڵێكی تری سەر تیشكەكەی تر، ئەو پارچە ڕاستە هێڵەی ئەو دوو خاڵە دەگەیەنێت دەكەوێتە ناو گۆشەكەوە

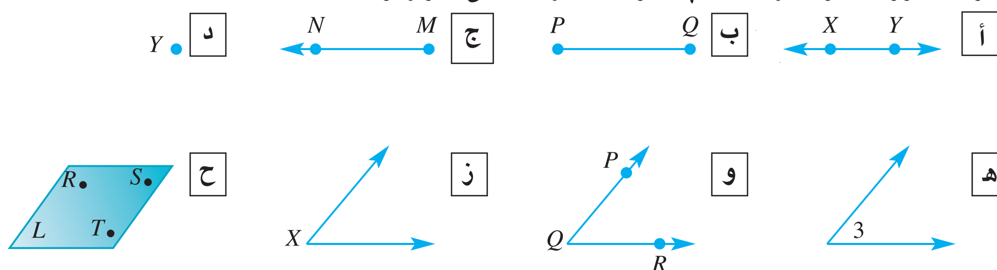


بۆ ناولێنانی هەر گۆشەیەك دەتوانرێت یەكێك لەم سێ ڕێگایانەی خوارەوە بەكاربهێنرێت ڕێگای یەكەم دانانی پیتێك وەك $D$ بۆ سەری گۆشەكە و دەخوێنرێتەوە بە گۆشەی $D$ و بەشێوەی $\hat{D}$ دەنووسرێت. ڕێگای دووەم بۆ ووردەكاری زیاتر، سێ پیت بەكاردەهێنرێت یەكێكیان بۆ سەری گۆشە و دووانەكەی تر هەریەكیان دەكەوێتە سەر لایەكی گۆشەكە،وەك گۆشەی $ABC$ كە دەنووسرێت بە شێوەی $B\ A\ C$ یان گۆشەی $C\ A\ B$ دەنووسرێت بە شێوەی $C\ A\ B$ ڕێگای سێیەم بە دانانی ڕەنووسێك لەسەر گۆشەكە وەك گۆشەی 3 دەنووسرێت $\hat{3}$.




## نموونە 1

ناوێك بنووسە بۆ هەریەك لەم شێوە ئەندازەییانەی خوارەوە.




### شیكار

أ راستەهێڵی $XY$ یان راستەهێڵی $YX$

ب $\overline{PQ}$ یان $\overline{QP}$ یان پارچە ڕاستەهێڵی $PQ$

ج تیشكی $MN$ یان $\overrightarrow{MN}$

د خاڵی $Y$

هـ $\hat{3}$ یان گۆشەی 3

و $P\hat{Q}R$ یان $R\hat{Q}P$ یان گۆشەی $RQP$

ز $\hat{X}$ یان گۆشەی $X$

ح ڕووتەختی $TSR$ یان ڕووتەختی $RTS$یان ڕووتەختی $STR$یان ڕووتەختی $SRT$ یان ڕووتەختی $RST$ یان ڕووتەختی $TSR$یان ڕووتەختی $L$ .

## یەكتربڕینی ڕاستەهێڵەكان و ڕووتەختەكان Intersection of Lines and Planes

دوو شێوەی ئەندازەیی یان دوو تەنی ئەندازەیی یان شێوە ئەندازەییەك و تەنێكی ئەندازەیی **یەكتری دەبڕن** كاتێك لە خاڵێك یان زیاتر هاوبەشبن. لەم بارەدا بە كۆمەڵەی خاڵە هاوبەشەكان دەوترێت یەكتربڕینی دوو شێوەكە یان دوو تەنەكە، یان شێوە و تەنەكە.

لەو چالاكیانەی كە لەوانەكەدایە، چەند ژمارەیەك لە بنەما بنەڕەتییەكان یان بەڵگەنەویستەكان لە ئەندازەدا فێردەبیت. ئەو بنەمایانە یەكتربڕینی شێوە ئەندازەییەكان و تەنەئەندازەكان دەگرێتەوە. ئەم بەڵگەنەویستانە ڕستەی ڕاستی شتەكانمان بۆ دڵنیادەكەن بەبێ سەلماندن.

## چالاكی

## دۆزینەوەی هەندێك بەڵگەنەویست لە بارەی توێژینەوەی نموونەیەك

**Disconering Geometry Ideas in model**

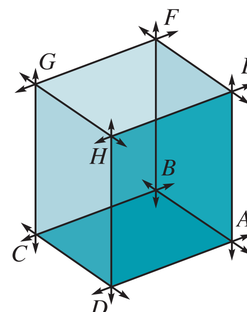
دەتوانیت بڕوانیتە وێنەی بەرامبەرت ئەمە نموونەیەكە بۆ ئەو شتانەی لە ژیانی ڕۆژانەمان دایە. وەك سندوق یان ژوور.هەر ڕستەیەك لەم ڕستانەی خوارەوە تەواوبكە بۆ ئەوەی بەڵگەنەویستەكەت دەستكەوێت.

1. سەرنجی نموونەكە بدە، دیاریبكە چۆن ڕاستەهێڵەكان یەكتری دەبڕن. یەكتربڕینی دوو ڕاستەهێڵ لە چی پێكدێت؟

**بەڵگەنەویست**

دوو ڕاستەهێڵی لەیەك ___؟___ یەكتردەبڕن.

خاڵی چاودێری ✓




ژمارەی ئەو ڕاستەهێڵانە چەندن كە لە هەر سەرێك لە سەرەكانی شێوەكە یەكتر دەبڕن؟ ئایا لەو بڕوایەدای كە ژمارەیەكی زیاتر هەیە بۆ ئەو ڕاستەهێڵانەی كە لە خاڵێكدا یەكتری دەبڕن. وەڵامەكەت ڕوونبكەرەوە بەبەكارهێنانی وێنەكە.

2. بەسەرەنجدانت لە نموونەكە جیابكەرەوە، چۆن ڕووتەختەكان یەكتری دەبڕن یەكتربڕینی دوو ڕووتەخت لە چی پێكدێت.

**بەڵگەنەویست**

دوو ڕووتەخت لەیەك ___؟___ یەكتری دەبڕن.

خاڵی چاودێری ✓

لە نموونەكە ژمارەی ئەو ڕووتەختانە چەندن كە لە هەر ڕاستەهێڵێكدا یەكتریان بڕیوە؟ ئایا لەو ژمارەیە زۆرتر هەیە ؟

3. سەرنجی دوو خاڵی $A$ و $B$ بدە. چەند ڕاستەهێڵ بەهەردوو خاڵەكەدا دەڕوات؟ ئایا دەتوانیت بیر لە ڕاستەهێڵێكی تر بكەیتەوە كە بەودوو خاڵەدا بڕوات.

**بەڵگەنەویست**

تەنها یەك ___؟___ بە دوو خاڵی جیاوازدا دەڕوات؟

ئەو ڕاستە هێڵەی بە دوو خاڵی $A$ ، $B$ دەڕوات هێما دەكرێ بە هێمای $\overleftrightarrow{AB}$

خاڵی چاودێری ✓



4. سەیری خاڵەكانی $A$ و $B$ و $C$ بكە، ئایا لەڕێكی یەكترن؟ چەند ڕووتەخت بەهەرسێ خاڵەكەدا دەڕوات؟ ئایا دەتوانیت بیر لە ڕووتەختێكی تر بكەیتەوە بەو سێ خاڵەدا بڕوات؟

**بەڵگەنەویست**

تەنها یەك ________ بەسێ خاڵدا دەڕوات كەلەڕێكی یەكترنەبن. ئەو ڕووتەختەی بەخاڵەكانی $A$ و $B$ و $C$ دا دەڕوات بەڕووتەختی $ABC$ دەناسرێت.

خاڵی چاودێری ✓

ڕووتەختێك لە ڕووتەختەكانی نموونەی پێشوو هەڵبژێرە و دوو خاڵ لە خاڵەكانی هەڵبژێرە.
ئەو ڕاستەهێڵە ناو بنێ كە بەو دوو خاڵەدا دەڕوات.ئایا ئەو ڕاستەهێڵە بەتەواوی دەكەوێتە ناو ڕووتەختەكەوە؟

**بەڵگەنەویست**

ئەو ڕاستەهێڵەی دوو خاڵی جیاواز لە ڕووتەختێكدا دەگەیەنێت دەكەوێتە ناو ____؟

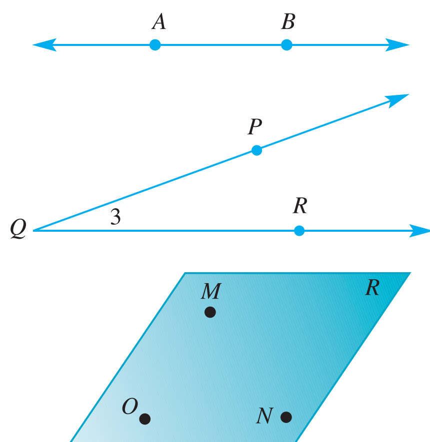
✔ خاڵی چاودێری

# ڕاهێــــــنان

## بەردەوامبوون لە بیركاریدا

1 جیاوازی چیە لە نێوان شێوە ئەندازەییەكان و شتەكان لە ژیانی ڕۆژانەدا؟
2 سەرنجی پۆلەكەت بدە. ئەو شتانە دیاریبكە كە خاڵ یان ڕاستەهێڵ یان ڕووتەخت دەنوێنی.
3 بۆچی خاڵێك بەس نیە بۆ دیاریكردن و ناونانی ڕاستەهێڵێك؟
4 بۆچی دوو خاڵ بەس نیە بۆ دیاریكردن و ناونانی ڕووتەختێك؟
5 گرنگی ڕیزی خاڵەكان لەكاتی ناونانی تیشك چیە؟ ئەمە بە وێنە ڕوونبكەرەوە.

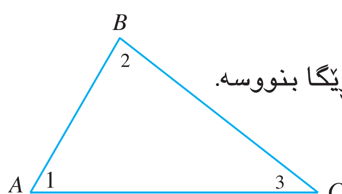
## ڕاهێنانی ئاڕاستەكراو




6 ئەم شێوەیەی بەرامبەرت بەكاربهێنە بۆ ناولێنانی خاڵ و ڕاستەهێڵ و پارچە ڕاستەهێڵ و تیشك.
7 لە شێوەی بەرامبەرت 4 ناو بۆ گۆشەكە بنووسە.
8 لە شێوەی بەرامبەرت 3 ناو بۆ ئەم ڕووتەختە بنووسە.

## ڕاهێنان و جێبەجێكردن

**سێگۆشەكە بەكاربێنە بۆ شیكاری پرسیارەكانی 9 تا 12**




9 هەموو پارچە ڕاستەهێڵەكانی سێگۆشەكە بنووسە.
10 هەموو گۆشەیەك لە گۆشەكانی سێگۆشەكە بەسێ ڕێگا بنووسە.
11 دوو تیشكی هەر گۆشەیەك لە گۆشەكانی سێگۆشەكە بنووسە.
12 ئەو ڕووتەختە بنووسە كە سێگۆشەكەی تێدایە.

## جێبەجێکردن

**ئارەزووەکان** وێنەی ئەم حەوزە ماسییەی خوارەوە بەکاربهێنە بۆ شیکاری پرسیارەکانی 13 تا 17 . ئایا هەریەك لە لە پێکهێنەرەکانی حەوزەکە خاڵ یان ڕاستەهێڵ یان ڕووتەخت دەنوێنێت؟

13 لایەك لە لاکانی حەوزەکە

14 دەنکە لم

15 ڕوویەك لە ڕووەکانی حەوزەکە

16 ڕووی ئاوەکە

17 گۆشەیەك لە گۆشەکانی حەوزەکە



ئایا ئەم ڕستانەی خوارەوە لە هەرپرسیارێك لە پرسیارەکانی 18–25 ڕاستە یان هەڵەیە. هۆیەکەی دیاریبکە.

18 ڕاستەهێڵ خاڵی سەری هەیە

19 ڕووتەخت سنووری هەیە

20 ئەگەر سێ ڕاستەهێڵ لە خاڵێکدا یەکتری ببڕن ئەوا دەکەونە یەك ڕووتەختەوە

21 دەکرێت دوو ڕووتەخت لەگەڵ ڕووتەختی سێیەم یەکتری ببڕن بەبێ ئەوەی خۆیان یەکتری ببڕن.

22 دەکرێت سێ ڕووتەخت لەیەك خاڵدا یەکتری ببڕن.

23 کام دوو خاڵ دەکەونە تەنها یەك ڕووتەخت.

24 کام سێ خاڵ دەکەونە تەنها یەك ڕووتەخت.

25 کام چوار خاڵ دەکەونە تەنها یەك ڕووتەخت.

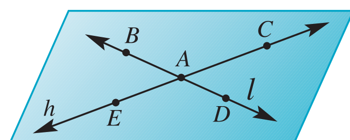
ئەم شێوەی بەرامبەر بەکاربهێنە بۆ شیکاری پرسیارەکان لە 26 تا 30 .

26 ناوی ڕاستەهێڵێك لە شێوەکە بنووسە، 3 ناوی تر بۆ ئەو ڕاستەهێڵە بنووسە.

27 خاڵێك لە سەر ڕاستەهێڵی $l$ ناوبنێ

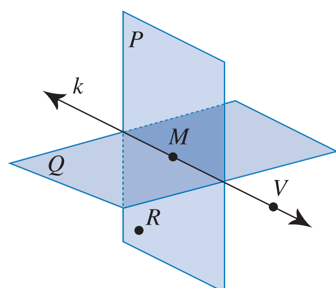
28 یەکتربڕینی دوو ڕاستەهێڵ $l$ و $h$ ناوبنێ

29 گۆشەیەك لە شێوەکە ناوبنێ، سەری ئەو گۆشەیە و ئەو دوو تیشکەی پێکیهێناوە ناوبنێ.




30 ئایا دەتوانرێت یەکێك لە گۆشەکانی شێوەکە ناوبنرێ $\hat{A}$ هۆی وەڵامەکەت دیاریبکە؟

بڕوانە ئەم شێوەی بەرامبەرت بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 31 بۆ 33

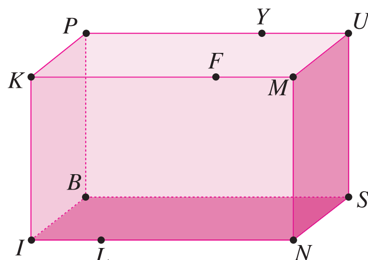



31 یەکتر بڕینی هەردوو ڕووتەختی $P$ و $Q$ ناوبنێ.

32 ڕاستەهیڵێك ناوبنێ کە بکەوێتە ناو ڕووتەختی $Q$

33 خاڵێك ناوبنێ کە بکەوێتە ناو ڕووتەختی $P$

ئەم شێوەی بەرامبەر بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 34 بۆ 37



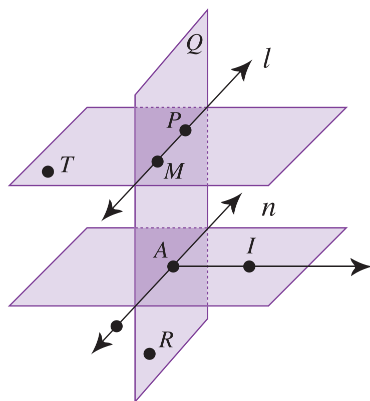

34 خاڵێك ناوبنێ لە سەر $\overline{KM}$

35 یەکتربڕینی $\overline{MU}$، $\overline{MN}$ ناوبنێ.

36 سێ خاڵ لە ڕێکی یەکتری بن ناوبنێ.

37 دوو پارچە ڕاستەهێڵ کە لەیەك ئاست بن ناوبنێ

بڕوانە شێوەی بەرامبەر بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 38 بۆ 40




38 یەکتربڕینی دوو ڕاستەهێڵ $n$ و $AI$ ناوبنێ

39 یەکتربڕینی ڕووتەختی $Q$ و ڕووتەختی $MPT$ ناوبنێ.

40 سێ خاڵ ناوبنێ کە لە یەك ئاست بن.

ژمارەی ئەو پارچە ڕاستەهێڵە جیاوازانەی کە دەتوانرێ ناوبنرێن لە هەریەك لەم شێوانەی خوارەوە چەندن؟ هەریەکیان ناوبنێ.

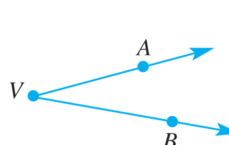



جەبر

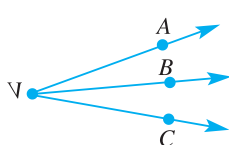
44 ڕێسایەکی گشتی بنووسە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی ئەو پارچە ڕاستەهێڵانەی کە دەتوانرێ ناویان لێبنرێت بە زانینی ژمارەیەکی دیاری کراو n لە خاڵەکان کە دەکەونە سە ر یەك ڕاستەهێڵ. ڕوونیبکەوە چۆن ڕێساکەت دۆزییەوە.

**ژمارەی ئەو گۆشە تیژانەی کە دەتوانیت ناویان لێ بنێیت لە هەریەکێك لەم شێوانەی خوارەوە چەندن؟ناوەکانیان دیاریبکە.**

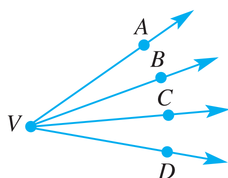
**45**




**46**

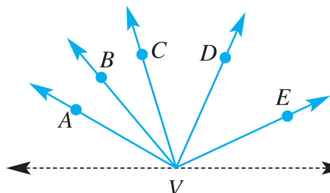



**47**




جەبر

**48** ڕێسایەکی گشتی بنووسە بۆ دۆزینەوەی ژمارەی ئەو گۆشانەی لە 180 بچووکترن کە دەتوانیت ناویان بهێنیت بە زانینی ژمارەیەکی دیاریکراو، $n$ لەو تیشکانەی کە هەمان خاڵی دەست پێکردنیان هەیە ڕوونیبکەرەوە چۆن دۆزیتەوە. وای دابنی کە هەموو تیشکەکان بکەونە دیوێکی ڕاستەهێڵەکەوە.هەروەك لەم شێوەیەی بەرامبەر ڕوونکراوەتەوە




## ڕوانین بۆ دواوە

**هاوکێشەیەك بە شێوەی لاری – یەکتربڕین بنووسە بۆ ڕاستە هێڵێك.**

**49** تەریب بێت بە ڕاستەهێڵی $y=\frac{3}{4}x-1$ و بەخاڵی $(-2, 5)$دابڕوات.

**50** ئەستون بێت لەگەڵ ڕاستەهێڵی $2x-3y=1$ و بەخاڵی $(-4, 2)$دابڕوات.

**جیاکەرەوەی ئەم هاوکێشە دووجایانە هەژماربکە. و ژمارەی ڕەگەکانی دیاریبکە. پاشان ڕەگەکان هەژماربکە**

**51** $x^2-6x+12=0$

**52** $4x^2-4x+1=0$

**53** $x^2-6x+8=0$

**ژمارەی ریزکردنەکان یان ژمارەی گونجێنەکان هەژماربکە.**

**54** ${}_8P_3$

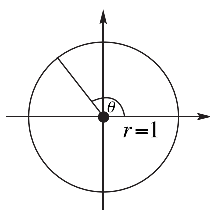
**55** ${}_9P_7$

**56** $\binom{10}{3}$

**57** $\binom{8}{4}$

## ڕوانین بۆ پێشەوە

$2\pi$ بریتیە لە چێوەی بازنەیەك کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە و نیوەتیرەکەی 1 یەکەیە لە ڕووتەختی پۆتاندا. دەتوانی درێژی ئەو کەوانەی کە چەقە گۆشەکەی $\theta$ دیاری کردووە بدۆزیتەوە بەم یاسایە. $l=\frac{\theta}{360}\times 2\pi$ ، و درێژی کەوانەکە بە $l$ هێما دەکرێت.




**درێژی کەوانەکە هەژماربکە کە هەریەك لەم گۆشانە دیاریدەکات.**

**58** $\theta=180^\circ$

**59** $\theta=90^\circ$

**60** $\theta=360^\circ$

**61** $\theta=45^\circ$

وانەی 2

# ڕاستەهێڵەکان و ڕووتەختەکان لە بۆشاییدا
## Lines and Planes in Space



**ئامانجەکان**
- پەیوەندییەکانی نێوان خاڵەکان و ڕاستەهێڵەکان و ڕووتەختەکان لە بۆشاییدا جیادەکاتەوە.
- گۆشەی دوو ڕووتەخت جیادەکاتەوە.

**بۆچی؟**
تێبینی تێکهەڵکێشی ڕاستەهێڵەکان و ڕوتەختەکان لە زۆرشتدا دەکەیت هەروەک چۆن دەردەکەوێت لە پارچەکانی کریستاڵدا. هەستکردن بە پەیوەندییەکانی نێوان ڕووتەختەکان و ڕاستەهێڵەکان لە بۆشاییدا بە پێویست دادەنرێت بۆ تێگەیشتنی زۆر لە بنیاتەکانی سروشت.

## Figures in Space تەنە ئەندازەییەکان

زۆر ڕووەکان **Polyhedron** تەنێکی داخراوە لەبۆشاییدا و لە ژمارەیەک ڕووی تەخت پێکدێت کە هەریەکەیان شێوەی چەندلایەک وەردەگرێ.

**زۆر ڕووەکان Plolyhedron**

زۆر ڕووەکان تەنیکی داخراون لە بۆشاییدا لە ژمارەیەک ڕووی تەخت پێکدێت هەریەکەیان شێوەی چەندلایەک وەردەگرن. ئەو چەند لایانە پێیان دەوترێت ڕووەکانی **Faces** تەنەکە. ئەم ڕووانە یەکتری دەبڕن لەچەند پارچە ڕاستەهێلێك کە پێیان دەوترێت لاکانی زۆر ڕووەکە. سەرەکانی زۆر ڕووەکان بریتین لە سەرەکانی چەندلاکانی کە ڕووەکانیان **Vertices** پێکهێناوە.

سەر
لا
ڕوو

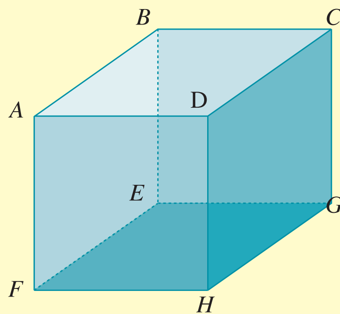
هەندێك ڕوو هەیە لەوانەی تر زۆرتر دەیان ناسی وەك خشتەك (شەشپاڵو)، شەشپاڵۆ تەنێکی بۆشایی گرە شەش ڕوو و 12 لا و 8 سەری هەیە. شەشپاڵوو کە بەسیفەتێکی گرنگ ناسراوە ئەوەش ئەوەیەکە هەموو ڕووەکانی چوارگۆشەی جووتن لەسەریەکتری و هەرسەرێك لە سەرەکانی خاڵی بەیەگەیشتنی سێ ڕوویەتی و پێی دەوترێت زۆر ڕووی ڕێك **Regular Polyedron**. بەشێوەیەکی گشتی بەزۆر ڕوویەك دەوترێت ڕێك **Regular** ئەگەر هەموو ڕووەکانی چەندلای جووت بن، و هەر سەرێك لە سەرەکانی خاڵی بەیەك گەیشتنی هەمان ژمارەی ڕووەکان بێت.

## ڕاستەهێڵەکان و ڕووتەختەکان لە بۆشایی: ڕێگای هەنگاو بە هەنگاو
## Lines and Planes in Space: A Step-by-Step Procedure

لەم چالاکییانەی خوارەوە لەمەودوا چەند بۆچونێك دەدۆزیتەوە لە بارەی پەیوەندیەکانی نێوان ڕووتەختەکان و ڕاستەهێڵەکان لە بۆشاییدا و هەڵدەستێت بە برەوپێدانیان.

### چالاکی 1

### ڕاستەهێڵ و ڕووتەختە تەریبەکان لەبۆشاییدا
### Plane and Parallel Lines in Space




**بەشی یەکەم**

1. شەشپاڵویەك بکێشە و سەرەکانی ناوبنێ هەروەك ڕوونکراوەتەوە لە شێوەی بەرامبەردا. ناوی لاکانی ستونی شەشپاڵووەکە بنووسە. ئایا وا دەردەکەوێت کە هەردوو ڕاستەهێڵی $AE$ و $CG$، لەیەك ڕووتەختدابن؟وا دەردەکەون کە تەریبن بەیەکتری؟ ئایا لەو باوەڕەدایت کە ئەم دووڕاستەهێڵە بەیەکبگەن کاتێك درێژبکرێنەوە تاناکۆتا؟

2. کام لە لایەکانی شەشپاڵووەکە تەریبن بەیەکتری؟ — خاڵی چاودێری ✓

3. ئایا لێرەدا لا هەیە تەریب نەبێت لەگەڵ ئەوەی بەیەکتری ناگەن ئەگەر درێژیش بکرێنەوە بۆ ناکوتا؟ هۆیەکەی دیاربکە. بەم ڕاستەهێڵانەی کە ئەم لایەنە دەنوێنن پێیان دەوترێت تەکوڵۆ Skew چوار جووت لەو ڕاستەهێڵە تەکولۆیانە دیاربکە لەوێنەکەدا

**بەشی دووەم**

1. ژمارەی ڕووەکانی شەشپالووەکە چەندن؟ کام لەم ڕووانە تەریبن بەیەکتری؟

2. پێناسەی تایبەتی خۆت بنووسەبۆ ڕووتەختە تەریبەکان.بەتەواوکردنی ئەم ڕستەیەی خوارەوە. — خاڵی چاودێری ✓

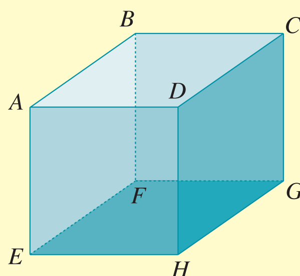
**پێناسەی ڕووتەختە تەریبەکان Parallel Planes**

دوو ڕووتەخت تەریب دەبن تەنها ئەگەر ___؟___.

**تێبینی** دوو شێوەی ئەندازەیی تەریب دەبن، تەنها ئەگەر بکەونە دوو ڕووتەختی تەریب.

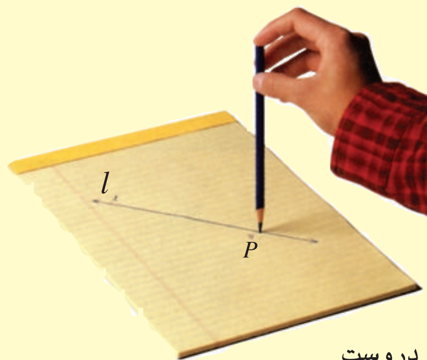
### چالاکی 2

### پارچە ڕاستەهێڵەکان و ڕووتەختەکان Segments and Plane




**بەشی یەکەم**

1. هەر ڕاستەهێڵێك لایەك لە لاکانی شەشپالوی بەرامبەر دەنوێنێت ئەستون دەبێت لە سەر دوو ڕووی جیاوازی خشتەکەکە. لیستێك دروست بکە بەو ڕاستەهێڵانەی لاکانی خشتەکەکەیان پێکهێناوە لەگەڵ دیاریکردنی دوو ڕووی ئەستون لەگەڵ هەریەك لەو ڕاستەهێڵانە.




2. که دەڵێین ڕاستەهێڵێك ئەستونە لەگەڵ ڕووتەختێك ئەمە مانای چی دەبەخشێت بۆتۆ؟ ڕاستە هێڵی $l$ لەسەر کاغەزێك بکێشە و خاڵێکی وەك $P$ ی لەسەر دیاریکە. قەڵەمەکە لەسەر ڕووتەختی کاغەزەکە بەستوونی ڕاگرە و سەرەکەی لە خاڵی $P$ بێت. ئایا قەڵەمەکە لەسەر ڕاستەهێڵی $l$ ئەستوون دەبێت.

3. ئایا دەتوانیت قەڵەمەکە لاربکەیتەوە بەمەرجێك هەر ئەستون بێت لەسەر ڕاستەهێڵی $l$ بەبێ ئەوەی ئەستوون بێت لەسەر ڕووتەختی کاغەزەکە؟ وێنەیەك دروست بکە، ئەم وەڵامەت ڕوونبکاتەوە.

4. وێنەی ڕاستەهێڵێکی تازە $m$ بکێشە کە بە خاڵی $P$ دا بڕوات. سەری قەڵەمەکە لەسەر خاڵی $P$ دابنێ، بەمەرجێك قەڵەمەکە ئەستوون بێت لەگەڵ هەریەك لە دوو ڕاستەهێڵی $l$ و $m$ پەیوەندی نێوان قەڵەمەکەو ڕووتەختی کاغەزەکە چ جۆرە پەیوەندیەك دەبێت؟

5. ژمارەیەکی تر ڕاستەهێڵ بکێشە کە بەخاڵی $P$ دابڕۆن. ئەگەر قەڵەمەکە ئەستون بێت لەسەر ڕووتەختی کاغەزەکە، ئایا ئەستون دەبێت لەگەڵ ئەو ڕاستەهێڵانەی کەلەخاڵی $P$ کێشراون.

6. پێناسەی تایبەتی خۆت بنوسە بۆ ڕاستەهێڵی ئەستون لەسەر ڕوووتەخت بە تەواوکردنی ئەم ڕستەیەیی خوارەوە.

خاڵی چاودێری ✔

**پێناسە**

ڕاستەهێڵێك ئەستون دەبێت لەسەر ڕووتەختێك لە خاڵێك لە خاڵەکانیدا ئەگەرو تەنها ئەگەر ئەستون بێت لەسەر هەموو ئەو ڕاستەهێڵانەی دەکەونەوە ڕووتەختەکەوە و دەڕۆن بە ____؟

**بەشی دووەم**

ڕاستەهێڵ تەریب دەبێت بەڕووتەختێك ئەگەر نەیبڕێت.



1. هەموو لایەك لە لاکانی شەشپاڵوویەك تەریبە بە دوو ڕوو لە ڕووەکانی شەشپاڵووەکە (سەیری پرسیاری 1 لە بەشی یەکەم بکە) لیستێك دروستبکە بەلاکانی شەشپاڵووەکە، دوو ڕووی تەریبی بەرامبەری هەر لایەك دیارییکە.

2. ڕاستەهێڵی $l$ لە سەر کاغەزێك بکێشە. قەڵەمەکەت بگرە بەمەرجێك بەرزتربێت لە ڕووتەختی کاغەزەکە و تەریب بێت بەڕاستەهێڵی $l$. ئایا قەڵەمەکە وا دیاردەبێت کە تەریب بێت بە ڕووتەختی کاغەزەکە؟

3. قەڵەمەکە بسورێنە بەمەرجێك هەرتەریب بێت بە ڕووتەختی کاغەزەکە و بێ ئەوەی تەریب بێت بە ڕاستەهێڵی $l$. ئایا لەو بڕوایە دایت کە لە توانات دا دەبێت ڕاستەهێڵێکی تر بکێشێت لە کاغەزەکەدا بەمەرجێك تەریب بێت بە قەڵەمەکە لەو بارەی تازەیدا؟

4. سیفەتێك لە سیفەتەکانی ڕاستەهێڵی تەریب بە ڕووتەختێك بنووسە بە تەواوکردنی ئەم ڕاستیەی خوارەوە.

خاڵی چاودێری ✔

**پێناسە**

ڕاستەهێڵێك تەریب دەبێت بەڕووتەختێك نەکەوێتە ناویەوە ئەگەرو تەنها ئەگەر تەریب بێت بە ____؟ بکەوێتە ناو ئەو ڕووتەختە.

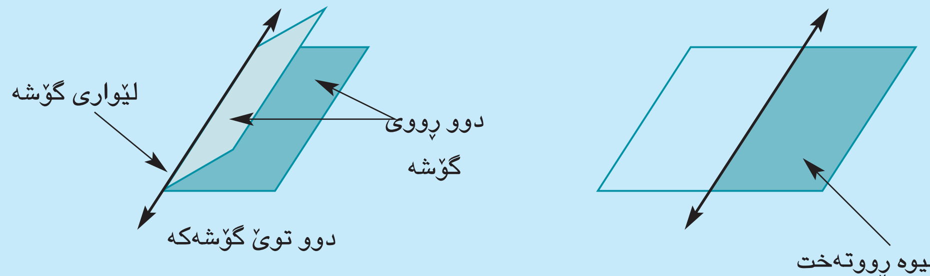
## Angles Formed by Planes — گۆشەی دوو ڕووتەخت

هەر ڕاستەهێڵێك بكەوێتە ڕووتەختێكەوە دابەشی دەكات بە دوو بەشەوە هەربەشێكیان پێی دەوترێت نیوە ڕووتەخت و بەو ڕاستەهێڵە دەوترێت لێواری نیوە ڕووتەختەكە.

### دوو توێ گۆشە Dihedral Angle

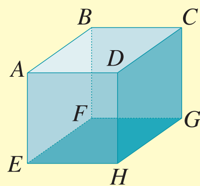
**دوو توێ گۆشە Dihedral Angle** بریتییە لەو شێوە بۆشاییەی كە لە دوو نیوە ڕووتەخت پێكدێت كە هەمان لێواریان هەیە.

هەریەك لەدوو نیوە ڕووتەختەكە پێی دەوترێت **ڕووی Face** گۆشەكە و بەلێوارە هاوبەشەكەی نێوانیان دەوترێت **لێواری گۆشەكە Edge of the Angle**.

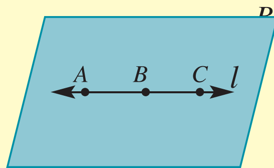



### چالاكی 3

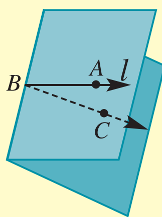
## Measure of a Dihedral Angle — پێوانی دوو توێ گۆشە




1. هەندێك ڕووەكانی شەشپاڵوو دوو توێ گۆشەی وەستاوپێك دێنن (واتە ئەو دوو ڕووەی ئەستوونن لە سەر یەكتری). هەر ڕوویەك لە ڕووەكانی شەشپاڵووكە ئەستون دەبێت لەگەڵ ژمارەیەك لە ڕووەكانی تر. ئەو ژمارەیە چەند دەبێت؟




2. ڕاستەهێلێكی ئاسۆیی $l$ لەسەر كاغەزێك بكێشە و لەسەر ئەو ڕاستەهێڵە سێ خاڵی $A$ و $B$ و $C$ دیاربیكە بەمەرجێك خاڵی $B$ بكەوێتە نێوان هەردوو خاڵەكەی تر. كاغەزەكە بنوشتێنەوە بە مەرجێك هەردوو نیوەی ڕاستەهێڵی $l$ كە سنووردراون بەخاڵی $B$ جووتبن، پەیوەندی چییە لەنێوان ڕاستەهێڵی نوشتێنراو و ڕاستەهێڵی $l$ ؟




3. كاغەزەكە لەسەرخۆ بكەوە بۆ ئەوەی بۆ دوو توێ گۆشەیەكت دەست بكەوێت پێوانەی گۆشەی $ABC$ دادەنرێت بە پێوانەی دوو توێ گۆشەكە.

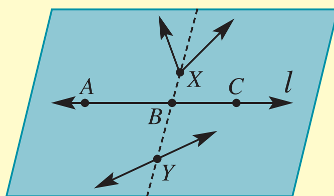
4. پێناسەی تایبەتی خۆت بنووسە بۆ پێوانەی دوو توێ گۆشە بە تەواوكردنی ئەم ڕستەیەی خوارەوە.

خاڵی چاودێری ✓

### پێوانەی دوو توێ گۆشە Measure of a Dihedral Angle

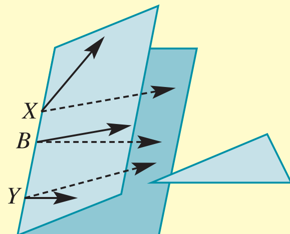
پێوانەی گۆشەیەكە سەرەكەی لەسەر لێواری دووتوێ گۆشەكە بێت و دوو لاكانی ______ ؟ لەگەڵ ئەو لێوارە، و هەریەكێكیان بكەونە ڕوویەك لە دوو ڕووی دوو توێ گۆشەكە.

5. کاغەزەکە بکەوە و رایبخە. ڕاستەهێڵێکی نوشتێنراوە بکێشە و دوو خاڵی $X$ و $Y$ لەسەر دیاربکە. لە و دوو خاڵەوە دوو تیشك بکێشە کە هەریەکیان بکەونە لایەکی ڕاستەهێڵە نوشتاوەکەوە هەروەك لە وێنەی بەرامبەر ڕوونکراوەتەوە




خاڵی چاودێری ✔

6. کاغەزەکە جارێکی تر بنوشتینەوە. لە دوایدا پارچە کاغەزەکە بەوردی ببڕە کە بتوانیت بیخەیتە ناو هەموو گۆشە جیاوازەکان کە دروست بووە لە ئەنجامی تیشکە کێشراوەکان، شێوەکانی پارچە کاغەزەکانی دەستت کەوتووە بەراوردبکە. ئایا پێوانەی ئەو گۆشانەی دروستبووە لەئەنجامی کێشانی تیشکەکان یەکسانن بە پێوانەی $ABC$ یان جیاوازە لێی؟




7. ئەو سێ گۆشەیەی لە پرسیاری 6 دەستتکەوتووە پێوانەبکە و پێوانەکانیان بەراوردبکە، کام گۆشەیان بچووکترە ؟ کام گۆشەیان گەورەترە؟ ئەو ئەنجامانە بەکاربهێنە بۆ ئەوەی ڕوونیبکەیتەوە بۆچی دوو توێ گۆشە دەپێورێ بە پێوانی ئەو گۆشەیەی دوو لاکەی ئەستوونن لەسەر لێواری دوو گۆشەکە.

**تێبینی** : 1. پێوانەی دوو توێ گۆشە یەکسانە بە پێوانەی ڕووە گۆشەکەی

2. ڕووە گۆشە بۆ دوو توێ گۆشە ئەو گۆشەیە کەدوو لایەکانی ئەستوونن لەگەڵ لێواری دوو توێ گۆشەکەو هەریەکێکیان دەکەونە ڕوویەك لە دوو ڕووەکەیەوە.

## ڕاهێــــــنـــــان

### بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1 لە بۆشاییدا ئەگەر دوو ڕاستەهێڵ ئەستوون بن لەسەر ڕاستەهێڵی سێیەم. ئایا ئەو دوو ڕاستەهێڵە بەیەکتر تەریب دەبن؟ هۆی وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

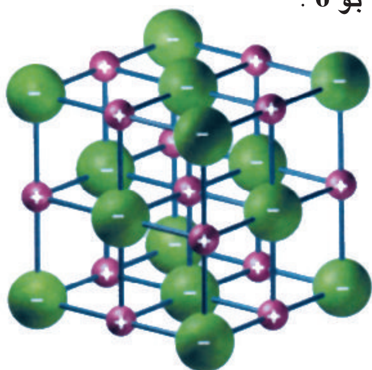
2 ئەگەر ڕاستەهیلێك بکەوێتە ڕووتەختێك و ئەستون بێت لەسەر ڕاستەهێڵێکی تر کە نەکەوێتە ڕووتەختەکەوە، ئایا ڕاستەهێڵی دووەم ئەستون دەبێت لەسەر ڕووتەختەکە؟ هۆی وەڵامەکەت بنووسە.

3 ئەگەر ڕاستەهێڵێك ئەستوون بێت لە سەر دوو ڕاستەهێڵی یەکتربڕی ناو ڕووتەختێکەوە ئایا ئەستون دەبێت لە سەر ڕووتەختەکەیان؟ هۆی وەڵامەکەت دیاربکە

جێبەجێکردنەکان

کیمیا

**ئەو شێوەیەی بەرامبەر پێکهاتەی سێجایی نموونەی کریستاڵی کلۆریدی سۆدیۆم ڕووندەکاتەوە. خاڵەکانی یەکتربڕینی ئەو پارچە ڕاستەهێڵانەی کە دەیبینیت ناویان لێبنێ و بەکاریان بهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 4 بۆ 6 .**



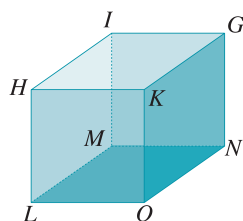
4 دوو پارچە ڕاستەهێڵی تەریب بەیەکتر دیاربکە. و هۆی تەریب بوونەکەیان ڕوونبکەوە.

5 دوو ڕووتەختی تەریب بەیەکتر دیاربکە. هۆی تەریب بونەکەیان ڕوونبکەرەوە.

6 دوو ڕووتەختی ئەستوون دیاربکە، هۆی ئەستوون بوونەکەیان ڕوونبکەوە.

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

**وێنەی ئەم خشتەکەی بەرامبەرت بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 7 تا 11**



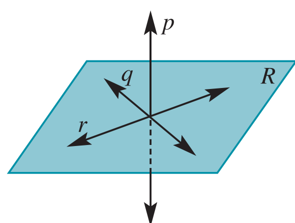

**7** دوو جووت لە لاتەریبەکان دیاربکە

**8** دوو جووت لە لا تەکولۆکان دیاربکە

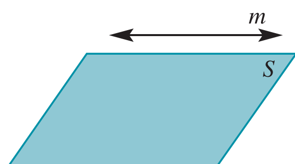
**9** دوو جووت لە ڕووە تەریبەکان دیاربکە

**10** دووڵا دەستنیشانبکە و ئەو ڕووختەتانە دیارییبکە کە ئەستونن لەسەر هەر یەکێکیان.

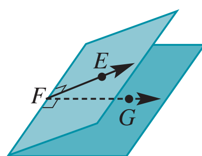
**11** دوو جووت لەلاتەریبەکان دیاربکە کە ناکەونە ناو یەك ڕووەوە.




**12** ڕاستەهێڵی $p$ لە وێنەی بەرامبەر ئەستونە لەسەر ڕووتەختی $R$ پەیوندی نێوان ڕاستەهێڵی $p$ و ڕاستەهێڵی $q$ و هەروەها نێوان ڕاستەهێڵی $p$ و ڕاستەهێڵی $r$ چییە؟

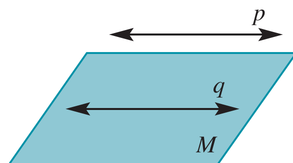



**13** لە وێنەی بەرامبەر ڕاستەهێڵی $m$ تەریبە بە ڕووتەختی $S$، پەیوەندی نێوان ڕاستەهێڵی $l$ و ئەو ڕاستەهێڵەی دەکەوێتە ڕووتەختی $S$ و چییە؟

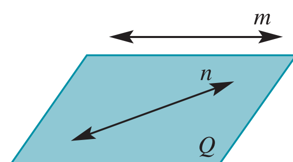



**14** لە وێنەی بەرامبەردا پێوانەی دوو توێ گۆشەکە چەندە؟

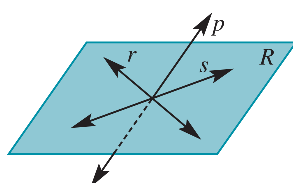
## ڕاهێنان و جێبەجێکردن




**15** لە وێنەی بەرامبەردا ڕاستەهێڵی $p$ تەریبە بەڕاستەهێڵی $q$ پەیوەندی چییە لە نێوان ڕاستەهێڵی $p$ و ڕووتەختی $M$




**16** لە وێنەی بەرامبەر ڕاستەهێڵی $m$ تەریب نییە بە ڕاستەهیڵی $n$. چی دەڵێیت بە پەیوەندی نێوان ڕاستەهێڵی $m$ و ڕووتەختی $Q$ ؟ ڕوونیبکەوە.




**17** لە وێنەی بەرامبەردا ڕاستەهێڵی $p$ ئەستوونە لەسەر ڕاستەهێڵی $r$ و ئەستوون نیە لەسەر ڕاستەهێڵی $s$ چی دەڵێیت بە پەیوەندی نێوان ڕاستەهێڵی $p$ و ڕووتەختی $R$ ؟

**ئایا ئەم ڕستانە لە هەر پرسیارێك لە پرسیارەكانی 18-22 ڕاستن یا هەڵەن؟ بۆچونەكانت بە وێنە ڕوونبكەرەوە.**

18 ئەگەر دوو ڕاستەهێڵ تەریب بن بە ڕاستەهێڵی سێیەم ئەوا خۆشیان تەریب دەبن.

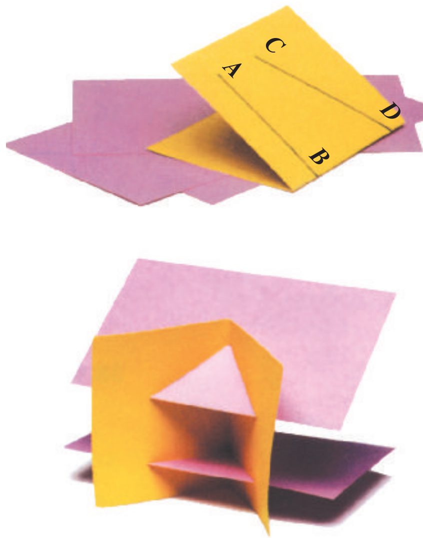
19 ئەگەر دوو ڕووتەخت تەریب بن بە ڕووتەختی سێیەم ئەوا خۆشیان تەریب دەبن.

20 ئەگەر دوو ڕووتەخت ئەستون بن لەگەڵ ڕووتەختی سێیەم ئەوا خۆشیان تەریب دەبن.

21 ئەگەر دوو ڕووتەخت ئەستون بن لەگەڵ ڕاستەهێڵێك ئەوا خۆشیان تەریب دەبن.

22 ئەگەر دوو ڕاستەهێڵ ئەستون بن لەگەڵ ڕووتەختێك ئەوا خۆشیان تەریب دەبن.

**ئەو نموونەیەی كە دروستی دەكەیت بە پێی ڕێنمایەكان لە پرسیاری 23 بەكاریبهێنە بۆ شیكاركردنی پرسیارەكان لە 24 تا 26 .**




23 پارچە كارتۆنێكی لاكێشەیی بنوشتێنەوە، لەسەر یەكێك لە دوو بەشەكەی، دوو ڕاستەهێڵی $AB$ و $CD$ بكێشە بە مەرجێك $AB$ ئەستون بێت لەسەر هێڵە نوشتاوەكە، ڕاستەهێڵی $CD$ ئەستون نەبێت لەسەر هێڵە نوشتاوەكە پارچەیەك ببڕە بە پێی دوو ڕاستەهێڵەكە و دەستپێبكە لە هێڵی نوشتانەوەكە. ئەو دوو پارچە بڕاوەی كە دروستت كردن بخەرە ناوەوە بۆ دروست كردنی نموونەیەك.

24 لە دوو پارچە بڕاوەكە كامەیان ئەستون نییە لە سەر هێڵی نوشتێنراوە؟

25 لە دوو پارچە بڕاوەكەی خراوتە نێوانەكەوە كامەیان دەتوانرێ بەكاربهێنرێت بۆ پێوانی دوو توێ گۆشەكە؟

26 كام لە دوو توێ گۆشەكە كە سنووردراوە بە دووپارچەكانی دانراو گەورەترین پێوانەی هەیە؟



## ڕاهێنان بۆ دواوە

پرگاڵ و ڕاستە بەکاربهێنە بۆ کێشانی وێنەکان لە پرسیارەکانی 27 بۆ 30 .

**27** گۆشەی $ABC$ بکێشە و لە دواییدا کۆپیەکی وەک خۆی دروستبکە.

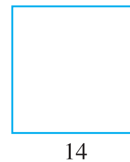
**28** پارچە ڕاستەهێڵێك بکێشە و لە دواییدا تەوەرەکەی دروستبکە.

**29** ڕاستەهێڵی $FG$ و خاڵی $H$ کە دەکەوێتە دەرەوەی بکێشە. ئەو ڕاستەهێڵە دروستبکە کە بەخاڵی $H$ دادەڕوات و تەریبە بە ڕاستەهێڵی $FG$ .

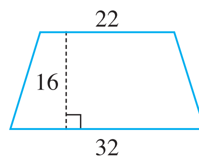
**30** سێگۆشەیەك بکیشە لە دواییدا کۆپیەکی وەك خۆی دروستبکە.

ڕووبەری ئەم چەندلایانە هەژمارەبکە:

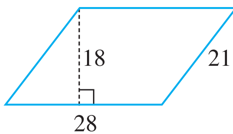
**31** چوارگۆشە



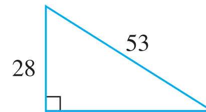

**32** نیمچە لاتەریب



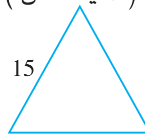

**33** لاتەریب



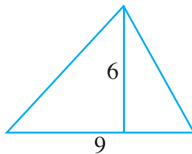

**34** سیگۆشەی وەستاو




**35** سیگۆشەی ڕێك ( لا یەکسان )




**36** سیگۆشەی جیالا

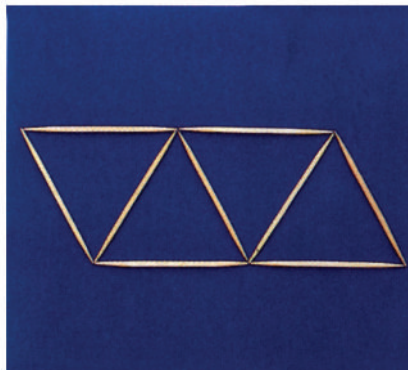


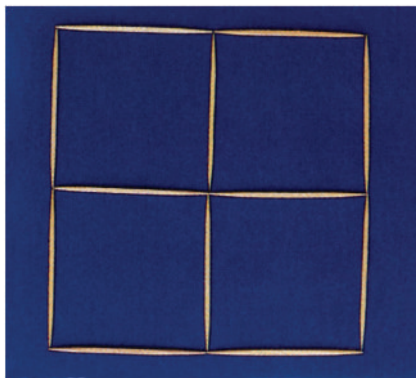

## ڕاهێنان بۆ پێشەوە

**بەرەنگاری**

**37** تەنها دوو دەنکە شقارتە بجوڵێنە لەم وێنەیەی خوارەوە بۆ ئەوەی وێنەیەکت دەستکەوێت تەنها سێ سێگۆشەی تێدابێت.

**38** تەنها سێ دەنکە شقارتە بجوڵێنە لەم وێنەیەی خوارەوە بۆ ئەوەی وێنەیەکت دەستدەکەوێت تەنها سێ سێگۆشەی تێدابێت.





وانەی 3

# وێنە بینراوەکان Perspective Drawing



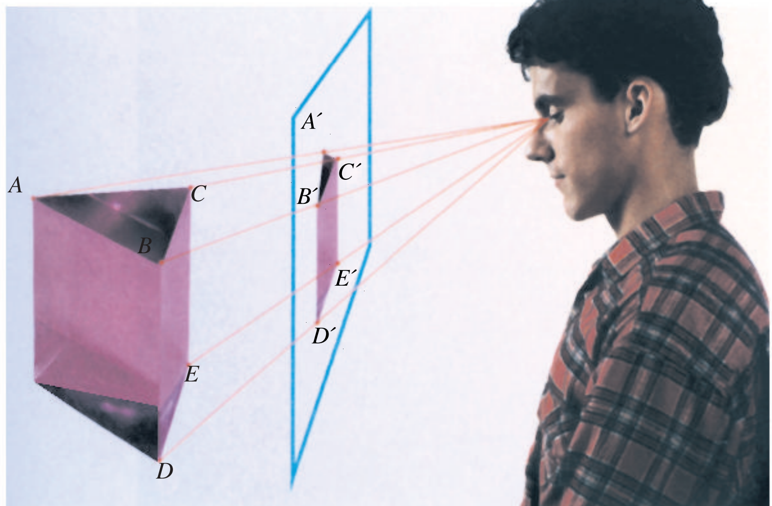

**ئامانجەکان**

- چەمکە بنەڕەتییەکانی وێنە بینراوەکان دەناسێت.
- ئەو چەمکانە بۆ کێشانی وێنە بینراوەکان بەکاردەهێنێت.

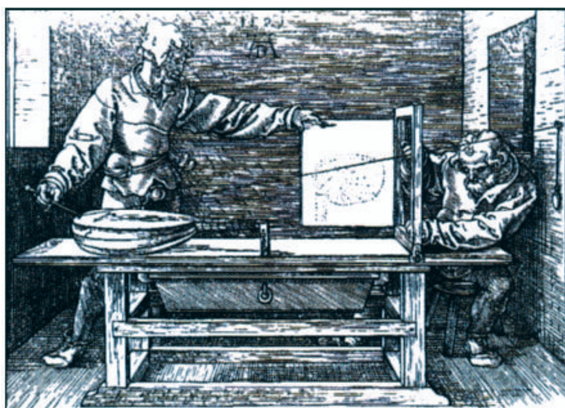
هونەرمەندە ئەوروپیەکان لە چەرخی سەرهەڵدان، لە نێوان هەردوو سەدەی چواردە و شازدەی زاینی گەڕانەوە بۆ دواوە و دۆزیانەوە چۆن هەستێکی قوڵ لە وێنەکان و تابلۆ هونەریەکان پەیدابکەن. بە دەستپێکردن لەکارە هونەریە کلاسیکیەکانی یۆنان و ڕۆمان .دەتوانیت تێبینی ئەوە بکەیت چۆن کارەکانی پێشوو لەسەردەمی ڕاپەڕین دەردەکەوێت (لە وێنەی لای ڕاست) بەبەراوردکردن لەگەڵ تابلۆکانی ئەم سەردەمە(لە وێنەکەی لای چەپ).

## وێنەی بینراو: پەنجەرەیەك لەسەر ژیانی ڕۆژانە Windows to Reality

ڕێگاکانی وێنە بینراوەکانی نوێ لە سەردەستی تەلارسازی ئیتاڵی فلیب برنولیتشی دۆزرایەوە ( 1377-1466م). ئەم ڕێگایانە پشت دەبەستن بە بیرۆکەیەکی بنەڕەتی ئەویش بریتییە لەوەی کە وێنە وەك پەنجەرە وایە. ئەو هونەرمەندەی هەوڵدەدات تابلۆیەك بکێشێت یان ئەو کەسەی سەیری تابلۆیەکی هونەری ئامادەکراو دەکات، لە ڕێگای وێنەکە شتە ڕاستەقینەکان ببینێت کە تابلۆکە دەینوێنێت. کاتێك کەسێك دەڕوانێتە شتێك هێڵەکانی بینینی خەیاڵی دادەنێت، کە چاو و هەموو خاڵە جیاوازەکانی ئەو شتەی پێکهیناوە بەیەکەوە دەبەستیت. وادابنێ لێرەدا ڕووتەختێك هەیە (شووشە) بکەوێتە نێوان چاوی بینەرو ئەو شتەی سەیری دەکات. هەموو هێڵەکانی ڕوانینی ئەم ڕووتەختە بریتییە لەو خاڵانەی کە وێنەی شتەکە پێکدێنێت. وا دەردەکەوێت هەر وەکو جێکەوتەکەی بێت لەسەر ڕووتەختەکە، بۆیە دەتوانین بڵێین وێنەی شتێك بریتیە لە جێکەوتەکەی لە سەر ڕووتەختی وێنەکە **Picture Plane**




پەنجەرەی ڕووتەختی وێنەکە جێکەوتی ئەوەی دەیبینیت لە خۆدەگرێت



هونەرمەندی ئەڵمانی ئەلبەرت دو سەردانی ئیتاڵیای کرد بۆ فێربوونی تەکنیکی وێنە بینراوەکان لەدواییدا وێنەی کۆمەڵێك کاری هونەری کێشا کە هونەرمەندەکان ئەم جۆرە تەکنیکەیان تێدا بەکارهێناوە هەروەك لە تابلۆیەی بەرامبەردا دەردەکەوێت.

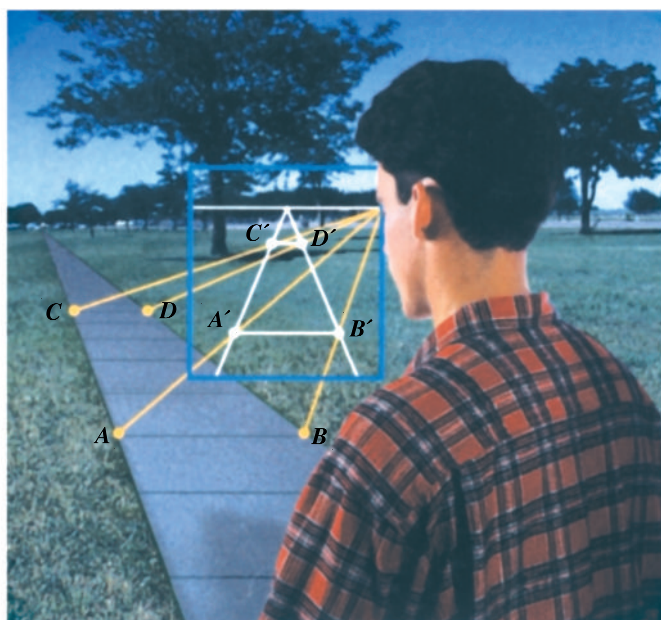
**خاڵی چاودێری** ✔ سەیری تابلۆکەی (دورر) لەسەرەوە بکە و باسیبکە چۆن هونەرمەند ئەو تەکنیکەی بەکارهێناوە بۆ ڕوونکردنەوەی جێکەوتی شتێك لەسەر ڕووتەختی وێنەکە.

## هێڵە تەریببەکان و خاڵی پوکانەوە Parallel Lines and Vanishing Points



ئایا سەرنجت داوە کە دووڵای هێڵی ئاسن یان دووڵای ڕێگایەکی درێژی ڕاست وا دەردەکەون کە لە دوور بەیەکتری دەگەن؟ ئەو خاڵەی کەوا دەردەکەوێت ئەو هێڵانەی تێدا بەیەك دەگەن هەمیشە لە ئاسۆدا دەبن پێی دەوترێت خاڵی پوکانەوە لە وێنە بینراوەکاندا

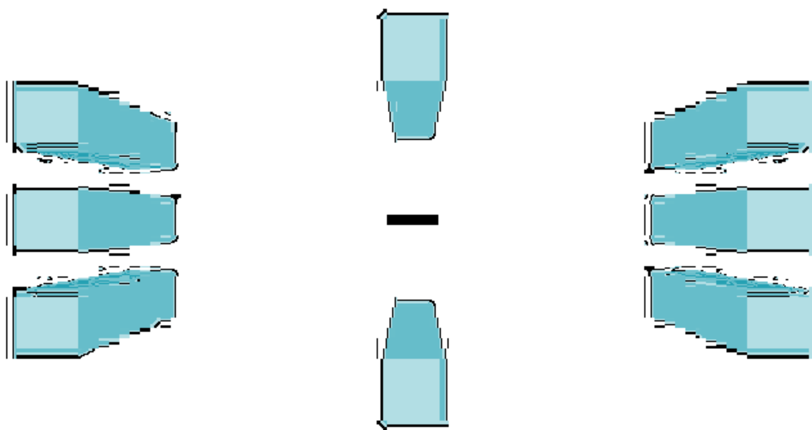
بۆ هەردوو پارچە ڕاستەهێڵی $AB$، $CD$ هەروەك دەردەکەون لە وێنەکەی خوارەوەدا لە ڕاستیدا یەك درێژیان هەیە کاتێك بینەر ئەمانە دەخاتە سەر ڕووتەختی وێنەیەك شێوەی $\overline{AB}$ وا دەردەکەوێت درێژترە لە شێوەی $\overline{CD}$ .



ئەم دوو پرێسایەی لەم وانەدا دێت دەبێتە بنچینە بۆ تێگەیشتنی چەمكەكانی وێنەی بینراوەكان. دەتوانرێت راستی ئەم دوو پرێسایە بسەلمێنین بە خوێندنی ئەو رێگایەی كە بە هۆیەوە جێكەوتی هێڵە تەریبەكان لە سەر رووتەختی وێنەكە لە وێنەی بینراوەكە دەهێنرێتەدی.

**Principle 1: Sets of Parallel Lines پرێسای 1 : كۆمەڵەكانی هێڵە تەریبەكان**

لەوێنەی بینراودا هەموو راستەهێڵە تەریبەكان، ئەوانەی تەریب نین بە رووتەختی وێنەكە، لە یەك خاڵدا بەیەك دەگەن كە پێی دەوترێت خاڵی پوكانەوە.



**خاڵی چاودێری** ✔

ئایا لەوباوەڕەدای كە ئەو خاڵەی وا دەردەكەوێت كە هەموو راستەهێڵە تەریبەكان لەویدا بەیەكدەگەن پێویستە لە وێنەكەدا بێت؟ وێنەیەك بەكاربهێنە بۆ روونكردنەوەی ئەوە.

**Principle 2: Lines Parallel to the Ground پرێسای 2 : هێڵەكانی تەریب بە زەوی**

لە وێنەی بینراودا، هەر راستەهێڵێك بكەوێتە رووتەختی زەوی و تەریب نەبێت بە رووتەختی وێنەكە، بە هێڵی ئاسۆ دەگات لە خاڵێكدا، هەر راستەهێڵێك تەریب بێت پێی لە هەمان خاڵدا بە هێڵی ئاسۆ دەگات.



**خاڵی چاودێری** ✔

راستەهێڵە تەریبەكانی ئەوانەی تەریب نین بە رووتەختی وێنەكە لە وێنەی بینراودا، هەمیشە دەكێشرێن بە بێ خاڵی پوكانەوە. لە زۆر باردا دووركەوتنەوە لەوە كێشە دروست دەكات. ئایا دەتوانیت باسی چەند بارێك بكەیت كە ئەم تەكنیكە وێنەیەكی راستەقینەمان نادات؟

**خاڵی چاودێری** ✓

دەتوانرێ بیرۆکەی خاڵی پوکانەوە لە وێنەی بینراودا پەیڕەو بکرێت هەرچەند ئەو ڕاستەهێڵە تەریبە دەرکەوتووەکان لە وێنەکەشدا دەرنەکەون. لە ڕیزکردنی سێڵە وەرگرەکان ( الصحون اللاقطة)کە لەخوارەوە ڕوونکراوەتەوە ڕاستەهێلە خەیاڵیەکان بەو خاڵانەدا دەڕۆن کە کەوتونەتە سەرو بنی سێڵەکان. ئەو ڕاستەهێڵانە لە ئاسۆدا بەیەك دەگەن.هۆیەکەی ڕوونبکەوە.



ئەندازەی تەلارسازی لە بیرۆکەی وێنە بینراوەکان سوودی زۆری بینیوە و بابەتە سەرەتاییەکانی لێ پێکهێناوە. خانووەکان و تەلارەکان جوانترین نموونەن بۆ برەوپێدانی بیرۆکەی وێنە بینراوەکان لە بەر ئەوەی زۆر ڕاستەهێڵی تەریبی تێدایە کە لە ناوخۆیاندا تەریبن بەیەکتری و تەریبن بە زەوی.

# ڕاهێـــــــنـــــــان

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 مانای خاڵی پوکانەوە لە وێنەی بینراودا چی دەگەیێنێت؟

2 ئەو ڕاستەهێڵەی بکەوێتە ڕووتەختی زەوی و تەریب نەبێت بە ڕووتەختی وێنەکە، بۆچی لە ئاسۆدا کۆتایی دێت. وێنەیەك بکێشە وەلامەکەت ڕوونبکاتەوە.



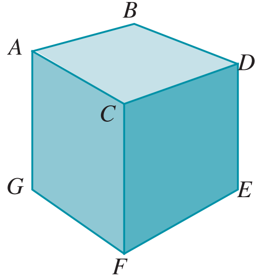
3 وێنەکانی تەلارەکان و خانووەکان بۆچی بە جوانترین نموونە دادەنرێن بۆ پەیرەوکردنی چەمکی وێنەی بینراو؟ وێنەیەك دروستبکە بۆ ڕوونکردنەوەی وەلامەکەت

4 ئاسۆ لە وێنەی بینراودا بە ڕاستەهێڵێکی ئاسۆیی دەنوێنرێ کە لە ئاستی چاودا بێت، ئەم گریمانە بە بۆچوونی تۆ بۆ وا دانراوە؟

**خاڵی چاودێری** ✓

5 ئەو دوو وورچەی لە وێنەکەدا دەرکەوتوون هەمان درێژیان هەیە.بەلام یەکێکیان درێژتر دەردەکەوێت لەوی تریان هۆیەکەی دیاربکە؟

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو




**6** وێنەی بەرامبەر وێنەیەکی بینراوە بۆ شەشپاڵویەك دەربارەی ئەو ڕاستەهێڵانە $AB$، $CD$، $EF$ چی دەڵێیت؟ و بەڕاستەهێڵەکانی $AC$، $BD$، $GF$ دەڵێین چی؟

**7** ڕاستەهێڵە ستوونییەکان لە وێنەی شەشپاڵوەکەی بەرامبەردا لە خاڵی پۆکانەوە بەیەکناگەن. هۆیەکەی دیاریبکە بە بەکارهێنانی ڕێسابینراوەکان.

**8** وادابنێ وێنەی شەشپاڵوەکەی پێشو خانوویەك بنوێنی لەسەر ڕووتەختی زەوی ئەو ڕاستەهێڵانەی کە لێوارە ناستوونیەکانی خانوەکە دەنوێنن لە کوێ بەیەکدەگەن.

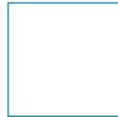
## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

**ئەم پرسیارانەی لەخوارەوە هاتوون ئەو هەنگاوانەی پێویستە بەکاربێت بۆ تەواوکردنی نموونە جۆراوجۆرەکان لەوێنەی بینراو ڕوونددەکاتەوە.**

**9** ئەو وێنە بینراوەی کە یەك خاڵی پوکانەوەی هەبێت پێی دەوترێت وێنەیەك کە یەك پوکانەوەی هەیە.

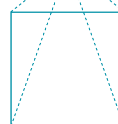
أ چوارگۆشەیەك بکێشە لە دوایدا ڕاستەهێڵێکی ئاسۆیی بکێشە ئاسۆ بنوێنێت. خاڵی پوکانەوەی لەسەر دیاریبکە.





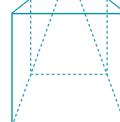
ب ڕاستەهێڵێکی خاڵدار و باریك بکێشە لە نێوان هەر سەرێك لەسەرەکانی چوارگۆشەکە و خاڵی پوکانەوە



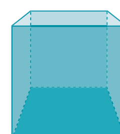


ج چوارگۆشەیەکی خاڵدار بچووکتر لە چوارگۆشەی یەکەم بکێشە سەرەکانی بکەوێتە سەر ڕاستەهێڵەکان کە کێشاوتن لە (ب)وە.





د لە وێنەکەدا هەموو ئەوانەی دەکەونە پشت چوارگۆشە بچوکەکە لابەبە، ڕاستەهێڵەکانی خاڵدار کە لە وێنەکەدا دەمێنێتەوە ئاماژە دەکەن بۆ ئەو لێوارانەی کە نابینرێن .

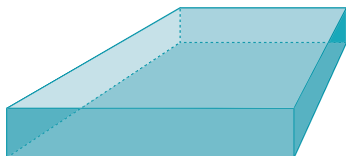


**10** هەنگاوەکانی پرسیاری 9 دووبارە بکەرەوە لەگەڵ دانانی خاڵی پوکانەوە بۆ لای چەپی یان لای ڕاستی چوارگۆشەکە.

**11** هەنگاوەکانی پرسیاری 9 دووبارە بکەرەوە لەگەڵ دانانی هێڵی ئاسۆ و خاڵی پوکانەوە لە ژێر چوارگۆشەکەدا

**12** چی ڕوودەدات ئەگەر خاڵی پوکانەوە لە ناو چوارگۆشەکە یان لە سەر یەکێك لەلاکانی بێت

**ئەم وێنەی خوارەوە دروست بکە لە سەر کاغەزێك بۆ شیکارکردنی هەردوو پرسیاری** 13 ، 14 .

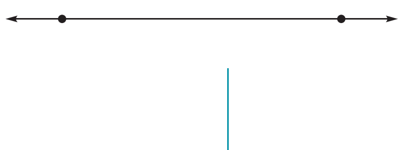


**13** خاڵی پوکانەوە لە وێنەکەدا دیاریبکە.

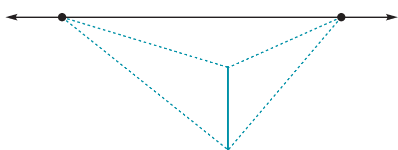
**14** هێڵی ئاسۆ بکێشە

**15** ئەو وێنە بینراوەی کە دوو خاڵی پوکانەوەی هەیە پێیدەوترێت وێنەیە بە دووخاڵی پوکانەوە.

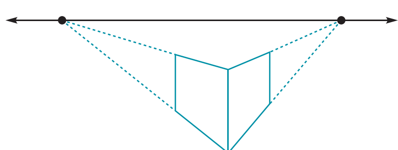
أ پارچە ڕاستەهێڵێکی ستونی بکێشە کە لای پێشەوەی شەشپاڵویەك بنوێنێ. هێڵێکی ئاسۆیی لەسەر ئەو پارچەیە بکێشە و دوو خاڵی پوکانەوە بکەونە هەردوو لای پارچە ڕاستەهێڵەکەوە هەڵبژێرە، هەروەك چۆن لە وێنەی بەرامبەردا ڕوونکراوەتەوە



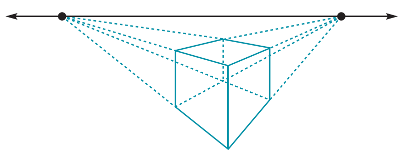
ب ڕاستەهێڵەکانی خاڵدار و باریك کە هەردوو لای پارچە ستونەکە لەگەڵ هەردوو خاڵی پوکانەوە دەگەیەنێت بکێشە هەروەك لەم وێنەدا ڕوونکراوەتەوە.



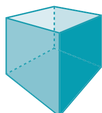
ج پارچە ڕاستەهێڵە ستونیەکان کە لایەکانی ڕووەکانی پێشەوەی شەشپاڵوەکە پێکدێنن بکێشە.



د پارچە ڕاستەهێڵێکی باریك و خاڵدار بکێشە کە لاکانی پارچەکانی کە وێنەت کێشاوە لە ج دا لەلەگەڵ هەردوو خاڵی پوکانەوە دەگەیەنێت . پارچەیەکی ستونی خاڵدار بکێشە کە هەردوو خاڵی بەیەك گەیشتنی ڕاستەهێڵەکانی وێنەی بینراو کۆ دەکاتەوە



ه هەموو ئەوشتانەی کەوتونەتە دەرەوەی لێوارەکانی شەشپاڵوەکە لاببە پارچە ڕاستەهێڵەکانی خاڵدار بەکاربهێنە بۆ لایە نەبینراوەکانی شەشپاڵوەکە.



16 هەنگاوەکانی پرسیاری 15 دووبارە بکەوە لەگەڵ دانانی هێڵی ئاسۆ، و دوو خاڵی پوکانەوە لە ژێر پارچە ستونیەکەدا.

17 هەنگاوەکانی پرسیاری 15 دووبارە بکەرەوە لەگەڵ دانانی هیڵی ئاسۆ، بەرێگایەك کە لەگەڵ پارچە ڕاستەهێڵە ستونیەکە بەیەکبگەن.

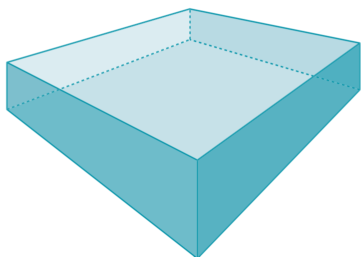
18 چی ڕوودەدات کە وێنەیەك دوو خاڵی پوکانەوەی هەبێت ئەگەر ئەو دوو خاڵە نزیککەوتنەوە؟ ئەگەر دورکەوتنەوە؟

19 چی ڕوودەدات لە وێنەیەك کە دوو خاڵی پوکانەوەی هەبێت کاتێك ئەو دوو خاڵە لە هەمان ڕووی پارچە ڕاستەهێڵە ستوونیەکەبن.

**ئەم وێنەی خوارەوە لە سەر کاغەزێك بکێشە بۆ شیکاری هەردوو پرسیاری 20، 21 .**

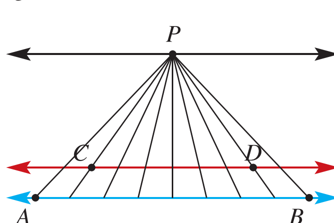
20 دوو خاڵی پوکانەوە لەم وێنەدا دیاریبکە.

21 هێڵی ئاسۆ بکێشە

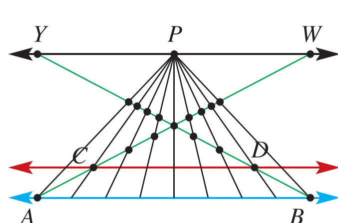


**نەخشە ڕێژکردن و نەخشاندنی نیگاری کارێکی سەرنج ڕاکێشن بۆ هونەرمەندان و وێنەکێشان ئەوانەی دەستیان کردوە بە خوێندنی وێنە بینراوەکان. ئەم وێنانەی خوارەوە بە تەکنیکێکی دیاریکراو بۆ دەستکەوتنی شێوەی نەخشەرێژی ڕیزکراو لە کرداری وێنەی بینراو دەنوێنێ. لەم وێنانەی خوارەوە وردبەرەوە بۆ شیکاری پرسیاری 22 بۆ 23 .**

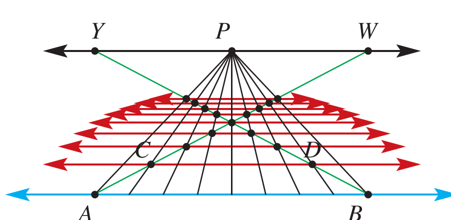
أ



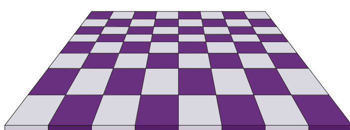

ب




ج




د



22 دەتوانیت هەردوو تیرەی $\overleftrightarrow{AW}$ ، $\overleftrightarrow{BY}$ بەکاربهێنیت بۆ دۆزینەوە ئەو ڕاستەهێڵانەی تەریبن بە ڕاستەهێڵی $AB$ چۆن ئەو دوو تیرەیە بەکاردەهێنیت بۆ دیاریکردنی ئەو ڕاستەهێڵانە؟

23 چۆن دەتوانرێ شێوەی نەخشەرێژی ببینیت لە گۆشەیەك لە گۆشەکانەوە بەبەکارهێنانی دوو خاڵی پوکانەوە؟ چۆن ڕاستەهێڵەکانی یەکتربڕ دیاری دەکەیت؟

24 نواندنی تایبەتی خۆت دروستبکە کاتێ یەك خاڵی پوکانەوە یان دوو خاڵی پوکانەوە بەکاربهێنیت بۆ نەخشەرێژی چوارگۆشەکە.

## ڕوانین بۆ دواوە

لەهەریەکە لەم پرسیارانەی خوارەوە ئایا دوو ڕاستەهێڵەکە تەریبن یان ئەستونن لەسەر یەکتری یان چ جۆریکی ترن.

**25** $y = 3x + 5$

$y = 3x - 7$

**26** $y = x + 2$

$y = 2 - x$

**27** $y = 2x - 1$

$y = -2x + 4$

**28** $2x + 3y = 6$

$3x - 2y = 6$

**29** $ABCD$ لاکێشەیەکە $\overline{AC}$ ، $\overline{BD}$ دووتیرەکەیەتی، بسەلمێنە کە دوو سێگۆشەی $ACD$ و $BCD$ جووتن.

وانەی
4

# چەندلا ڕێکەکان Regular Polygons



**بۆچی؟**

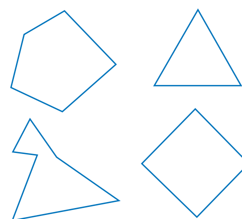
هەرچۆنێک بڕوانیتە ئیشە دەستیەکان لە دەوروبەرتدا چەندلاکان بەرچاو دەکەوێت تێگەیشتن لە سیفەتە بیرکاریەکانی چەندلاکان یارمەتیت دەدات بۆ بەکارهێنانیان لەکارە هونەریەکان و کرداریەکاندا

**ئامانجەکان**

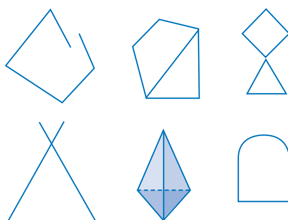
- چەندلاکان جیادەکاتەوە و ناویانلێدەنێت.
- چەندلاڕێکەکان و دانەکانیان جیادەکاتەوە.
- گۆشەکانی ناوەوە و چەقە گۆشەکان و ڕووبەرەکانیان هەژماردەکات.

## چەندلاکان Defining Polygons

سەرەنجی ئەم وێنانەی خوارەوە بدە و پێناسەیەك بۆ هەرچەندلایەکیان هەڵبژێرە.



ئەم شێوانە چەندلان



ئەم شێوانە چەندلانین

ئەو پێناسەی کە هەڵتبژاردبوو بۆ چەندلا لەگەڵ ئەم پێناسەی خوارەوە بەراوردی بکە ئایا پێناسەکەت وەك ئەو پێناسەی خوارەوەیە؟ ئایا پێدراوی زیاتری تێدایە؟

**چەندلا Polygon**

چەندلا شێویەکی ئەندازەیی ڕووتەختە لە سێ پارچە ڕاستەهێڵ یان زیاتر پێکدێت بە جۆرێك هەریەکێکیان لەگەڵ تەنها دوانی تریان یەکتردەبڕن، هەریەکی لە کۆتایی لایەکیدا ببڕێت. بە مەرجێك دووپارچەڕاستەهێڵی یەك بەدوای یەك لە ڕێکی یەکتر نەبن، پارچە ڕاستە هێڵەکان پێیان دەڵێن **لاکان Sides** چەندلایەکەو خاڵەکانی یەکتربڕین پێیان دەڵێن سەرەکانی چەندلاکە **Vertices** .

ناوی جیاواز لە چەندلاکان دەنرێن. بەپێی ژمارەی لایەکانی. ڕاهێنانبکە لەسەر ناولێنانی ئەو چەندلایانەی لە خشتەی خوارەوە داهاتوون.

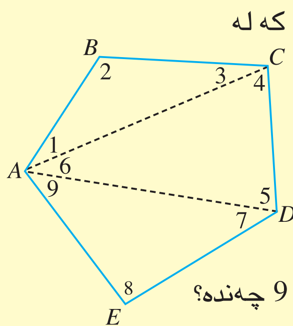
**پۆلینکردنی چەندلایەکان بەپێی ژمارەی لایەکانی**

| ناو | | ژمارەی لاکان | ناو | | ژمارەی لاکان |
|---|---|---|---|---|---|
| سێگۆشە (سێلا) | Triangle | 3 | نۆلا | Nonagon | 9 |
| چوارلا | Quadrilateral | 4 | دەلا | Decagon | 10 |
| پێنجلا | Pentagon | 5 | یازدەلا | 11-gon | 11 |
| شەشلا | Hexagon | 6 | دوازدەلا | Dodecagon | 12 |
| حەفتلا | Heptagon | 7 | سێزدەلا | 13-gon | 13 |
| هەشتلا | Octagon | 8 | نون لا | n-gon | $n$ |

## گۆشەکانی چەندلا — Angles of a Polygon

### چالاکی 1

### سەرجەمی گۆشەکانی ناوەوە — Angles of a Polygon




پێنجلای بەرامبەر بۆ سێ سێگۆشە دابەشکرا بە کێشانی ئەو تیرانە کە لە یەکێك لە سەرەکانیەوە دەرچووە.

1. سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی 1 و 2 و 3 چەندە؟
2. سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی 4 و 5 و 6 چەندە؟
3. سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی 7 و 8 و 9 چەندە؟
4. سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی 1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6 و 7 و 8 و 9 چەندە؟
5. لە پرسیارەکانی پێشوو سەرجەمی گۆشەکانی ناوەوەی پێنج لا دەرئەنجام بکە.
6. ڕێگای پێشوو بۆ تەواوکردنی ئەم خشتەیەی خوارەوە بەکاربهێنە.

| چەندلا | ژمارەی لاکان | ژمارەی سێگۆشەکان | سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوە |
|---|---|---|---|
| سێگۆشە (سێلا) | ؟ | I | 180 پلە |
| چوارلا | ؟ | ؟ | ؟ |
| پێنج لا | ؟ | 3 | 540 پلە |
| شەش لا | ؟ | ؟ | ؟ |
| چەندلای نونی | ؟ | ؟ | ؟ |

7. ڕێسایەك بنووسە بۆ هەژمێرکردنی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەك بەپێی ژمارەی لایەکانی ئەم ڕێسایەی خوارەوە تەواوبکە:

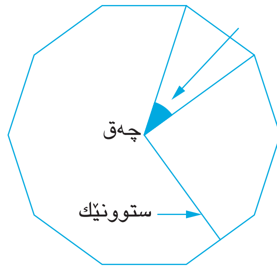
خاڵی چاودێری ✔

**سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەك Sum of the Interior Angles of a Polygon**

سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەك کە ژمارەی لایەکانی $n$ بێت بریتییە لە ___؟___ پلە.

**خاڵی چاودێری** ✔

بەچەند لایەك دەڵێین ڕێك **Regular** ئەگەر لایەکانی لە درێژیدا یەکسانبن و گۆشەکانی ناوەوەی لە پێوانەدا یەکسانبن. چەندلای ڕێکی سێلا بریتیە لە سێگۆشەیەکی ڕێك. و چەندلایەکی ڕێکی چوارلا بریتییە لە چوارگۆشە.




**چەقی چەندلای ڕێك** ئەو خاڵەیە کە بەیەکسانی دووورە لە هەموو سەرەکانییەوە، ئەو گۆشەیەی کە سەرەکەی لەچەقی چەندلا ڕێکەکەدایەوە و دوولاکانی بە دوو سەری هاوسێ لە سەرەکانیدا دەڕوات پێی دەوترێت **چەقە گۆشە Central Angle** بۆ چەندلا ڕێکەکە. هەمووچەقە گۆشەکانی چەندلایەکی ڕێك یەکسانن.

ئەم خشتەیەی خوارەوە تەواوبکە لە دواییدا ئەو ڕێسایەی کە لەدواوەی دێت تەواوبکە

| چەند لایەکی ڕێك | ژمارەی لاکان | سەرجەمی گۆشەکانی ناوەوە | پێوانەی هەر گۆشەیەکی ناوەوە |
|---|---|---|---|
| سێگۆشە (سێلا) | ؟ | 180 پلە | ؟ |
| چوارلا | ؟ | ؟ | 90 پلە |
| پێنجلا | ؟ | ؟ | ؟ |
| شەشلا | ؟ | ؟ | ؟ |
| چەند لای نونی | ؟ | ؟ | ؟ |

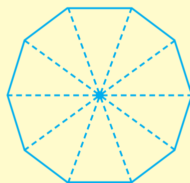
**پێوانەی گۆشەی ناوەوەی چەندلای ڕێك**

**The Measure of an Interior Angle of a Regular Polygon**

پێوانەی هەرگۆشەیەکی ناوەوە بۆچەندلایەکی ڕێك ژمارەی لاکانی $n$ بێت بریتیە لە ____؟____ پلە

## چالاکی 2

### چەقە گۆشەکان لە چەندلایەکی ڕێکدا Central Angles of a Reguler Polygon



1. سەرجەمی پێوانەی چەقە گۆشەکان لە چەند لایەکی ڕێکدا چەندە
2. ئەم ڕێسایەی خوارەوە تەواوبکە.

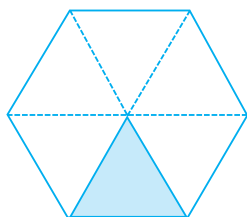
**خاڵی چاودێری** ✔

**پێوانەی چەقە گۆشە لە چەندلای ڕێکدا**

**The Measure of a Central Angle of a Regular Polygon**

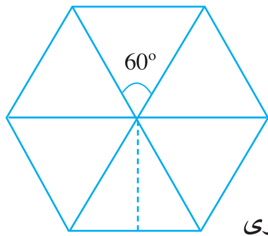
پێوانەی هەر چەقەگۆشەیەك لە چەندلایەکی ڕێکدا ژمارەی لاکانی $n$ بێت دەکاتە ____؟____ پلە.

## ڕووبەری چەندلای ڕێك Area of a reguler polygonr



ئەستوندەکی چەندلای ڕێك ئەو پارچە ڕاستەهێڵەیە کە چەقی چەندلایەکە دەگەیەنێت بە ناوەڕاستی یەکێك لە لایەکانی. تێبینی دەکەیت کە ئەستوندەك بەرزی هەریەکە لە سێگۆشە ڕێکەکانە کە سەرەکەی لە چەقی چەندلا ڕێکەکە دایە و بنکەکە یەکێك لە لاکانی چەندلاکەیە. بۆ دۆزینەوەی ڕووبەری شەشلایەکی ڕێك، شەشلاکە دابەش دەکەین بۆ شەش سێگۆشەی هاوسێی ڕێکی جووت. ڕووبەری شەشلای ڕێك یەکسانە بە شەش ئەوەندەی ڕووبەری هەر یەکێك لە ڕووبەری سێگۆشەکان.

## نموونە 1

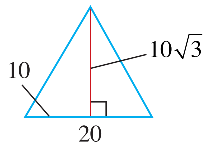



**هەژمێری رووبەری شەشلایەکی رێک بکە درێژی لایەکی 20cm**

**شیکار**

بۆ ئەوەی رووبەری شەشلایەکە بدۆزینەوە پێویستە یەکەم جار رووبەری یەکێك لەو شەش سێگۆشەی کە شەشلاکەیان پێکهێناوە بدۆزینەوە، هەر سێگۆشەیەك لەو سێگۆشانە سێگۆشەیەکی رێکە. لەلایەکی ترەوە گۆشەی سەری سێگۆشەکە، چەقە گۆشەیەکە لە گۆشەکانی شەشلا رێکەکە. پێوانەکەی یەکسانە بە $360 \div 6 = 60$ لەوەوە بۆمان دەردەچێت کە هەریەکە لەو شەش سێگۆشەیە سێگۆشەی رێکن.درێژی لایەکی 20 Cm ، ئەستوندەکی شەشلا رێکەکە بریتیە لە بەرزی ئەو سێگۆشە رێکە.کەواتە، درێژی

ئەستوندەکە یەکسانە بە: $20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$




رووبەری هەر سێگۆشەیەك یەکسانە : $\frac{1}{2}(20)(10\sqrt{3}) = 100\sqrt{3}$

رووبەری شەشلا رێکەکە یەکسانە $6(100\sqrt{3}) = 600\sqrt{3}$

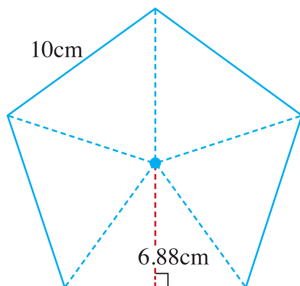
$1039cm^2 = 600\sqrt{3}\ cm^2$

دەتوانیت رێگاکەی پێشوو بەکاربهێنیت بۆ دۆزینەوەی رووبەری چەندلایەکی رێك کە ژمارەی لاکانی $n$ بێت. دەتوانرێ ئەو چەندلایە دابەش بکرێت بۆ $n$ سێگۆشە لە سێگۆشە جووت بووەکان.

**Area of regula polygon رووبەری چەندلای رێك**

رووبەری چەند لایەکی رێك ئەستوندەکەی a بێت و چێوەکەی P بێت دەکاتە $A = \frac{1}{2}ap$

## نموونە 2




**رووبەری پێنجلای بەرامبەر بدۆزەرەوە**

**شیکار**

چێوەی پێنجلای رێکەکە $5 \times 10 = 50$

رووبەری پێنجلا رێکەکە $\frac{1}{2} \times 6.88 \times 50 = 172$

$172cm^2$

# راهێنـــــــــان

## بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1. ئایا دەتوانیت چوارلایەك بکێشیت سێ سێگۆشەی ناوەوەی هەبێت پێوانەی هەر یەکێکیان 60 پلە بێت ؟ هۆی وەڵامەکەت بنووسە

2. سێگۆشەیەکی رێك چەندلایەکی رێکە کە سێلای هەیە. بەرزییەکەی ( ئەستوندەکەی) کامەیە؟

3. چوارگۆشە چەندلایەکی رێکە لە چوارلا پێکهاتووە ئەستوندەکەی کامەیە.

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

**4** سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی هەشتلایەك چەندە؟

**5** سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی سێزدەلایەك چەندە؟

**6** سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی حەوتلایەك چەندە؟

**7** سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی یازدەلایەك چەندە؟

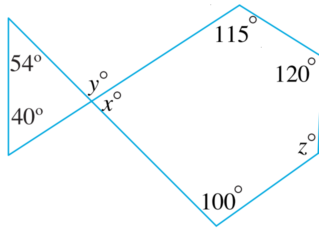
## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

**8** ئەم شێوەیەی بەرامبەر بەکاربهێنە بۆ دیاریکردنی پێوانە داواکراوەکان

$x^\circ =$ ________

$y^\circ =$ ________

$z^\circ =$ ________

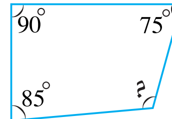



**9** ڕووبەری شەشلایەکی ڕێك چەندە کە درێژی لایەکی 12cm ؟

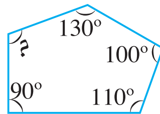
**10** ڕووبەری دەلایەکی ڕێك چەندە کە درێژی لایەکی 6m و درێژی ئەستوندەکەی 9.23m بێت.

**پێوانەی گۆشەی نادیار لەهەریەك لە پرسیارەکانی 11–14 بدۆزەرەوە.**

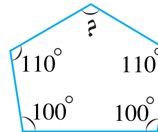
**11**



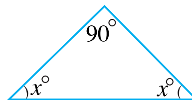

**12**




**13**




**14**




**لە پرسیارەکانی 15 تا 18 پێوانەی گۆشەکانی ناوەوەی چەندلایەکە بدۆزەوە**

**15** چوارگۆشە

**16** سێگۆشەیەکی ڕێك

**17** دوازدەلایەکی ڕێك

**18** پێنجلای ڕێك

**ژمارەی لاکانی چەندلایەکی ڕێك چەندە ئەگەر پێوانەی هەر گۆشەیەك لە گۆشەکانی ناوەوەی یەکسان بێت بە**

**19** $135^\circ$؟

**20** $150^\circ$؟

**21** $165^\circ$؟

جەبر

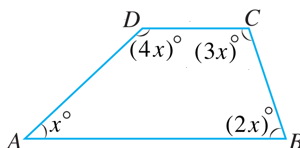
**بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 22 تا 25 پێوانەی گۆشەکان بدۆزەرەوە؟بە پشت بەستن بە وێنەکەی بەرامبەر.**

**22** گۆشەی $A$

**23** گۆشەی $B$

**24** گۆشەی $C$

**25** گۆشەی $D$



بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی **26** تا **30** پێوانەی گۆشەکە دیاریبکە بەسەرنجدان لە وێنەکەی بەرامبەر.

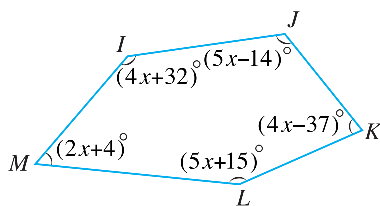
**26** گۆشەی $I$

**27** گۆشەی $J$

**28** گۆشەی $K$

**29** گۆشەی $L$

**30** گۆشەی $M$




**چێوەو رووبەری هەر یەك لەو چەندلا رێكانە بدۆزەوە.وەڵامەكەت بەشێوەی برێكی رەگی و بە سادەترین شێوە بێت.**

**31** سێگۆشەیەكی رێك درێژی لاكەی 8 Cm

**32** شەشلایەكی رێك درێژی لاكەی 13 m

**33** چوارگۆشەیەك تیرەكەی 14 Cm

**34** هەشتلایەكی رێك درێژی ئەستوندەكەی = 5 Cm

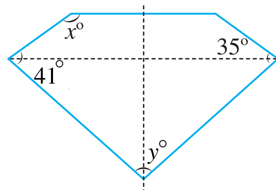
**35** گەورەترین ژمارە بۆ گۆشە تیژەكانی سێگۆشە چەندە؟ ئایا سێگۆشە هەیە گۆشەی تیژی نەبێت؟هۆی وەڵامەكەت دیاربكە.

**36** گەورەترین ژمارە بۆ گۆشە تیژەكانی چوارلایەك چەندە؟ ئایا چوار لا هەیە گۆشەی تیژی نەبێت؟هۆ بۆ وەڵامەكەت دیاربكە.

**37** گەورەترین ژمارە بۆ گۆشە تیژەكانی پێنجلایەك چەندە؟ ئایا پێنجلا هەیە گۆشەی تیژی نەبێ؟ هۆی وەڵامەكەت دیاربكە

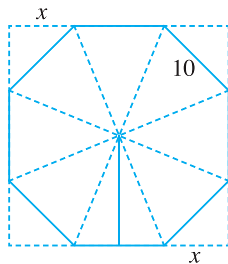
## جێبەجێكردنەكان

**38** بەردە بەنرخەكان ئەڵماس دەبڕدرێ لە شێوەی (برلنت) بۆ ئەوەی تواناى تیشكدانەوەكەی زۆربێ و گۆشەی برینەكان دیاری دەكرێت بە پێی سیفەتی بەردەكە لە شكاندنی تیشكی رووناكی، ئەم شێوەیەی خوارەوە پارچەیەكی هەڵبژاردەیە لە بەردی ئەڵماس بە شێوەیەك كەپارچەكە تەوەری هاوجێبوونی هەیە.گۆشەكانی ئەم شێوەیە هەژماربكە.




**شێوەی بەرامبەر بەكاربێنە كە هەشتلایەكی رێك دەنوێنێ لە ناو چوارگۆشەیەكدا.**
**بۆ شكاری پرسیارەكان لە 39 بۆ 42 .**

**39** جۆری ئەو سێگۆشانە بنووسە كە سەرەكانیان سەرەكانی چوارگۆشەكەن. و دەكەونە دەرەوەی هەشتلا رێكەكە؟ بەهای $x$ هەژماربكە.




**40** ئەستوندەكی هەشتلا رێكەكە بدۆزەرەوە

**41** رووبەری هەشتلا رێكەكە بدۆزەرەوە

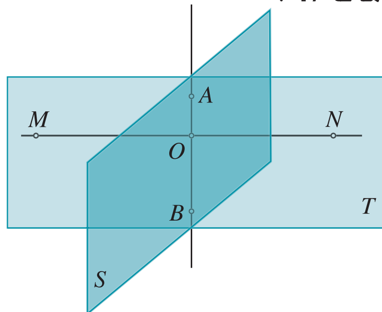
**42** رووبەری هەشتلا رێكەكە كە درێژی لایەكی $y$ بێت چەندە؟

**43** ئایا چەندلایەكی رێك هەیە پێوانەی هەریەكە لە چەقە گۆشەكانی 50 پلە بێت؟

**44** ئایا چەند لایەكی رێك هەیە پێوانەی هەریەكە لە گۆشەكانی ناوەوەی 30 پلە بێت؟ هۆی وەڵامەكەت روونبكەوە.

## ڕوانین بۆ دواوە

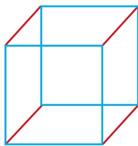
شێوەی بەرامبەر بەکاربهێنە بۆ شیکاری پرسیارەکان لە 45 هەتا 47 .




45 یەکتربڕینی هەردوو ڕاستەهێڵی $AB$ و $MN$ ناوبنێ.

46 سێ خاڵ دیاربکە کە ڕووتەختی $T$ یان دیاردکردووە .

47 یەکتربڕینی دوو ڕووتەختی $T$ و $S$ ناوبنێ.



48 شێوەی بەرامبەر شەشپاڵویەك دەنوێنێ. ئەو ڕاستەهێڵانەی کە ڕەنگکراون بە سوور چیان پێ دەڵێین.

49 ئەگەر ئەو لا سوورانە درێژبکرێنەوە چی ڕوودەدات.

## ڕوانین بۆ پێشەوە

50 خاڵی$A(2, 2)$وخاڵی$B(4, 1)$لە ڕووتەختی پۆتانەکان دیاربیکە

51 هەریەك لە پۆتانی خاڵی$A$ لێکبدە لە 3 پۆتانی خاڵێکی تازە $C$ دەستدەکەوێت. خاڵی$C$ دیاربیکە.

52 هەریەك لە پۆتانەکانی خاڵی $B$ لێکبدە لە 3 پۆتانی خاڵێکی تازە $D$ دەستدەکەوێت خاڵی $D$ دیاربیکە.

53 هەردوو ڕاستەهێڵی $AB$ و $CD$ چییان پێ دەوترێت؟هۆی وەڵامەکەت دیاربکە.

54 ئەگەر 4 بەکاربهێنی لە جیاتی 3 لە هەردوو پرسیاری 52 ، 53 ئایا بۆچوونەکەت دەگۆڕێ لە سەر هەردوو ڕاستەهێڵی$AB$ ، $CD$ ؟

وانەی 5

# هاوڕێژەی ئەندازەیی Geometric Proportion



دۆزینەوەی بنەمای کارکردنی ئامێری وێنەگرتن دەگەڕێتەوە بۆ زانای عەرەبی ( ابن هیثم) کە لە نێوان ساڵەکانی 965–1 039 ك ژیاوە

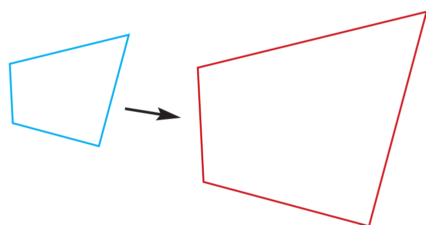
**ئامانجەکان**

- هاوڕێژەی ئەندازەیی و دانەکانیان جیادەکاتەوە
- وێنەی شێوەیەك بە هاوڕێژەی ئەندازەیی پێکدێنێت.

**بۆچی؟**

کاتێك وێنەی مرۆڤێك بە ئامێرێکی کۆن دەگرێت لە ژوورە تاریکەکەی ئامێرەکە وێنەیەکی هەڵگەراوە بۆ ئەو مرۆڤە دروست دەبێت دەتوانی ئەمە ڕوونبکەیەوە بەبەکارهێنانی هاوڕێژەی ئەندازەیی.

سێ جێگۆڕکێ ئەندازەییت خوێندوە: کشانەوە و وێنەدانەوە و خولانەوە.ئەم جێگۆڕکێیانە بە سیفەتێکی گرنگ جیادەکرێنەوە. ئەویش بریتیە لە پاراستنی شێوە و پێوەرەکان. بەو جێگۆڕکێیانە دەڵێین پارێزگاری لە پێوانە دەکات واتە پێوانەیین. لەم وانەیەدا جۆرێکی تازە لە جێگۆڕکێ دەخوێنین کە پارێزگاری لە پێوەرەکان دەکات. ئەویش هاوڕێژەی ئەندازەییە.



## هاوڕێژەیی ئەندازەیی Dilation

وێنەی خاڵی $A(x, y)$ دەستدەکەوێت بە هاوڕێژەی ئەندازەیی، ئەویش بەلێکدانی هەریەك لە پۆتانەکەی لەهەمان ژمارە کەپێی دەوترێت کۆڵکەی هاوڕێژەکە **Scale Factor** . کەواتە وێنەی خاڵی $A(x, y)$ بە هاوڕێژەی ئەندازەیی بەرێژەی $n$ دەکاتە $(nx, ny)$.

**نموونە** 1

وێنەی خاڵی **(2, 3)** بە هاوڕێژەی ئەندازەیی بەرێژەی **4** چەندە؟

**شیکار**

وێنەی خاڵی $(2\times4,\ 3\times4)=(8, 12)$

## چالاكی 1

## پۆتانی هاوڕێژەیی ئەندازەیی — Geometric Proportion in the Coordinate Plane

1. خاڵی $A(3, 4)$ لە ڕووتەختی پۆتاندا دیاریبکە. یاسای دووری نێوان دوو خاڵ بەکاربهێنە بۆ هەژمارکردنی دووری خاڵی $A$ و خاڵی بنەڕەت $O$ لە ڕووتەختی پۆتاندا. ئەم خشتەیەی خوارەوە تەواوبکە لە ڕێگای دیاریکردنی پۆتانی خاڵی $A'$ کە وێنەی خاڵی $A$ یە بەڕێژەی ئەندازەیی کە لە ستونی سێیەمدا ڕوونکراوەتەوە.

| خاڵی $A$ | $AO$ | كۆڵكەی هاوڕێژە | وێنەی $A'$ | $OA'$ | $\frac{OA'}{OA}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| (3, 4) | ؟ | 2 | ؟ | ؟ | ؟ |
| (3, 4) | ؟ | 0.5 | ؟ | ؟ | ؟ |
| (3, 4) | ؟ | −1 | ؟ | ؟ | ؟ |
| (3, 4) | ؟ | $n$ | ؟ | ؟ | ؟ |

2. خاڵی $A$ وێنەکەی $A'$ لە هەربارێکدا بکێشە. تێبینی چی دەکەیت لەسەر هەموو ئەو خاڵانە؟

3. ئەم گریمانانەی خوارەوە تەواوبکە.

**گریمانە**

ئەگەر $A'$ وێنەی $A$ و بێت بە هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی ڕێژەکەی n. ئەوا $OA' = \underline{\quad ؟ \quad} \times OA$.

خاڵی چاودێری ✓

4. خاڵی $A(3, 4)$ جارێکی تر دیاریبکە و خاڵی $A(5, 6)$ لەگەڵی دیاریبکە ئەم خشتەیەی خوارەوە تەواوبکە.

| خاڵی $B$ | $AB$ | كۆڵكەی هاوڕێژە | وێنەی $B'$ | $A'B'$ | $\frac{A'B'}{AB}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| (5, 6) | ؟ | 2 | ؟ | ؟ | ؟ |
| (5, 6) | ؟ | 0.5 | ؟ | ؟ | ؟ |
| (5, 6) | ؟ | −1 | ؟ | ؟ | ؟ |
| (5, 6) | ؟ | $n$ | ؟ | ؟ | ؟ |

جەبر

5. ئەم گریمانانەی خوارەوە تەواوبکە:

**گریمانە**

ئەگەر $\overline{A'B'}$ وێنەی پارچە ڕاستەهێڵی $AB$ بێت بە هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی بەڕێژەی $n$

ئەوا $A'B' = \underline{\quad ؟ \quad} \times AB$

خاڵی چاودێری ✓

6. لاری ڕاستەهێڵی $AB$ بدۆزەرەوە

7. لاری ڕاستەهێڵی $A'B'$ لەهەربارێکدا بدۆزەوە.

8. ئەم گریمانەی خوارەوە تەواوبکە

**گریمانە**

هاوڕێژەی ئەندازەیی پارچە ڕاستەهێڵێك دەگۆڕێت بۆ پارچە ڕاستەهێڵی ____؟____

هەموو ئەو ڕاستەهێڵانەی بەخاڵێك و وێنەکەی بە هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی دیاریکراودا دەڕۆن لەیەك خاڵدا بەیەکدەگەن. پێی دەوترێت ( چەقی هاوڕێژە ). هەموو هاوڕێژە ئەندازەییەکان لە چالاکی 1 دا چەقەکەیان خاڵی بنەڕەتە. هەموو هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی چەقێکی هەیە.

**جێبەجێکردنەکان**

**ڕۆناکی**

بیلبیلەی چاو فراوان دەبێتەوە یان تەسك دەبێتەوە بۆ ڕۆیشتنی ڕووناکی پێویست پیایدا تاکو مرۆڤ بتوانێت شتەکان ببینێت لەڕۆژدا تەسك دەبێتەوە و لە شەودا فراوان دەبێت لە ئامێری وێنەگرتندا ئەم شتە وەك بیلبیلەکە وایە.بۆ دەست بەسەراگرتنی بڕی ڕووناکی پێویست بۆ گرتنی وێنەیەکی باش





بیلبیلەی چاوەکە لە وێنەی چەپدا تەسك بۆتەوە چونکە بڕی ڕووناکیەکە زۆرە. بەڵام لە وێنەی لای ڕاستدا زیاتر کراوەتەوە چونکە بڕی ڕووناکی پێویست کەمترە؟

لە چالاکی 1 دا تێبینیت کرد کە درێژی وێنەی پارچە ڕاستەهێڵەکە بەگۆڕانی کۆڵکەی هاوڕێژەکە دەگۆڕێت. کاتێك پێوەرەکانی وێنەکە بچووکتربێت لە پێوەرەکانی شێوە بنەڕەتیەکە بەو هاوڕێژە دەوترێت بچووك کردنەوە و کاتێك پێوەرەکانی وێنەکە گەورەتر بوو لە پێوەرەکانی شێوە بنەڕەتیەکە بەو هاوڕێژەیە دەوترێت (گەورەکردن).

**بیرکردنەی ڕەخنەگرانە** چیمان دەستدەکەوێت لە وێنەی خاڵێك یان پارچە ڕاستەهێڵێك بەهاوڕێژەیەکی ئەندازەیی کەرێژەکەی سالیب بێت؟

## چالاکی 2

## کێشانی وێنەی شێوەیەك بە هاوڕێژەی ئەندازەیی Drawing a Dilation

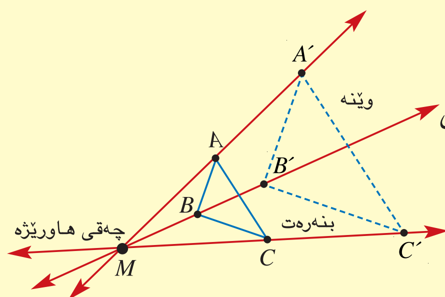
1. سێگۆشەیەك بکێشە وخاڵێکی دەرەوەی، $M$ کە چەقی هاوڕێژەکە دەنوێنێت، ئەو ڕاستەهێڵانە بکێشە کە بەچەقی هاوڕێژەکە و هەموو سەرەکانی سێگۆشەکەدا دەڕۆن.

$A$ $B$ $C$ بنەڕەت چەقی هاوڕێژە $M$

2. ژمارەیەکی موجەب $n$ هەڵبژێرە بۆ کۆڵکەی هاوڕێژەکە، سەرێك لە سەرەکانی سێگۆشەکە وەك $B$ هەڵبژێرە، و دووری $x$ بدۆزەرەوە لە نێوان ئەو سەرە و چەقی هاوڕێژەکە. دووری $x$ لە کۆڵکەی هاوڕێژەکە $n$ بدە بۆ ئەوەی دووری نێوان وێنەکە $B'$ لە لوتکەی $B$ و چەقی هاوڕێژەکە $M$ دەستکەوێت.خاڵێك لە سەر $MB$ وەربگرە کە لە چەقی هاوڕێژەکە بە $nx$. ئەو خاڵە خاڵی $B'$ وێنەی سەری $B$ یە کە هەڵت بژاردبوو بەهاوڕێژەیی.

3. کردارەکە دووبارە بکەوە.

4. هەرسێ خاڵە دەستکەوتووەکە بەیەکبگەیەنە سێگۆشەیەکی تازەت دەستدەکەوێت کە وێنەی سێگۆشە بنەڕەتییەکەیە بە هاوڕێژەیەکی ئەندازەیی.




**خاڵی چاودێری** ✔

## نموونــــه 2

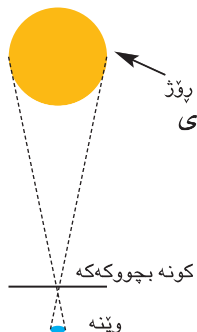
### جێبەجێکردنەکان

گەردوون

لەم وێنەیەی خوارەوە دوو خوێندکار چاودێری گیرانی ڕۆژیان دەکرد لە کونێکی بچووکەوە. بۆ ئەوەی کردارەکە تێبگەی وایدابنێ کە کارەکە پابەندە بە وێنەی ڕۆژەکە بەهاوڕێژەیەك کە چەقەکەی بکەوێتە کونە بچووکەکەوە. تیرەی ڕۆژ دەکاتە 1 400 000km بەنزیکی تێکرای هاوڕێژە چەندە؟ ئەگەر تیرەی وێنەی. ڕۆژەکە 0.63cm بێت.



### شیکار




وێنەی بەرامبەر ڕێڕەوی تیشکی ڕۆژ ڕووندەکاتەوە کە لە لاکانی ڕۆژەکە دەردەچێت هەروەکو دەیبینین لە زەوییەوە. ڕێژەی هاوڕێژەکە سالبە. چونکە وێنەی ڕۆژەکە دەکەوێتە لاکەی تر بەپێی چەقی هاوڕێژەکە (کونە بچووکەکە) بۆ دەستکەوتنی کۆڵکەی هاوڕێژەیی تیرەی وێنەکە دابەش دەکەین بەسەر تیرەی ڕۆژەکەدا وەك لە خوارەوە دەردەکەوێت.

$$\frac{0.63}{1400\,000 \times 100\,000} = \frac{0.63}{1.4 \times 10^{11}} = \frac{63}{140} \times 10^{-11} = 4.5 \times 10^{-12}$$

# ڕاهێنـــــــان

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

**1** بەچی هاورێژەی ئەندازەیی لە جێگۆڕکێ ئەندازەییەکانی تر جیادەکرێتەوە.

**2** کۆڵکەی هاورێژەی ئەندازەیی چییە؟چۆن کۆڵکەی هاورێژەی ئەندازەیی دیاریدەکەیت. بەزانینی پارچە ڕاستەهێڵ و وێنەکەی؟

**کاریگەری هاورێژەی ئەندازەیی ڕوونبکەوە لەسەر وێنەی شێوە ئەندازەییەك ئەگەر کۆڵکەکەی یەکسان بێت بە:**

**3** 2 **4** 0.5 **5** –1 **6** 1

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

**چەقی هاورێژەیی ئەندازەیی لە پرسیاری 7 بۆ 10 خاڵی بنەڕەتە وێنەی خاڵەکە لە هەر جارێکدا دیاریبکە لە دواییدا خاڵ و وێنەکەی لە ڕووتەختی پۆتانەکاندا بکێشە.**

**7** خاڵەکە: (1, 5) ڕێژەکە: 3

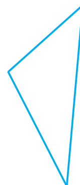
**8** خاڵەکە: (–1, 4) ڕێژەکە: 2

**9** خاڵەکە: (6, –2) ڕێژەکە: 0.25

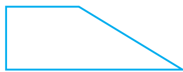
**10** خاڵەکە: (2, 3) ڕێژەکە: –2

**شێوە و چەقی هاورێژە درووستبکە، لە دوایدا وێنەی شێوەکە بەهاورێژەیی $n$ بکێشە:**

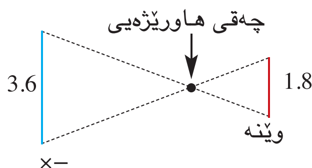
**11** $n = 2$



**12** $n = -1$



**13** وێنەی بەرامبەر پارچە ڕاستەهێڵێك و وێنەکەی بە هاورێژیەکی ئەندازەیی ڕووندەکاتەوە. ڕێژەی ئەو هاورێژەیە چەندە؟




## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

جەبر

**هەرپرسیارێك لە پرسیارەکانی 14–17 سەرەکانی شێوە ئەندازەییەك دەنوێنێت و کۆڵکەی هاورێژەیی ئەندازەییەکە لەخۆدەگرێت کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە لە ڕووتەختی پۆتاندا. وێنەی هەر سەرێك لە سەرەکانی هەر شێوەیەك دیاریبکە. لە دواییدا شێوە بنەڕەتییەکە و وێنەکەی لە ڕووتەختی پۆتاندا بکێشە.**

**14** (1, 3)؛ (2, 5)؛ (4, 3)؛
ڕێژەکە= 2 :

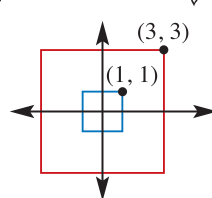
**15** (–3, 5)؛ (8, 9)؛ (2, –6)؛
ڕێژەکە = $\frac{1}{3}$

**16** (0, 0)؛ (6, 0)؛ (4, 4)؛ (2, 3)
ڕێژەکە = $-\frac{1}{2}$

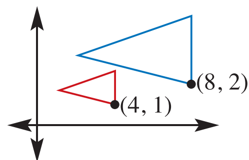
**17** (1, 1)؛ (3, –1)؛ (–2, –3)؛
ڕێژەکە = 1.6

هەرپرسیارێك لە پرسیارەكانی 18–21 دوو شێوەی تێدایە یەكێكیان سوور و ئەوەی تریان شینە. شێوە سوورەكە وێنەی شێوە شینەكە دەنوێنێ بە هاوڕێژەیەكی ئەندازەیی چەقەكەی خاڵی بنەڕەتە لە ڕووتەختی پۆتاندا.ڕێژەی هاوڕێژەی ئەندازەییەكە لە هەر جارێكدا دیاریبكە:

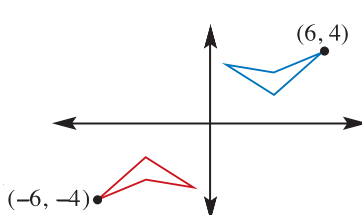
**18**



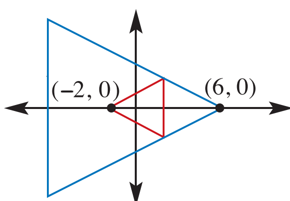

**19**



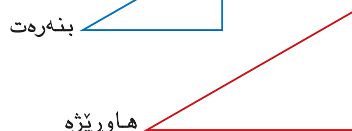

**20**




**21**




**22** ئەم شێوەیەی بەرامبەرت بكێشە و چەقی هاوڕێژە و ڕێژەكەی دیاریبكە.




هەرپرسیارێك لە پرسیارەكانی 23–26 پۆتانی هەردوو سەری پارچە ڕاستەهێڵێكن، ڕێژەی هاوڕێژەی ئەندازەیەكەی كە چەقەكەی خاڵی بنەڕتە لە ڕووتەختی پۆتاندا. بەبەكارهێنانی لاری ڕوونبكەرەوە كە وێنەی پارچەڕاستەهێڵەكە بە هاوڕێژەی ئەندازەیی بریتییە لە پارچە ڕاستەهێڵێك تەریبە بەبنەڕەتەكەی.

**23** (1 ، 0) و (5 ، 3) $n = 2$

**24** (−2, 3) (3 ،1) $n = 5$

**25** (−2, 4) و (4, 8)؛ $n = \frac{1}{2}$

**26** (1, 1) و (2 , 4) $n = 1.7$

**جەبر**

هەر پرسیارێك لە پرسیارەكانی 27–30 پۆتانی خاڵێك و كۆلكەی هاوڕێژەیی ئەندازەییەكە چەقەكەی خاڵی بنەڕەتە لە ڕووتەختی پۆتانەكاندا. بسەلمێنە كە ئەو ڕاستەهێڵەی بە خاڵەكەو وێنەكەی دادەڕوات بە هاوڕێژەی ئەندازەیی بە خاڵی بنەڕەت دادەڕوات لە ڕووتەختی پۆتانەكەدا.

**27** (1, 5)؛ $n = 4$

**28** (3, −2)؛ $n = \frac{5}{6}$

**29** (−5, 3)؛ $n = -3$

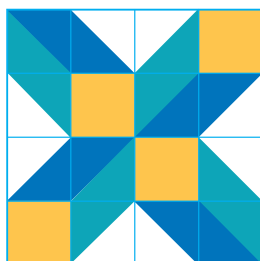
**30** (7, 4) ؛ $n = 2.5$

**بەرەنگاری**

**31** لە نموونەكانی هاوڕێژەی ئەندازەیی كە چەقەكەی نەكەوێتە خاڵی بنەڕەت لە ڕووتەختی پۆتاندا ئەو جێگۆڕكێیانەی كە خاڵی $(x, y)$ دەگۆڕێت بۆ خاڵی $(2x-4, 2y-3)$ ئەو پارچە ڕاستەهێڵە بكێشە كە دوو سەرەكانی بریتین لە (2, 3) و (5, 5) وێنەكە بكێشە بە جێگۆڕكێییەی پێشوو.چەقی هاوڕێژەی ئەندازەیی و ڕێژەكەی دیاریبكە لەوەی پێی هەستایت: سوود وەربگرە بۆ نوسینی پۆتانی خاڵی$(x, y)$ بەوڕێژە ئەندازەیەی كە چەقەكەی خاڵی (1, 2) و ڕێژەكەی 4 بێت.

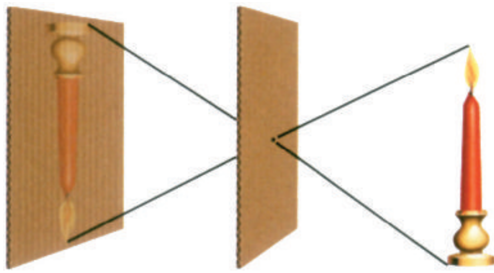
**جێبەجێكردنەكان**

**32** گلارە ویستی ئەم شێوەیەی بەرامبەر گەورە بكات لەسەر چوارگۆشەیەك كە لاكەی12cm لە جیاتی 4cm كۆلكەی هاوڕێژەی ئەندازەیی ڕێگاپێدراو بۆ ئەم كارە چەندە؟پۆتانی سەرەكانی یەكێك لە لاتەریبەكان ئەمانەن (0, 0)؛ (1, 1)؛ (1, 2)؛ (0, 1) پۆتانی وێنەی هەرسەرێك لەسەرەكانی دیاریبكە، بە گەورەكردن لەدواییدا وێنەی لاتەریبەكە بكێشە. شێوە بنەڕەتیەكەی لاتەریبەكەو وێنەكەی بەتەواوەتی لەسەر ڕووتەختی پۆتان بكێشە.



**جێبەجێکردنەکان**

وێنەی بەرامبەر هێڵکاریەك ڕووندەکاتەوە کە چۆن ئامێری وێنەگرتن کاردەکات.



**33** کام بەش لە ئامێری وێنە گرتنەکە چەقی هاوڕێژەکە دەنوێنێت؟

**34** ئایا کۆڵکەی هاوڕێژەکە موجەبە یان سالبە؟ هۆی وەڵامەکەت دیاریبکە.

**35** ئەو هۆیە چییە کەوا لە وێنەکە دەکات هەڵگەڕاوەبێت.

**36** یەکێك لە ئەندازیارەکان هەستا بە بچووککردنەوەی هێلکاری خانوێك بەبەکارهینانی ئامێری لەبەرگرتنەوە. پانی هێڵکاریەکە 15 cm و پانی وێنەکە 6 cm بوو. ڕێژەی بچووککردنەوەکە چەندە؟

## ڕوانین بۆ دواوە

**37** چێوەی سێگۆشەیەکی دوولایەکسان بدۆزەوە کە درێژی بنکەکەی 6cm و درێژی لایەکی 8cm ڕووبەرەکەشی بدۆزەوە.

**جێبەجێکردنەکان**

**38** درێژی ژێی ئەو سێگۆشەیە بدۆزەوە، کە پێوانەی گۆشەکانی 45 ، 45 ، 90 و درێژی لایەکی 7cm .

**39** **زەوی ناسی** چێوەی گەورەترین بازنەی زەوی دەگاتە 40 000km ئایا نیوەتیرەی زەوی چەندە؟

**40** **زەوی ناسی** بەرزی بەرگە هەوای زەوی دەگاتە 550km ئەم زانیارییە بەکاربێنە بۆ وەڵامی پرسیاری 39 بۆ هەژمارکردنی–Ì 0á_f0 گۆی زەوی لەگەڵ بەرگە هەواکەی.

## ڕوانین بۆ پێشەوە

**جێبەجێکردنەکان**

**کورسی پێچکەدار** یەکێك لە ئەندازیاران ویستی دیزاینێك دابنێت بۆ کورسیەکی پێچکەدار کە پەککەوتووەکان بەکاری دێنن بۆ بەشداریکردن لە یاری تۆپی سەبەتە. بڕیاریدا کە تیرەی پێچکەکە 56cm بێت.

**41** کورسی پێچکەدارەکە کاتێك $45^{o}$ دەخولێتەوە چەند بەرەو پێشەوە دەڕوات.

**42** درێژی یاریگایەکی تۆپی سەبەتە 23.5m . چەند خول تایەکە دەخولێتەوە بۆ ئەوەی کورسیە تایەدارەکە یاریگەکە ببڕێت و بچێتە لایەکی تری.



# بازنه Circles

وانەی 6

**ئامانجەکان**

- هاوکێشەی بازنە دەنووسێت و بەکاریدەهێنێت.
- هاوکێشەی بازنە بە پێی گۆڕانی چەقەکەی ڕاستدەکاتەوە.



**بۆچی؟**

بەرنامە ئەندازەییەکان ژمارەیەك لە شێوە ئەندازەییەکان دروست دەکەن وەك خاڵ و ڕاستەهێڵ بازنە. ئەم بەرنامانە هاوکێشە جەبری تایبەت بەو شێوانە بەکاردەهێنێت.

## کێشانی بازنە لە هاوکێشەکەیەوە Graphing Circle From an Equation

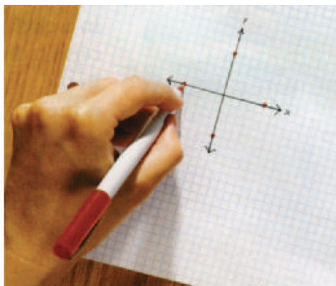
لە ماوەی خوێندنی ڕابردوو کۆمەڵێك هاوکێشەی جۆراوجۆر هاتۆتەرێت وەك $y = 2x - 3$ (هاوکێشەی ڕاستەهێڵ) یان $y = x^2 - 3$ ( هاوکێشەی برگەی هاوتا ) لەم وانەیەدا جۆرە هاوکێشەیەك دەدۆزیتەوە کە $x$ و $y$ بە دووجایی تێدا دەردەکەوێت.

**نموونە** 1

هێڵە ڕوونکردنەوەی هاوکێشەی $x^2 + y^2 = 25$ بکێشە بە دۆزینەوەی ژمارەیەك لە جووتە ڕێکخراوەکان $(x, y)$ کە پاسادانی ئەم هاوکێشەیە دەکەن و دیاریکردنی ئەو **خاڵانەی سەر بەو هاوکێشەیەن**. ئەو شێوە ئەندازەییە لە **هێڵە ڕوونکردنەوەیەکە بناسە**. دەتوانیت پەنا بەریتە بەر بژمێری ڕوونکردنەوە (حاسبة بيانية) بۆ دڵنیابونت لە ڕاستی وێنەکەت.

**جەبر**

**شیکار**



لە کاتی هەوڵدانت بۆ کێشانی هێڵی ڕوونکردنەوە بۆ جۆرێکی تازە لە هاوکێشەکان یەکەم جار هەوڵبدە ئەو خاڵانە دیاری بکەیت کە هەردوو تەوەرەکەی تێدا دەبڕێت. بۆ دیاریکردنی خاڵی یەکتر برین لەگەڵ تەوەرەی

سینی لە جیاتی گوراوی $y$ سفر دابنێ ( $y = 0$ ).

$x^2 + 0^2 = 25$ ، یان $x^2 = 25$ ، یان $x = \pm 5$



هێڵە ڕوونکەرەوەکە تەوەرەی سینی لە خاڵی$(5, 0)$ و$(-5, 0)$ دەبڕێت

بۆ دۆزینەوەی خاڵی یەکتربڕینی هێڵەکە لەگەڵ تەوەرەی صادی. $y$ بدۆزەرەوە بە دانانی $x = 0$

$0^2 + y^2 = 25$ یان $y^2 = 25$ یان $y = \pm 5$ هێڵە ڕوونکەرەوە کە تەوەرەی صادی لە خاڵی $(0, 5)$ و $(0, -5)$ دەبڕێت لە دوای ئەوە لە جیاتی گۆراوی $x$ چەند بەهایەکی تر وەربگرە وەك 3

$$3^2 + y^2 = 25$$

$y^2 = 16$ یان $y = \pm 4$ هێڵە ڕونکەرەوەکە بە هەردوو خاڵی $(3, 4)$ ، $(3, -4)$ دا دەڕوات. بەم شێوەیە دەتوانیت ئەم خشتەیەی بەرامبەر دروستبکەیت بە لەجیاتی دانانی گۆڕاوی$x$ بەچەند بەهایەکی گونجاو.ئەو خاڵانەی لە خشتەکەدا هاتووە لەسەر ڕووتەختی پۆتان دیاریبکە و خاڵەکان بگەیەنە ئەو وێنەی دەستدەکەوێت بریتییە لە و بازنەیەی کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە و نیوەتیرەکەی 5 . ئەو بازنەیە بکێشە.

| خاڵ لەسەر هێڵەکە | $y$ | $x$ |
|---|---|---|
| $(3, -4)$ و $(3, 4)$ | $\pm 4$ | 3 |
| $(-3, -4)$ و $(-3, 4)$ | $\pm 4$ | $-3$ |
| $(4, -3)$ و $(4, 3)$ | $\pm 3$ | 4 |
| $(-4, -3)$ و $(-4, 3)$ | $\pm 3$ | $-4$ |

**سەرەنجی ڕەخنەگرانە**

چۆن وێنەی ڕوونکردنەوەکە دەگۆڕێت ئەگەر لە جیاتی ژمارە 25 ژمارەکانی 49 و 81 و 51 لە هاوکێشەکەیدا دابنرێن.

## بەکارهێنانی بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی Using Graphing Technology

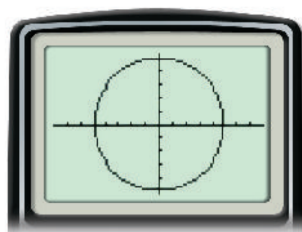



دەتوانیت بژمێری ڕوونکردنەوە بەکاربهێنیت بۆ کێشانی هێڵی ڕوونکردنەوەیی. بژمێرەکە داوات لێ دەکات کە هاوکێشەکە بخەیتە ناو بژمێرەکەوە لەسەر شێوەی $y = \ldots$ پێویستە لە سەرت هاوکێشەکە شیکار بکەیت بۆ دۆزینەوەی $y$ بەپێی $x$ .

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$y^2 = 25 - x^2$$

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2}$$



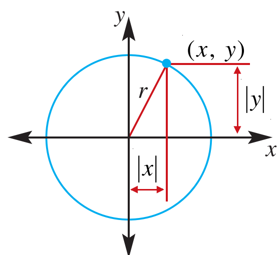
**جەبر**

بەم شێوەیە دەتوانیت وێنەی هێڵی ڕونکردنەوەی بۆ هاوکێشەی $y = \sqrt{25 - x^2}$ و $y = -\sqrt{25 - x^2}$ بکێشیت.

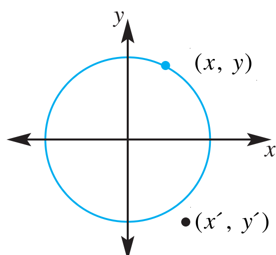
## Deriving the Equation of a Circle پێکهێنانی هاوکێشەی بازنە




بازنە کۆمەڵەخاڵێکە بەدووری یەکسان نت ( نیوەتیرە)لە خاڵێکی دیاری کراوەوە ( چەقی بازنە). بەسادەترین شێوە دەستپێبکە ئەویش کە خاڵی بنەڕەت ببێتە چەقی بازنە.




خاڵی $(x, y)$ هەڵبژێرە لەسەر بازنەکە کە ناکەوێتە سەر هەردوو تەوەرەکان سێگۆشەیەکی گۆشەوەستاو بکێشە لەو خاڵەوە دەستپێ بکات. هەروەک لەو وێنەی بەرامبەر ڕونکراوەتەوە. درێژی دوولای گۆشە وەستاوەکە بریتیە لە $|x|$ و $|y|$ و درێژی ژێیەکەی بریتیە لە درێژی نیوەتیرەکەی کە درێژبۆتەوە لە نێوان خاڵە هەڵبژاردەکەی سەربازنەکە و خاڵی بنەڕەت. بەوشێوەیە دەبینیت پۆتانی خاڵە هەڵبژاردەکە لە سەر بازنەکە پاسادانی ئەم هاوکێشەیە دەکات




$x^2 + y^2 = r^2$ هاوکێشەی 1

دەتوانیت پاسەدانی ئەوە بکەیت کە پۆتانی خاڵەکانی یەکتربڕینی بازنەکە لەگەڵ هەردوو تەوەرەکان پاساادانی ئەم هاوکێشەیە دەکاتە. بەرامبەر ئەوە ئەگەر خاڵێك $(x´, y´)$ بێت لە دەرەوەی بازنەکە، دووری ئەو خاڵە لە بنەڕەتەوە یەکسان نیە بە $r$ ، لەم ئەنجامەوە بۆمان دەردەکەوێت کە پۆتانی ئەو خاڵە پاسادانی هاوکێشەکەی پێشو ناکات. کەواتە $(x´)^2 + (y´)^2 \neq r^2$

**بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** بۆچی $(x´)^2 + (y´)^2 \neq r^2$ کاتێك $(x´, y´)$ ناکەوێتە سەربازنەکە؟ تێبینیبکە کە هاوکێشەی 1 ئەم دوو سیفەتەی تێدایە:

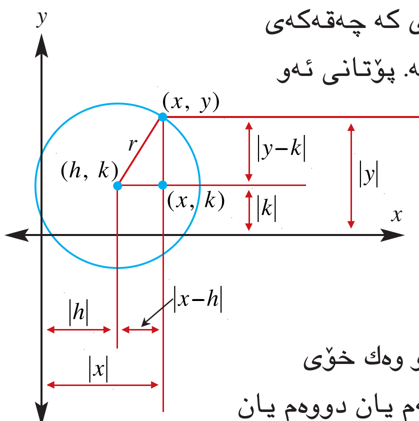
هەر خاڵێك بکەوێتە سەربازنەکە پاسادانی ئەو هاوکێشەیە دەکات.

هەر خاڵێك نەکەوێتە سەربازنەکە پاسادانی ئەو هاوکێشەیە ناکات.

لەوەی پێشوەوە بۆمان دەردەکەوێت کە هاوکیشەی $x^2 + y^2 = r^2$ هاوکێشەی بازنەیەکە نیوەتیرەکەی ( نت ) یە و چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە.

## Moving the Center of the Circle جولانی چەقی بازنە

بۆ دۆزینەوەی شێوەی گشتی هاوکێشەی ئەو بازنەیەی کە چەقەکەی ناکەوێتە خاڵی بنەڕەتەوە. سەیری شێوەی بەرامبەربکە. پۆتانی ئەو خاڵە دەکەوێتە سەربازنەکە کە پاسادانی هاوکێشەی بازنەکە دەکات.




$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ هاوکێشەی 2

**بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە** چۆن ڕوونیدەکەیتەوە کەپەیوەندیەکان لە شێوەی پێشو وەك خۆی دەمێنیتەوە ئەگەر خاڵی $(h, k)$ بکەوێتە چارەکی یەکەم یان دووەم یان سێیەم یان چوارەم .

## نموونە 2

چەقی ئەم بازنەیە دیاریبکە کە هاوکێشەکەی $(x-7)^2+(y+3)^2=36$ لە دوایدا نیوەتیرەکەی دیاریبکە.

**شیکار**

ئەگەر هاوکێشەی دراو لەگەڵ شێوەی گشتی هاوکێشەی بازنە بەراوردبکەین.

ئەم لێکچوونانەی خوارەوە دەبینی .

| لە شێوەی گشتی هاوکێشەی بازنەیی | لە هاوکێشەی دراو |
|---|---|
| $(x-h)^2$ | $(x-7)^2$ |
| $(y-k)^2$ | $(y+3)^2=((y-(-3))^2$ |
| $r^2$ | $36$ |

ئەم بەراوردکردنە ڕێگات پێدەدات کە بڵێیت $h=7$ $k=-3$ $r=6$

چەقی بازنەکە بریتییە لە خاڵی$(7, -3)$ یە و نیوەتیرەکەی یەکسانەبە 6 یەکەی درێژی.

**هەوڵبدە** چەق و نیوەتیرەی هەربازنەیەك لەم بازنانەی خوارەوە دیاریبکە. وێنەی هەر بازنەیەکیان بکێشە و وێنەکە لەگەڵ ئەوانەی دۆزیوتەوە بەراوردبکە.

أ $(x+3)^2+(y-3)^2=49$

ب $(x-3)^2+(y+3)^2=49$

ج $(x-4)^2+(y-5)^2=30$

د $(x+2)^2+(y-5)^2=50$

# ڕاهێنـــــــــان

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

1 چۆن خاڵەکانی یەکتربڕینی ئەو بازنەی هاوکێشەکەی $x^2+y^2=4$ بێت لەگەڵ هەردوو تەوەرەکە دیاریدەکەیت؟

2 چۆن خاڵەکانی یەکتربڕینی ئەو بازنەی هاوکیشەکەی $(x-2)^2+(y+2)^2=4$ بێت لەگەڵ هەردوو تەوەرەکە دیاریدەکەیت.

3 ئایا بازنەیەك هەیە هەردوو تەوەرەکە نەبڕێت؟ وێنەکەی چۆن دەردەکەویت لەم بارەدا؟

4 یاسای دووری نێوان دووخاڵ بەکاربهێنە بۆ نووسینی دووری نێوان دوو خاڵی $(x, y)$ و$(h, k)$ چ شتێك ئەم برە و شێوەی گشتی هاوکێشەی بازنەکە بەیەکەوەبەستێتەوە؟

5 تەکنەلۆجیا زۆر جار کاری بژمێری ڕوونکردنەوە، بۆ کێشانی وێنەی هاوکێشە دراوەکان لە سەر شێوەی...= $y$ دەبێت. چۆن شێوەی گشتی هاوکێشەی بازنەیەك شیکاردەکات بە پێی گۆڕاوی $x$؟

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

هاوکێشەی $x^2+y^2=100$ بەکاربهێنە لە پرسیارەکانی 6 بۆ 8 .

6 خاڵی یەکتربڕینی بازنەکە لەگەڵ هەردوو تەوەری پۆتانەکان دیاریبکە.

7 ئەم خشتەیەی خوارەوە تەواوبکە.

| $x$ | $y$ | خاڵ لەسەر بازنەکە |
|---|---|---|
| 0 | ? | ? |
| ؟ | 0 | ? |
| 6 | ? | ? |
| −6 | ? | ? |
| 8 | ? | ? |
| −8 | ? | ? |

8 ئەو خاڵانەی لەخشتەی پێشوو دەستتکەوتوە لە ڕووتەختی پۆتانەکان دیاربکە لە دواییدا وێنەی بازنەکە بکێشە.

هاوکێشەی $(x-4)^2+(y-3)^2=25$ بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 9 بۆ 11 .

9 چەقی بازنەکە دیاریبکە.

10 خاڵەکانی یەکتربڕینی بازنەکە لەگەڵ هەریەکە لە دوو تەوەری پۆتان دیاریبکە.

11 ئەم خشتەیەی خوارەوە تەواوبکە.

| $x$ | $y$ | خاڵ لەسەر بازنەکە |
|---|---|---|
| 0 | ? | ? |
| ؟ | 0 | ? |
| 1 | ? | ? |
| −1 | ? | ? |
| 4 | ? | ? |
| 7 | ? | ? |
| 8 | ? | ? |
| 9 | ? | ? |

12 ئەو خاڵانەی لە خشتەی پێشوو دەستتکەوتوە لە ڕووتەختی پۆتانەکان دیاریبکە لەدواییدا وێنەی بازنەکە بکێشە

## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

جەبر

**خاڵەکانی یەکتربڕینی هەربازنەیەك لەم بازنانەی خوارەوە لەگەڵ هەردوو تەوەری پۆتانەکان دیاریبکە.**

13 $x^2+y^2=64$

14 $x^2+y^2=50$

15 $x^2+(y-4)^2=25$

16 $(x-2)^2+y^2=9$

17 $(x-6)^2+(y-8)^2=100$

هاوکێشەی بازنەکە بنووسە ئەگەر چەق و نیوەتیرەکەی بزانیت

| | چەق | نیوەتیرە |
|---|---|---|
| 18 | (0, 0) | 6 |
| 20 | (0, 0) | $\sqrt{13}$ |
| 22 | (0, 6) | 5 |
| 24 | (1, −7) | 10 |

| | چەق | نیوەتیرە |
|---|---|---|
| 19 | (0, 0) | 2.5 |
| 21 | (2, 3) | 4 |
| 23 | (4, −5) | 7 |
| 25 | (4, −3) | $\sqrt{7}$ |

**جەبر**

چەق و نیوەتیرەی هەر یەك لەم بازنانەی خوارەوە بدۆزەوە.

**26** $x^2+y^2=100$

**27** $x^2+y^2=36$

**28** $x^2+y^2=101$

**29** $(x-6)^2+y^2=9$

**30** $x^2+(y-3)=4$

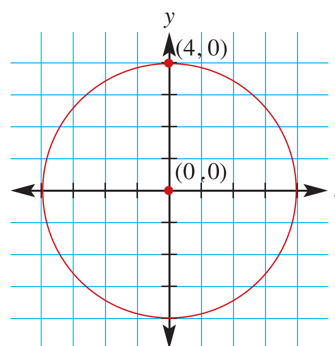
**31** $(x+5)^2+(y-2)^2=16$

**32** $x^2+(y+3)=49$

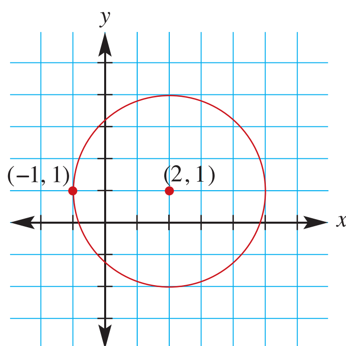
**33** $(x+1)^2+(y+3)^2=19$

هاوکێشەی ئەو بازنەیە بدۆزەوە کە لەم وێنانەی خوارەوە ڕوونکراوەتەوە

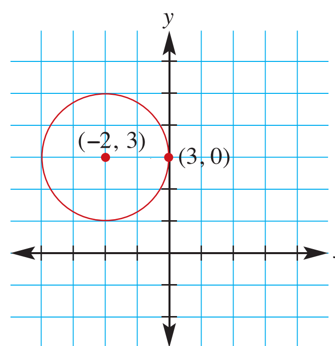
**34**




**35**




**36**




**جەبر**

خاڵەکانی یەکتربڕینی ئەم بازنە لەگەڵ هەردوو تەوەرەکان وەك لەم خشتەیەدا دراوە بدۆزەوە بە پێی ئەو خاڵانە بۆ هەریەکێکیان وێنەی بازنەکە بکێشە و هاوکێشەکەی بدۆزەوە .

| | یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری سینی | یەکتربڕین لەگەڵ تەوەری صادی |
|---|---|---|
| 37 | 3 و −3 | 3 و −3 |
| 38 | 6 و 2 | یەکتربڕین نییە |
| 39 | سفر | 0 و 8 |
| 40 | یەکتربڕین نییە | 5 |
| 41 | یەکتربڕین نییە | یەکتربڕین نییە |

جەبر

**هاوکێشەی ئەو بازنانە بدۆزەوە بەپێی ئەم زانیارییانەی دراوە، باشتر وایە وێنەکە بکێشیت.**

42 چەقەکەی $(2, 3)$؛ و لێکەوتە بۆ تەوەری سینەکان.

43 چەقەکەی $(2, 3)$؛ و لێکەوتە بۆ تەوەری صادەکان.

44 چەق: $(0, 1)$؛ بەخاڵی $(4, 4)$ دا دەڕوات

45 چەق: $(2, 3)$؛ بەخاڵی $(8, 3)$ دا دەڕوات

46 چەق: $(2, 3)$؛ بەخاڵی $(8, 11)$ دا دەڕوات

47 $(1, 3)$ و $(5, 3)$دووسەری یەکێك لە تیرەکانیەتی

**بژمێرەی ڕوونکردنەوەیی یان کاغەزی ڕوونکردنەوە بەکاربهێنە بۆ شیکاری پرسیارەکان لە 48 تا 54** .

48 بە ڕوونکردنەوەیی هاوکێشەی $(x-3)^2+(y-5)^2=4$ بنوێنە. وێنەی ئەوەی دەستتکەوتوە بە دەوری تەوەری سینی بکێشە. هاوکێشەی ئەم وێنەیەش بنووسە.

49 بە ڕوونکردنەوەیی هاوکێشەی$(x-4)^2+(y-2)^2=1$ بنوێنە. وێنەی ئەوەی دەستتکەوتوە بە دەوری تەوەری سینی بکێشە. هاوکێشەی ئەم وێنەیە بنووسە.

50 بە ڕوونکردنەوەیی هاوکێشەی $(x-2)^2+y^2=9$ بنوێنە. وێنەی ئەوەی دەستتکەوتوە بە کشانەوەی 6 یەکە بۆلای ڕاست بکێشە. هاوکێشەی ئەم وێنەیە بنووسە.

51 بە ڕوونکردنەوەیی هاوکێشەی $(x-6)^2+(y-4)^2=9$ بنوێنە. وێنەی ئەوەی دەستتکەوتوە بە کشانەوەی 2 یەکە بۆلای ڕاست بکێشە. هاوکێشەی وێنەکە بنووسە.

52 بە ڕوونکردنەوەیی هاوکێشەی $(x-5)^2+(y-4)^2=9$بنوێنە. وێنەی ئەوەی دەستتکەوتوە بە خولانەوەی گۆشەکەی بە 180 بکێشە لە دەوری خاڵی بنەڕەت بکێشە. هاوکێشەی ئەم وێنەکە بنووسە.

53 هاوکێشەی لێکەوتی بازنەی $x^2+y^2=100$ لە خاڵی $A(-6, 8)$ بدۆزەرەوە.

بەرەنگاری

54 ئەو سێگۆشەیەی کە سەرەکانی $(0, 0)$، $(0, 6)$، $(8, 0)$ بن بکێشە لە دواییدا هاوکێشەی ئەو بازنەیە بدۆزەوە کە بەسەرەکانیدا ڕۆیشتوە.

## ڕوانین بۆ دواوە

55 پاوان تیرێکی هەڵدا بۆ سەر وێنەی بازنەیەك کە هاوکێشەکەی$x^2+y^2=100$ ئەگەری ئەوەی تیرەکە بکەوێتە ناو بازنەی$x^2+y^2=25$ چەند؟

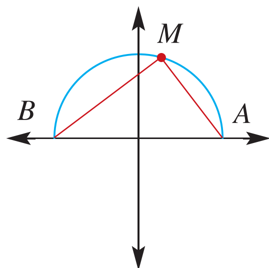


56 گەردوون ئارام پلێتیکی بەکارهێنا کونێکی بچووکی تێدا بوو تیشکی خۆری پێدا دەڕۆیشت بۆ بینینی ڕۆژگیران. شاشەیەکی سپی لە دووری 50cm لە کونەکەوە دانا. وێنەی خۆرەکەی دەستکەوت کە تیرەکەی $x$ mm تیری وێنەی خۆرەکە چەند دەبێت ئەگەر ئارام شاشەکە دابنێ لە دووری 100cm؟ 25cm؟ 45cm؟



## ڕوانین بۆ پێشەوە

**بە هۆی شیکرکردنی پرسیارەکانی 57 تا 59 دەیسەلمێنین کە ئەو چێوەگۆشەیەی لە نیوەی بازنەیەکدا کێشراوە گۆشە وەستاوە، وێنەی بەرامبەر بەکاربهێنە.**




**57** هاوکێشەی ئەو بازنەیەی کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە و نیوەتیرەکەی $r$ ، بەکاربهێنە بۆ ڕوونکردنەوەی ئەوەی کە پۆتانی خاڵێک $m$ لە خاڵەکان بریتییە لە $\left(a, \sqrt{r^2 - a^2}\right)$.

**58** لاری هەریەک لە دوو ڕاستەهێڵی $MA$ ، $MB$ بدۆزەوە.

**59** بیسەلمێنە کە چێوگۆشە وەستاوە ( لە بیرت بێت: ئەگەر دوو ڕاستەهێڵ ئەستوون بن ئەوا ئەنجامی لێکدانی لارییەکانیان یەکسانە بە ___؟___؟

بەش پرۆژەی

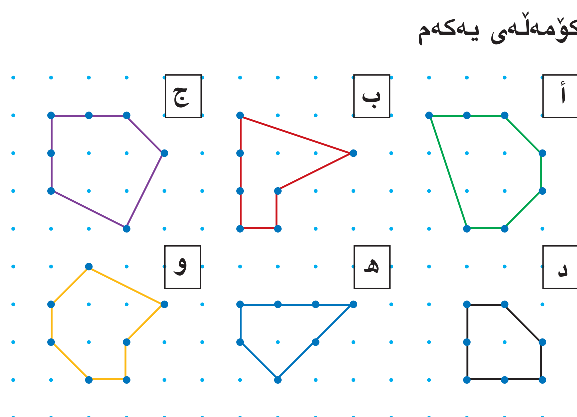
# بیرکاری سەرسامکەر

ئەم پرۆژەیە هانت دەدات بۆ گەیشتن بە ڕێسایەك كە یارمەتیت دەدات ڕووبەری چەند لایەکی کێشراو لە سەر کاغەزێکی خاڵدار (بیانی) بدۆزیتەوە. بە دانانی ئەوەی کە هەموو سەرەکانی چەندلاکە دەکەونە سەر خاڵەکانی کاغەزەکە. لە دوایدا سەرسام دەبێت بەبوونی تەنها ڕێسایەك کە دەگونجێت بۆ هەموو چەندلایەك. لەدوایدا کارەکە ئەنجام بدە بەکاری هەرەوەزی لەگەڵ برادەرەکانت لە گرووپی کارکردندا. باشتروایە کارەکە لە نێوان خۆتاندا دابەش بکەن.

## چالاکی 1

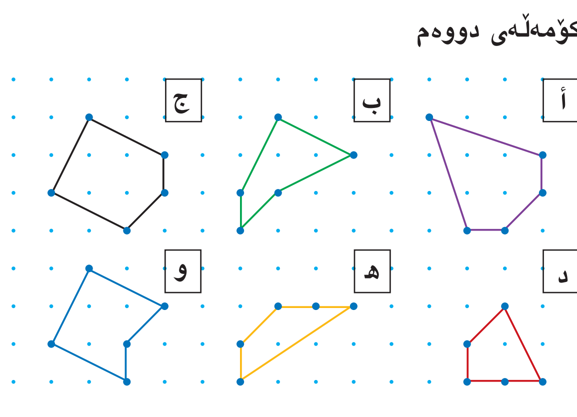
ڕووبەری هەریەك لەم چەندلایەنەی خوارەوە بدۆزەوە. هەستە بەم کارە بە درووستکردنی خشتەکە و تەواوکردنی. $N_b$ هێمایەکە بۆ ئەو خاڵانەی کە دەکەونە سەر چێوەی چەندلایەك $N_i$ هێمایەکە بۆ ئەو خاڵانەی کە دەکەونە ناو چەندلایەکە $A$ هێمایەکە بۆ ڕووبەری چەندلایەکە.

کۆمەڵەی یەکەم




| کۆمەڵەی یەکەم | | | |
|---|---|---|---|
| | $N_b$ | $N_i$ | $A$ |
| ( أ ) | 7 | 4 | 6.5 |
| ( ب ) | | | |
| ( جـ ) | | | |
| ( د ) | | | |
| ( هـ ) | | | |
| ( و ) | | | |

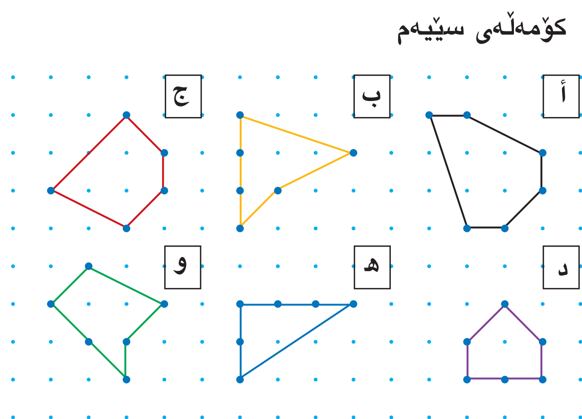
کۆمەڵەی دووەم




| کۆمەڵەی دووەم | | | |
|---|---|---|---|
| | $N_b$ | $N_i$ | $A$ |
| ( أ ) | | | |
| ( ب ) | | | |
| ( جـ ) | | | |
| ( د ) | | | |
| ( هـ ) | | | |
| ( و ) | | | |

| کۆمەڵەی سێیەم | | | |
|---|---|---|---|
| A | $N_i$ | $N_b$ | |
| | | | (أ) |
| | | | (ب) |
| | | | (جـ) |
| | | | (د) |
| | | | (هـ) |
| | | | (و) |

کۆمەڵەی سێیەم




## چالاکی 2

**بۆ دۆزینەوەی یاسایەك پاسادانی ئەوە بکە کە ژمارەی هەموو ئەو خاڵانەی دەکەونە سەر چێوەی هەموو چەندلاکان هەمان ژمارەیە.**

1 ئەو شێوازە چیە کە یارمەتیت دەدات بۆ دۆزینەوەی رووبەرەکە؟

2 ئەو شێوازە بنووسە، کە دۆزیوتەوە، بە شێوەی یاسایەك.

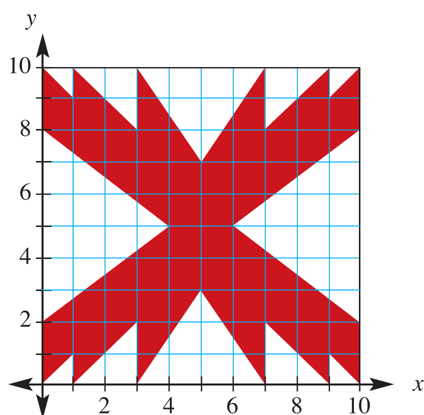
3 ئەو یاسایەی نوسیووتە پاسادان بکە بە رێگای کێشانی ژمارەیەك چەندلا لەسەر کاغەزی خاڵدار (بەیانی) و هەژمێری رووبەرەکانیان بکە.

تۆ یەکەم کەس نیت ئەو یاسایە بدۆزیتەوە. پێش تۆ زانا جۆرج پێك ساڵی 1899ز دۆزیویەتیەوە.

## چالاکی 3

**شێوەی بەرامبەر بەکاربهێنە**

بەشێوەی رەمەکی ئەگەر خاڵێك لەسەر کاغەزی بەیانی هەڵبژێری ئەگەری ئەوەی ئەو خاڵە لە خاڵە رەنگکراوەکان بێت چەندە؟



# 7 پێداچوونەوەی بەش

**ئەم بۆشاییانەی خوارەوە بە دەستەواژەی گونجاو پڕبکەوە.**

1 یەکتربڕینی دوو ڕاستەهێڵ پێکدێت لەیەک ___ ؟

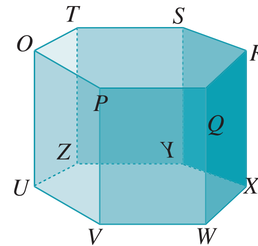
2 یەکتربڕینی دوو ڕووتەخت پێکدێت لەیەک ___ ؟

3 بە دوو خاڵی جیاوازدا تەنها یەک ___ ؟ دەڕوات.

4 بەسێ خاڵ کە لەڕێکی یەکترنەبن تەنها یەک ___ ؟ دەڕوات.

5 ئەگەر دوو خاڵی جیاواز بکەونە ڕووتەختێك، ئەوا ئەو ڕاستەهێڵەی بەو دوو خاڵە دادەڕوات ___ ؟

**ئەو پوازکە وەستاوە بەکاربهێنە بۆ شیکاری پرسیارەکان لە 6 بۆ 9 .**




6 دوو ڕووی تەریب ناوبنێ

7 دوو ڕووی ئەستون ناوبنێ

8 دوو لای تەکولۆ ناوبنێ

9 لایەك و ڕوویەکی ئەستون ناوبنێ

10 وێنەیەکی بینراو بۆ پوازکێکی وەستاو کە بنکەکەی لاکێشە بێت دروست بکە بەمەرجێك خاڵی پوکانەوە بکەوێتە لای ڕاستی پوازکەکە.

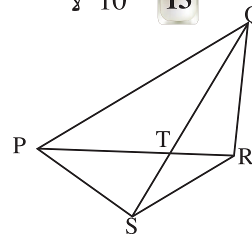
11 وێنەیەکی بینراو بۆ پوازکێکی وەستاو کە بنکەکەی لاکێشە بێت دروست بکە بەمەرجێك خاڵی پوکانەوەی لە پشت پوازکەکە بێت

**ناوی ئەم چەندلایانە چیە؟**

12 8 لا

13 10 لا

14 12 لا




شێوەکەی سەرەوە بەکاربهێنە کاتێك:

$\widehat{PRQ}=90^{o}$ $\widehat{PTQ}=125^{o}$ $\widehat{RQR}=57^{o}$

$\widehat{PSQ}=83^{o}$ $\widehat{RSQ}=30^{o}$

بۆ شیکارکردنی پرسیارەکانی 15 تا 18 ، پێوانەی گۆشەکانی هەرسێگۆشەیەك دیاربیکە.

15 سێگۆشەی $RST$

16 سێگۆشەی $PST$

17 سێگۆشەی $PQR$

18 سێگۆشەی $PQT$

19 سەرجەمی پێوانەی گۆشەکانی هەشت لایەك چەندە؟

20 پێوانەی چەقە گۆشەیەك لە هەشت لایەکی ڕێك چەندە؟

21 پێوانەی گۆشەیەکی ناوەوە لە هەشت لایەکی ڕێك چەندە؟

22 پێوانەی دەرە گۆشەیەك لە هەشت لایەکی ڕێك چەندە؟

**وێنەی ئەو پارچە ڕاستەهێڵەی کە دوو سەرەکانی دوو خاڵی $(-2, 1)$ و $(3, 4)$ بن دیاربیکە بە هاوڕێژەی ئەندازەیی کە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە و ڕێژەکەی.**

23 3

24 $-1$

**شێوەکە دروستبکەوە و وێنەکەی بکێشە بە هاوڕێژەی ئەندازەیی کە چەقەکەی خاڵی دیاریکراوە و ڕێژەکەی $n$ ە:**

25 $n=3$

26 $n=\frac{1}{2}$

**وێنەی ئەم بازنانەی خوارەوە لە ڕووتەختی پۆتاندا بکێشە.**

27 $x^2+y^2=49$

28 $(x-1)^2+(y+2)^2=25$

29 چەقی ئەم بازنەیە $(x+3)^2+(y-4)^2=25$ ؟

**هاوکێشەی ئەم بازنەیە بدۆزەرەوە کە چەقەکەیان $M$ و نیوەتیرەکەیان $r$ بێت.**

30 $M(0, 0)$ ؛ $r=1$

31 $M(6, -2)$ ؛ $r=8$

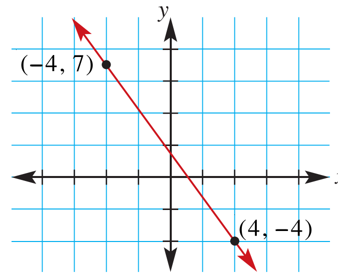



# تاقیکردنەوەی بەش

**1** کام جووت لە خاڵەکان ڕاستەهێڵێکی ستوون دیاریدەکات لەگەڵ ئەو ڕاستەهێڵەی لە وێنەی خوارەوە کێشراوە ؟

أ $(0, 7)$ و $(8, -4)$ ب $(4, -7)$ و $(-4, 4)$

ج $(-7, 0)$ و $(4, 8)$ د $(7, -4)$ و $(-4, 4)$




**2** کام لەم پێوانانەی خوارەوە سێگۆشە دیاری ناکات؟

أ $A=50^\circ$ ؛ $B=85^\circ$ ؛ $C=45^\circ$

ب $AB=12$ ؛ $BC=7$ ؛ $CA=9$

ج $A=90^\circ$ ؛ $B=65^\circ$ ؛ $C=15^\circ$

د $A=18$ ؛ $BC=6$ ؛ $CA=10$

**3** کام پێوانەی خوارەوە پێوانەی گۆشەی نۆلایەکی ڕێکە؟

أ $40^\circ$ ب $100^\circ$

ج $140^\circ$ د $160^\circ$

**4** ڕۆژان دوو ڕاستەهێڵی کێشا لاری یەکەم = $-5$ و لاری دووەم = $0.2$ بێت ئایا ئەم دوو ڕاستەهێڵە.

أ تەریبن ب ستوونن

ج ئاسۆیی د بێجگە لەوانە

**5** جێگۆرکێی ئەندازەیی کە خاڵی $(x, y)$ دەگۆڕێت بۆ خاڵی $(-x, -y)$ بریتییە لە:

أ کشانەوە ب وێنەدانەوەی تەوەرەیی

ج خولانەوە د هاوڕێژەی ئەندازەیی

**6** بسەلمێنە ئەو چوار لایەی سەرەکانی $A(3, -1)$ $B(9, -5)$ $C=(7, -8)$ $D=(1, -4)$ لاکێشەیە؟

سەرەکانی سێگۆشەیەک بریتییە لە **(4, 1)** و **(2, 2)** و **(3, 0)** پۆتانی سەرەکانی وێنەکەی بەم جێگۆرکێیانە دیاریبکە.

**7** وێنەدانەوە بە پێی تەوەرەی سینی

**8** کشانەوە 3 یەکە بەلای چەپ و یەک یەکە بۆ خوارەوە.

**ئەمانە تەواوبکە**

**9** یەکتربڕینی دوو ڕاستەهێڵ پێکدێت لە ____؟

**10** یەکتربڕینی دوو ڕووتەخت پێکدێت لە ____؟

**11** ئەو ڕاستەهێڵەی بە دوو خاڵی جیاوازدا لەناو ڕووتەختێکدا دەڕوات ____؟

سێگۆشەی $ABC$ بەکاربهێنە کاتێک $A(-1, 8)$ $B(4, 3)$ $C(1, 2)$ بۆ شیکاری پرسیارەکان لە 12 بۆ 15 .

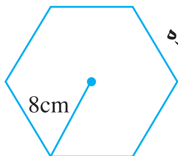
**12** لاری هەر لایەک لە لاکانی بدۆزەوە

**13** بیسەلمێنە سێگۆشەکە وەستاوە.

**14** پۆتانی خاڵەکانی ناوەڕاستی لاکانی بدۆزەوە.

**15** درێژی لاکانی بدۆزەوە هەموو وەڵامەکانت نزیکبکەوە لە نزیکترین بەش لە سەد.

**16** ڕووبەری چەند لای بەرامبەر بدۆزەوە



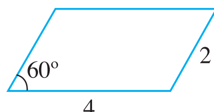

**17** پۆتانی وێنەی خاڵی $(3, 3)$ بە خولانەوە چەقەکەی خاڵی بنەڕەت و گۆشەکەی $45^\circ$ بدۆزەوە؟

**18** ئاوات لە سەر ئەم پارچە ڕاستەهێڵەی خوارەوە بەشێوەیەکی هەڕەمەکی خاڵێکی هەڵبژارد. ئەگەری ئەوەی ئەو خاڵە بکەوێتە نێوان 2 و2,5بێت چەندە.




**19** پێوانەی چەقە گۆشە لە سێزدەلایەکی ڕێك بدۆزەوە؟

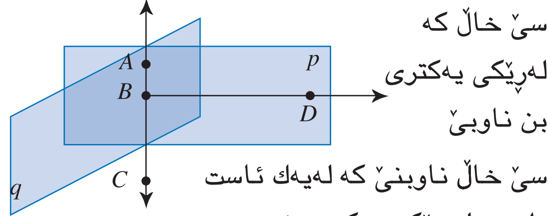
**20** ڕووبەری ئەم لاتەرییە بدۆزەوە؟



7

# تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

ئەم وێنەی خوارەوە بەکاربهێنە بۆ شیکاری پرسیارەکان لە 1 بۆ 9 .




1 یەکتربڕینی هەردوو رووتەختی $p$ و $q$ ناوبنێ

2 سێ خاڵ کە لەرێکی یەکتری بن ناوبنێ

3 سێ خاڵ ناوبنێ کە لەیەك ئاست دابن و لە رێکی یەکتری نەبن

4 سێ پارچە راستەهێڵ ناوبنێ.

5 تیشکێك ناوبنێ.

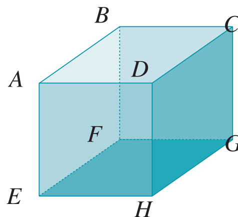
6 دووگۆشەی تەواوکەری یەکتری دیاریبکە.

7 راستەهێڵێك دیاریبکە کە بکەوێتە رووتەختی $p$

8 راستەهێڵێك دیاریبکە نەکەوێتە رووتەختی $q$

9 رووتەختی $p$ بە رێگایەکی تر ناوبنێ.

ئەم شێوەیەی خوارەوە بەکاربهێنە بۆ شیکاری پرسیارەکان لە 10 بۆ 17




10 جووتێك لە رووەکانی تەریب بەیەکتر ناوبنێ

11 دوو لای تەکولۆ ناو بنێ

12 لایەك و رووەیەك ناوبنێ بەمەرجێك لایەکە ئەستوون بێت لەگەڵ رووەکە.

13 لایەك ورووێك ناوبنێ بەمەرجێك لایەکە تەریب بێت بەرووەکە.

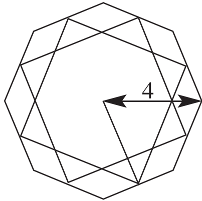
14 دووتۆی گۆشەیەك ناو بنێ وپێوانەکەی دیاریبکە

15 وێنەیەکی بینراو دروستبکە کە یەك خاڵی پوکانەوەی هەبێت بۆ خشتەکێك ئەگەر بزانی خاڵە پوکانەوەکە بکەوێتە پشت خشتەکەکە.

16 وێنەیەکی بینراو دروست بکە دوو خاڵی پوکانەوەی بۆ خشتەکێك هەبێت ئەگەر بزانی ئاسۆ دەکەوێتە پشت خشتەکەکەوە.

17 وێنەیەکی بینراو دروستبکە کە دوو خاڵی پوکانەوە بۆ خشتەکێك هەبێت ئەگەر بزانی ئاسۆبکەوێتە پێش خشتەکەکە.

وێنەی بەرامبەر بەکاربهێنە بۆ شیکارکردنی پرسیارەکان لە 18 بۆ 21 .




18 ژمارەی چەندلا رێکەکان لە شێوەی بەرامبەر چەندە؟ جۆری هەر شێوەیەك دیاربکە.

19 بۆ هەر چەندلایەکی رێك کە دۆزیتەوە لەپرسیارەکەی پێشوو پێوانەکانی گۆشەی ناوەوە و چەقە گۆشە و گۆشەکانی دەرەوە دیاریبکە؟

20 ئەستووندەکی هەشت لاکە بدۆزەرەوە.

21 رووبەری ئەو چەند لارێکانە بدۆزەوە لەپرسیاری 18 دا.

22 **دیزاین** دارتاشێك هەستا بە گەورەکردنی مێزێکی چوارگۆشە بە زیادکردنی پارچە تەختەیەکی لاکێشەیی بۆ رووەکەی. ئایا مێزە تازەکە رێکە؟لایەکسانە؟گۆشەکانی یەکسانن؟

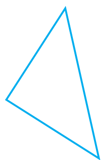
| رووی مێزەکە | پارچەی زیادکراو |
|---|---|

**وێنەی ئەو پارچە راستەهێڵەی کە سەرەکانی (1−, 6) (2 ,4−) دیاریبکە؟بەم دوو هاورێژە ئەندازەییە.**

23 هاورێژە ئەندازەییەکە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە و رێژەکەی = 2−

24 هاورێژە ئەندازەییەکە چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە و رێژەکەی = 0.5

25 شێوەی بەرامبەر بکێشە و وێنەی سێگۆشەکە دروستبکە بە هاورێژەی ئەندازەیی چەقەکەی خاڵی دراوە و رێژەکەی = 2 .



**وێنەی هەریەك لەم بازنانە بکێشە کە هاوکێشەکانیان ئەمانەن.**

26 $x^2+y^2=36$

27 $x^2+y^2=64$

28 $(x+2)^2+(y-3)^2=9$

**هاوکێشەی هەریەك لەم بازنانە بدۆزەوە.**

29 چەقەکەی خاڵی بنەڕەتەو نت = 2

30 چەقەکەی خاڵی (1, −5) وە نت = 4

# بەشی هەشتەم

# سێگۆشەزانی

# Trigonometry

1. شیکاری سێگۆشەی وەستاو.
2. گۆشەکانی خولانەوە.
3. پێوانەی بازنەیی و درێژی کەوانە.
4. هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان.

پرۆژەی بەشەکە

پێداچوونەوە

تاقیکردنەوەی بەش

تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

# سێگۆشەزانی Trigonometry

بەشی

8

لە نێوان پێوانەکانی لاکانی سێگۆشە و گۆشەکانی پەیوەندی گرنگ هەیە کە زانستێکی کۆن نویێ لێیدەکۆڵێتەوە ئەویش سێگۆشەزانییە.
لە دێر زەمانەوە مرۆڤ گرنگی داوە بە سێگۆشەکان. لەم دوو لاپەڕە وێنەکان ئاماژە بۆ ئەوە دەکەن. سێگۆشەزانی بەکارهێنانەکانی زۆرفراوانە لە فیزیا و زانستی گەردوون و تەلارسازی و ئەندازە و ئەوانی تر.

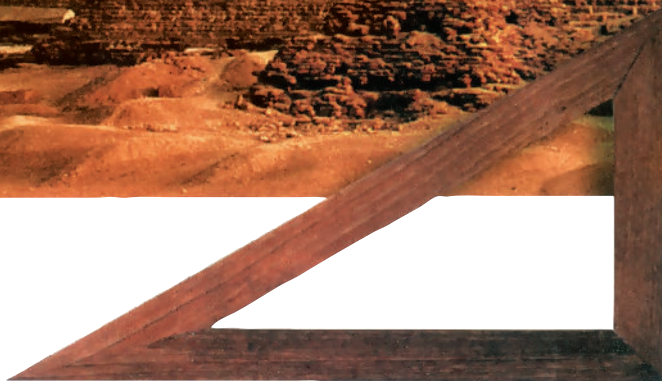
وانەکان

1. شیکارکردنی سێگۆشەی وەستاو.
2. گۆشەکانی خولانەوە
3. پێوانەی بازنەیی و درێژی کەوانە.
4. هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان.

پرۆژەی بەش





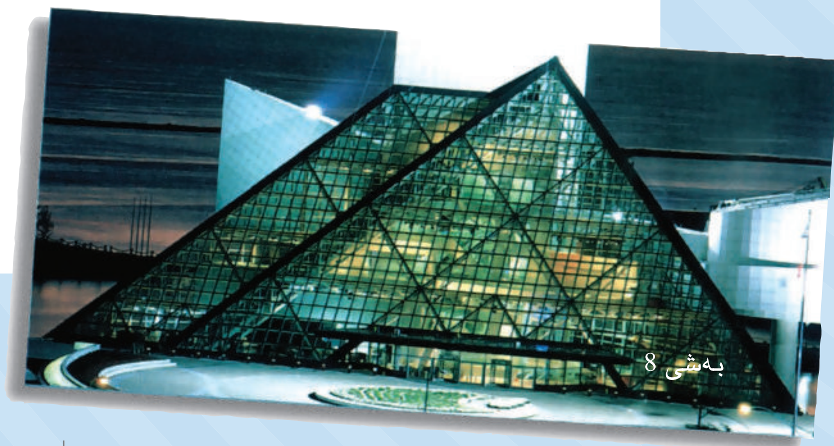


### دەربارەی پرۆژەی بەش

بەبۆنەی کردنەوەی پێشانگای جیهانی لە شاری شیکاغۆی ئەمریکی ساڵی 1893 ، جۆرج فیریس چەرخێکی گەورەی دروستکرد، کە بە ناوی خۆیەوە ناسراوە، چەرخەکە خانەخانە کراوە، هەر خانەیەك جێگای چەند کەسێکی لێدەبێتەوە، بە خولانەوەی دۆلابەکە «چەرخەکە» ئەو نەفەرانەی دەگواستەوە لە خوارەوە بۆ سەرەوە و بە پێچەوانەوە. لە ماوەی کارکردنت لە بەشەکە، هەڵدەستیت بە پێشخستنی ئەم سامپڵە (نموونە) بۆ لێکۆڵینەوەی گۆڕانی بەرزبوونەوەی نەفەرەکەی خانەکە بە تێپەڕبوونی کات.

دوای تەواوبوونت لە بەشەکە دەتوانیت:

- سامپڵێکی بیرکاریانە دابنێیت بۆ بەرزی خاڵێك کە دەکەوێتە سەر چێوەی چەرخەکە بەپێی کات.
- ڕوونکردنەوەی هەر پێکهینەرێك لەپێکهێنەرەکانی سامپڵەکە چی دەگەیەنێ لەژیانی ڕۆژانە.
- دیاریکردنی خێرایی خاڵێك لەسەر چیوەی چەرخەکە.



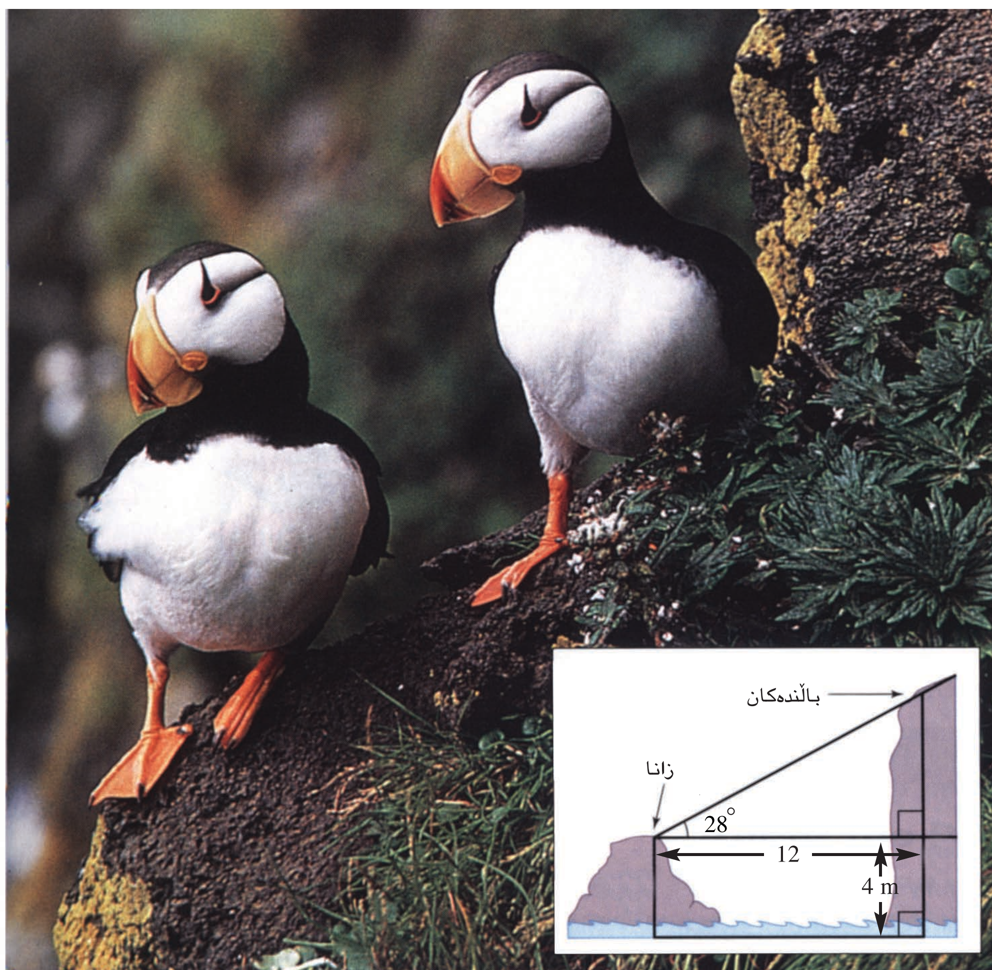
# شیکارکردنی سێگۆشەی وەستاو

## Solving Right Triangle

وانەی 1

**ئامانجەکان**

- ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی تیژ هەژماردەکات و جیا دەکاتەوە.
- سێگۆشەی وەستاو بەبەکارهێنانی ڕێژە سێگۆشەییەکان شیکاردەکات.




**بۆچی؟**

دەتوانیت ڕێژە سێگۆشەییەکانی سێگۆشەیەکی وەستاو بەکاربهێنێت بۆ شیکاری ئەو پرسیارانەی لە ژیانی ڕۆژانەدا دێتە ڕێگامان وەك لە دیاریکردنی بەرزی ئەو باڵندانەی لە وێنەکەدا دەرکەوتوون لە ڕووی ئاوەکەوە.

**جێبەجێکردنەکان**

باڵندەکان

یەکێك لە زاناکان هەستا بەگرتنی وێنەی کۆمەڵە باڵندەیەك لەقەدپاڵی شاخێکدا وەستابوون. بۆ دۆزینەوەی بەرزی ئەو باڵندانە لە ڕووی ئاوەکەوە. زاناکە هەستا بە پێوانی ئەو گۆشەی دروست بووە لە ئەنجامی هێڵی سەیرکردنی بۆ بڵندەکان لەگەڵ هێڵی ئاسۆیی، بینی پێوانەی گۆشەکە $28^\circ$ زاناکە چۆن ئەم کارەی ئەنجامدا.ئەگەر بزانیت ئەو لە بەرزی 4 m وەستاوە و دووری نێوان ئەو و قەدپاڵی شاخەکە 12m بووە؟

بۆ ئەوەی بەرزی شوێنی باڵندەکان دیاریبکەیت سێگۆشەزانی بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی پێوانەی گۆشەیەك لە گۆشەکانی سێگۆشە وەستاوەکە یان درێژی لایەك لە لاکانی.

بیربکەوە که ژێی سێگۆشەی وەستاو ئەولایەیە کە بەرامبەر گۆشە وەستاوەکەیە. لەو سێگۆشەی لە لای چەپ کێشراوە، دەبینین $\overline{AB}$ ژێیەو و $\overline{AC}$ **تەنیشت گۆشەی** A و $\overline{BC}$ لای بەرامبەری گۆشەی A .

لای تەنیشت و بەرامبەری گۆشەی B دیاریبکە.

B, C, A
لای بەرامبەر گۆشەی A
ژێ
لای تەنیشت گۆشەی A

**خاڵی چاودێری** ✔

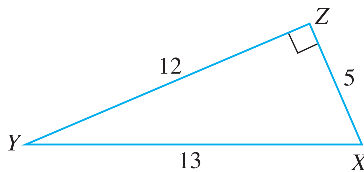
**ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی $\hat{A}$ — Trigonometric Ratios $\hat{A}$**

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{بەرامبەر}}{\text{ژێ}} \qquad \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{تەنیشت}}{\text{ژێ}} \qquad \tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{بەرامبەر}}{\text{تەنیشت}}$$

سەرنج بدە: sin A = sine A , cos A = cosine A , tan A = tangent A

## نموونە 1

هەرسێ ڕێژە سێگۆشەییەکان بۆ گۆشەی $X$ لەسێگۆشەی بەرامبەر هەژماربکە.




**شیکار**

$\sin \hat{X} = \frac{YZ}{XY} = \frac{12}{13} = 0.9231$

$\cos \hat{X} = \frac{XZ}{XY} = \frac{5}{13} = 0.3846$

$\tan \hat{X} = \frac{YZ}{XZ} = \frac{12}{5} = 2.4$

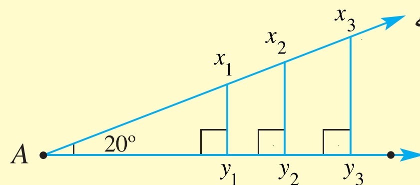
**هەوڵبدە** هەرسێ ڕێژە سێگۆشەییەکان بۆ گۆشەی $Y$ لە سێگۆشەکەی سەرەوە هەژماربکە وەڵامی تەواوی بدەوە وەڵامەکانت لە نزیکترین بەش لە دەهەزار نزیکبکەرەوە.

## چالاکی

## دۆزینەوەی ڕێژەی سێگۆشەکان Explrering Trigonometric Ratios

**پێویستیت** بە پرگاڵێك و ڕاستەیەك و بژمێرێك هەیە.

خشتەیەك دروستبکە وەك خشتەکەی خوارەوە.




1. ئەوەی لە خشتەکەدایە بینووسەوە. لەدوایدا تەواوبکە لە ڕێگای پێوانی لایە دیاریکراوەکان لەگەڵ دۆزینەوەی ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی A .
2. ئایا ئەو بەهایانەی نووسیوتە لە ستونی $\sin A$ بە نزیکەیی یەکسانن؟ کارەکە لە ستونی $\cos A$ وایە؟ لەستوونی $\tan A$ وایە؟

| سێگۆشە | بەرامبەر $\hat{A}$ | تەنیشت $\hat{A}$ | ژێ | $\sin \hat{A} = \frac{\text{بەرامبەر}}{\text{ژێ}}$ | $\cos \hat{A} = \frac{\text{تەنیشت}}{\text{ژێ}}$ | $\tan \hat{A} = \frac{\text{بەرامبەر}}{\text{تەنیشت}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Ax_1y_1$ | | | | | | |
| $Ax_2y_2$ | | | | | | |
| $Ax_3y_3$ | | | | | | |

3. ئەو ئەنجامانەی دەستتکەوتووە بەراوردی بکە لەگەڵ ئەنجامەکانی هاوڕێکانت لە پۆلەکەدا.
4. ئایا دەتوانیت گریمانەیەك دابڕێژیت دەربارەی هەرسێ ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی $A$ ؟

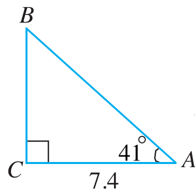
**خاڵی چاودێری** ✓

بەهاکانی ڕێژەی سێگۆشەیی گۆشەیەکی تیژ ناگۆڕێت بە گۆڕانی سێگۆشە وەستاوە بەکارهاتووەکە، هەروەك لە چالاکی سەرەوە بۆت دەرکەوت، بەهاکانی ئەم ڕێژانە تەنها بە پێوانەی گۆشەکە دیاری دەکرێت.

دەتوانیت بەهاکانی ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەکەت دەست بکەوێت بەزانینی پێوانەکەی بەبەکارهێنانی بژمێری زانستی. و دەتوانیت ڕێژە سێگۆشەییەکان بەکاربهێنیت بۆ دۆزینەوەی هەندێك لە لاکانی سێگۆشەی وەستاو هەروەك نموونەی 2 ڕوونیدەکاتەوە.

## نموونە 2

دریژی لاکانی سێگۆشەی بەرامبەر بدۆزەرەوە.




**شیکار**

لە بەر ئەوەی درێژی $AC$ زانراوە پێویستە درێژی هەریەك لە $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ بدۆزیینەوە.

$\cos A$ بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی درێژی $AB$

$\tan A$ بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی درێژی $BC$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} \qquad \tan A = \frac{BC}{AC}$$

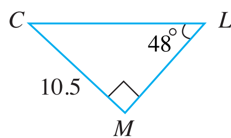
$$\cos 41^{\circ} = \frac{7.4}{AB} \qquad \tan 41^{\circ} = \frac{BC}{7.4}$$

$$AB = \frac{7.4}{\cos 41^{\circ}} \qquad BC = 7.4 \times \tan 41^{\circ}$$

$$BC \approx 7.4 \times 0.8693$$

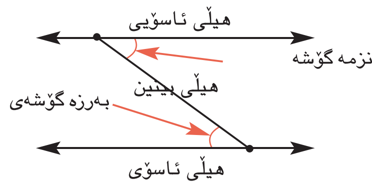
$$AB \approx \frac{7.4}{0.7547} \approx 9.8 \qquad BC \approx 6.4$$

**هەوڵبدە** دریژی لاکانی سێگۆشەی بەرامبەر بدۆزەرەوە




**بەرزە گۆشە Angle of Elevation** ئەو گۆشەیە کە دەکەوێتە نێوان هێڵی ئاسۆیی لەگەڵ هێڵی بینینی خاڵێکی بەرزتر لە خۆی.

**نزمە گۆشە Angle of Depression** ئەو گۆشەیە کە دەکەوێتە نێوان هێڵی ئاسۆیی لەگەڵ هێڵی بینینی خاڵێکی نزمتر لە خۆی.




## نموونە 3

بەگەڕانەوە بۆ پرسیاری باسکراو لە سەرەتایی وانەکە.بەرزی شوێنی باڵندەکان لە سەر ڕووی ئاوەکە بدۆزەرەوە.

**جێبەجێکردنەکان**

باڵندەکان

**شیکار**

$\overline{BE}$ بەرزی شوێنی باڵندەکانە لەڕووی ئاوەکەوە.

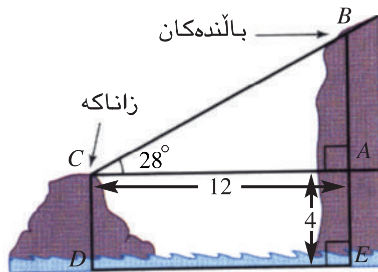
لەبەرئەوەی $BE = BA + AE$

وە لەبەر ئەوەی $AE = CD = 4\text{m}$ ، کەواتە $\tan 28^{\circ} = \frac{AB}{12}$

$$AB = 12 \times \tan 28^{\circ}$$

$$AB \approx 6.38^{\circ}$$

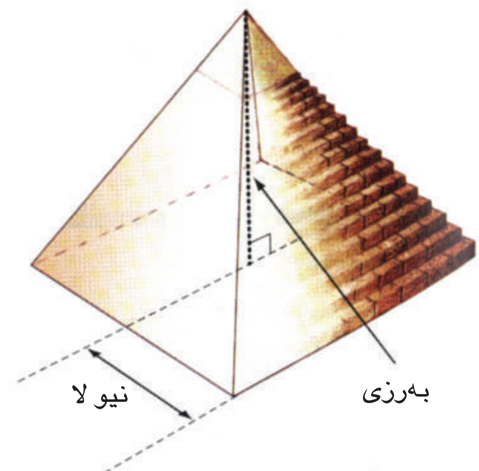
$$BE = BA + AE = 6.38 + 4 = 10.38\text{m}$$




**دەروازەیەك لەسەر ڕۆشنبیری فیرعەونییەکان** فیرعەونییەکان پەیوەندیەکی سێگۆشەیەیان بەکارهێناوە ناویان ناوە سیکد کە لاری ڕووی هەرەمەکە دەگەیەنێت.

$$\text{سیکد Cotangent} = \frac{\text{دوو ئەوەندەی پێوانی لای بنکەی هەرەم}}{\text{7 ئەوەندەی بەرزی هەرەمەکە}}$$

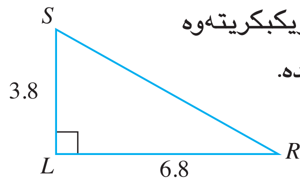
تێبینی ئەوە بکە کە سیکد هەڵگەڕاوەی سایەی (هەڵگەڕاوەی tan ) گۆشەکەیە کە پێی دەوترێت سایەتەواوی گۆشەکە Cotangent یان cot گۆشەکە بەکورتکراوەیی.






ئەگەر بمانەوێت سێگۆشەیەکی وەستاو شیکاربکەین پێویستە پێوانەی گۆشەکانی سێگۆشەکە بدۆزینەوە لەگەڵ درێژی لا نەزانراوەکانی سێگۆشەکە. لە کارەکەتدا بژمێری زانستی بەکاربهێنە، بۆ دۆزینەوەی پێوانەی ئەو گۆشەی کەیەکێك لە ڕێژە سێگۆشەیەکانی دەزانیت. ئەو ڕاستییە بەکاربهێنە کە: کۆی گۆشەکانی ناوەوەی سێگۆشەکە دەکاتە $180^\circ$ واتە کۆی هەردوو گۆشە تیژەکە لە سێگۆشە وەستاوەکە $90^\circ$.

## نموونە 4




سێگۆشەی بەرامبەر شیکاربکە بە دۆزینەوەی پێوانەی گۆشەکانی کە نزیکبکریتەوە لە نزیکترین پلە و درێژی ژێیەکەی نزیکبکەیتەوە بۆ نزیکترین بەش لە دە.

ئەگەر زانیت $\tan 28 = 0.55$

**شیکار**

1. $\tan R = \frac{3.8}{6.8}$

$R = \tan^{-1}\frac{3.8}{6.8} \approx 29^\circ$

2. لەبەرئەوەی کۆی پێوانەی دوو گۆشە تیژەکە $90^\circ$ ئەوا $90^\circ - 29^\circ = 61^\circ$

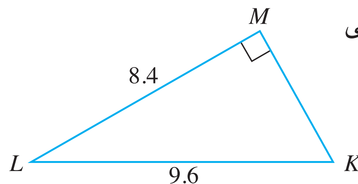
3. بیردۆزی فیثاگۆرس بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی درێژی ژێیەکە.

$(RS)^2 = (6.8)^2 + (3.8)^2$

$RS = \sqrt{(6.8)^2 + (3.8)^2}$

$RS \approx 7.8$

**هەوڵبدە**



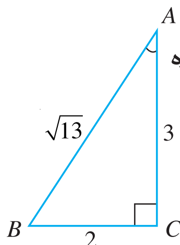

سێگۆشەی بەرامبەر شیکاربکە بە دۆزینەوەی پێوانەی گۆشەکانی بە نزیککردنەوەی بۆ نزیکترین پلە و درێژی لایەکەی بۆ نزیکترین بەش لە دە.

**بیرکردنەوەی ڕەخنەگرانە**

1. چۆن سێگۆشەکە شیکاردەکەیت لە نموونەی 4 بە دەستپێکردن بە دۆزینەوەی ژێیەکەی، لە دواتدا بەبەکارهێنانی cos یان sin بۆ دۆزینەوەی پێوانەی گۆشەکان؟
2. لە دوای دۆزینەوەی پێوانەی $R^\circ$ ئایا دەتوانی درێژی ژێیەکە بدۆزیتەوە بەبێ بەکارهێنانی بیردۆزی فیثاگۆرس؟

# ڕاهێنـــــــــان

## بەردەوامبوون لە بیرکاریدا

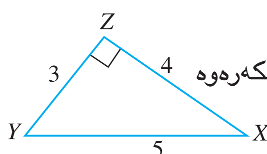


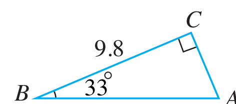

1 چۆن ڕێژە سێگۆشەییەکان بۆ گۆشەی $A$ لە سێگۆشەی بەرامبەر دەدۆزێتەوە

2 چۆن پێوانەی دووگۆشەی $A$ و $B$ لە سێگۆشەی بەرامبەر دیاریدەکەیت.

3 جیاوازی نێوان $\sin^{-1} A$ و $\frac{1}{\sin A}$ چییە؟

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو



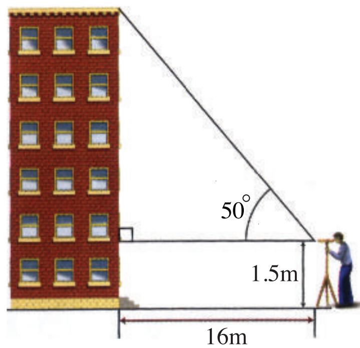

4 ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی $X$ لە سێگۆشەی لای چەپ بدۆزەرەوە، وەڵامەکەت بە تەواوی بدەرەوە، بۆ نزیکترین بەش لە دەهەزار نزیکیبکەرەوە

5 درێژی هەردوو لای $AC$ و $BA$ لە سێگۆشەی لای ڕاست بدۆزەرەوە.

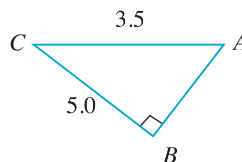
## جێبەجێکردنەکان



**6** **ئەندازە** ئەندازیاریك لە دووری m16 لە تەلاریکەوە. وەستاوە سەیری بەرزترین خاڵی تەلارەکەی دەکرد بە دووربینێك لەبەرزی 1.5 m لەزەویەوە دانرابوو بەرزی تەلارەکە چەند ئەگەر پێوانەی بەرزە گۆشەکە 50° بێت؟

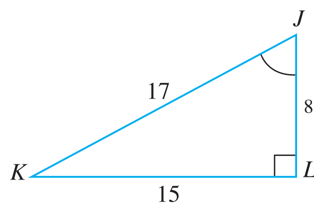



**7** ئەم سێگۆشەیەی خوارەوە شیکاربکە. پێوانەی گۆشەکان بدۆزەرەوە بە نزیکی بۆ نزیکترین پلە و دریژی لای AB بەنزیکی بۆ نزیکترین دە.




## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

سێگۆشەی $JKL$ بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای داواکراو. با وەڵامەکان تەواوبن.لە دوایدا بۆ نزیکترین بەش لە دەهەزار نزیکبکەوە.

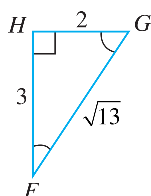



**8** $\sin \hat{K}$ **9** $\sin \hat{J}$

**10** $\cos \hat{J}$ **11** $\cos \hat{K}$

**12** $\tan \hat{K}$ **13** $\tan \hat{J}$

سێگۆشەی $FGH$ بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بەهای داواکراو. با وەڵامەکان تەواوبن.لە دوایدا بۆ نزیکترین بەش لە دەهەزار نزیکبکەوە.



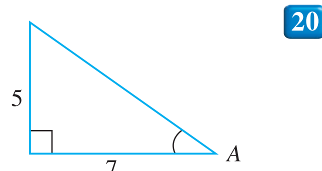

**14** $\sin \hat{G}$ **15** $\sin \hat{F}$

**16** $\cos \hat{G}$ **17** $\cos \hat{F}$

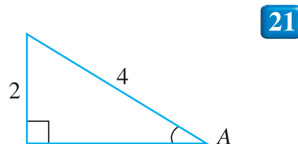
**18** $\tan \hat{G}$ **19** $\tan \hat{F}$

پێوانەی گۆشەی $A$ بەبەکارهێنانی بژمێر (ئەگەر هەبێت) بدۆزەرەوە.

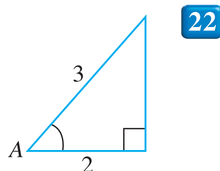
**20**



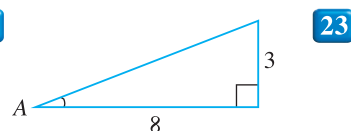

**21**



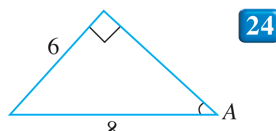

**22**



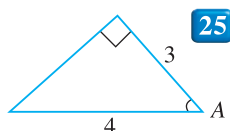

**23**




**24**

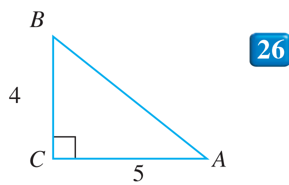



**25**

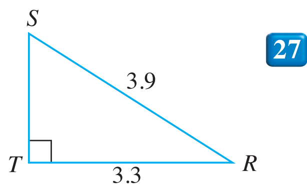


ئەم سێگۆشانە شیکار بکە. پێوانەی گۆشەکە بدۆزەرەوە بە نزیکی بۆ نزیکترین پلە و درێژی لایەکی بۆ نزیکترین بەش لە دەهەزار نزیکبکەوە.

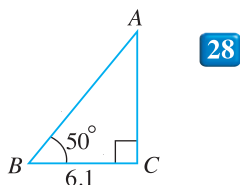
**26**



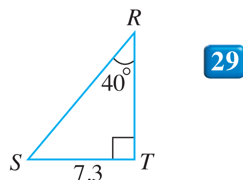

**27**



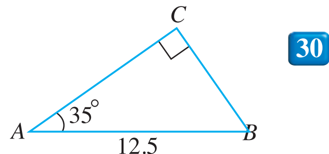

**28**



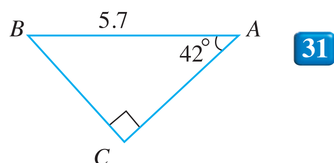

**29**



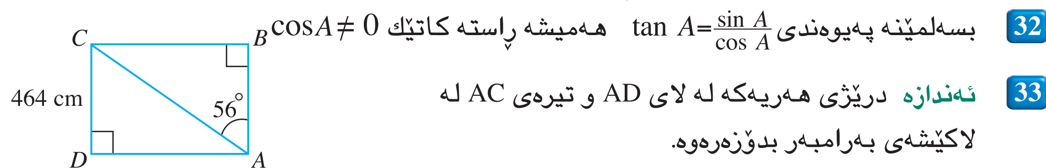

**30**




**31**




**32** بسەلمێنە پەیوەندی $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ هەمیشە ڕاستە کاتێك $\cos A \neq 0$




**33** **ئەندازە** درێژی هەریەکە لە لای AD و تیرەی AC لە لاکێشەی بەرامبەر بدۆزەرەوە.

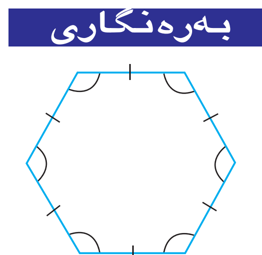
**جێبەجێکردنەکان**

**34** **جوانکاری ماڵەکان** باوکی گوڵ بەهار ویستی ( بالەکۆنێك) دروستبکات کە شێوەی سێگۆشە وەستاوی هەبێت ویستی ژێی سێگۆشەکە 6m بێت و دوو لای گۆشە وەستاوەکە لە درێژیدا یەکسان بن.

أ درێژی هەریەکە لە دوو لای گۆشە وەستاوەکە بدۆزەرەوە.

ب ڕووبەری بالەکۆنەکە بدۆزەرەوە.

**بەرەنگاری**



**35** **بینا** بەڕێوەبەری باخچەی گشتی ویستی هۆڵێك بۆ پشوودان دروست بکات بنکەکەی بە شێوەی شەشلایەکی ڕێك بێت و درێژی لایەکی 10 m بێت، ئەگەر تێچوونی دارشتنی بنکەکە 170 هەزار دینار بێت بۆ هەرمەتره چوارگۆشەیەك. ڕێژە سێگۆشەیەکان بەکاربهێنە بۆ دۆزینەوەی بری تێچوونی دارشتنی بنکەکە.



## ڕوانینێك بۆ دواوە

پلەی هەریەك لەم زۆر ڕادەدارانە دیاریبکە.

**36** $3x^2 - 5x^8 + 4x^3 + 2$

**37** $(x^2 - 9)(x^3 + 4)$

شیتەڵ بکە

**38** $2x^3 - 18x$

**39** $3x^3 - 7x^2 + 2x$

هەریەك لەم برانەی خوارەوە بە سادەترین شێوە بنووسە، دوای ڕێژەکردنی ژێرە.

**40** $\frac{3}{\sqrt{2}}$

**41** $\frac{1}{\sqrt{3}}$

**42** $\frac{5}{1-\sqrt{2}}$

**43** $\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

ناوەندە ژمێرەیی هەریەکە لەم بەهایانەی خوارەوە بدۆزەرەوە لە دوایدا لادانی پێوانەکەیان بدۆزەرەوە

**44** 110; 119; 125; 130; 78; 100; 113; 121; 103; 99; 122; 107; 102

**45** 22; 26; 28; 17; 19; 24; 36; 25; 14; 17; 46; 53; 25; 18; 34; 12

## ڕوانینێك بۆ پێشەوە

**46** ئەندازە ئەگەر خاڵێك بخولێتەوە بە دەوری چەقی خولانەوە $360^\circ$، ئەوا ڕێڕەوەکەی بازنەیەکی تەواو دەبێت. ئەو گۆشە خولانەوە بدۆزەرەوە کەوا لە ڕێڕەوی خاڵەکە دەکات ببێتە نیوە بازنەیەك؟ چارەکە بازنەیەك؟

# وانەی 2

# گۆشەكانی خولانەوە Angles of Rotation



**بۆچی؟**
دەتوانیت گۆشەكانی خولانەوە بەكاربهێنیت بۆ باسكردنی تێكڕای خولانەوەی بزوێنەری فڕۆكەیەكی پەروانەدار.

**ئامانجەكان**

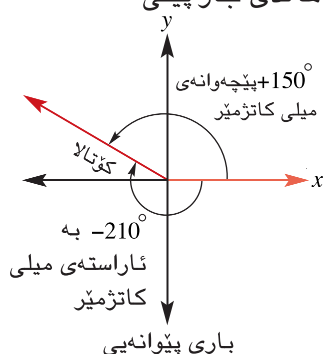
- گۆشەی گەڕانەوە بۆ گۆشەیەك دیاریدەكات.
- ڕێژە سێگۆشەییەكانی گۆشەیەك لە باری پێوانەییدا دیاریدەكات.

**جێبەجێكردنەكان**

فڕۆكەوانی

پەروانەی یەكێك لە فڕۆكەكان 1100 خول دەخولێتەوە لە خولەكێكدا، ئەو خاڵەی لەسەر پەروانەی فڕۆكەكەیە چەند پلە دەخولێتەوە لە چركەیەكدا؟

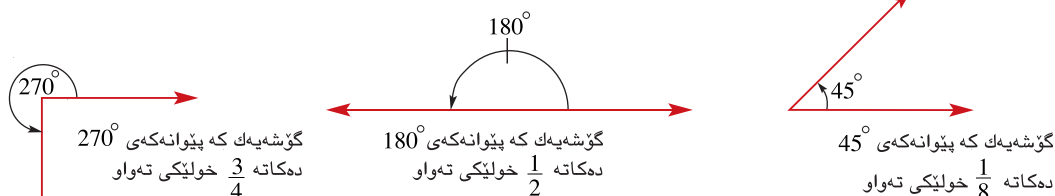
ئەگەر پێناسەی گۆشە لە ئەندازەدا بریتی بێت لەو شێوەی كە دروست دەبێت لە ئەنجامی بەیەكگەیشتنی دوو تیشك هاوبەشبن لە خاڵی بنەڕەتدا. ئەوا پێناسەكەی لە سێگۆشەزانیدا بریتییە لە **خولانەوەی تیشكێك** بەدەوری خاڵی بنەڕەتدا لە شوێنێكەوە بۆ شوێنێكی تر. هەر شوێنێكی تیشكەكە كە دەخولێتەوە لەگەڵ شوینی دەستپێكردنی گۆشەكە، گۆشەیەك دیاریدەكات پێی دەوترێت گۆشەی خولانەوە. **Angle of Rotation** بیركاریزانەكان هەندێ جار پیتی یۆنانی $\theta$« ثیتا » بەكاردەهێنین بۆ ناولێنانی گۆشەی خولانەوە.




جێگای دەستپێكردنی تیشكەكە پێی دەوترێت **لای یەكەمی** گۆشەو **Initial side** شوێنی وەستانەكەی پێی دەوترێت **كۆتالا Terminal side** . گۆشەكە لە باری پێوانەییدا دەبێت كاتێك سەرەكەی لە خاڵی بنەڕەتدا دەبێت لە ڕووتەختی پۆتاندا و لای یەكەمی دەكەوێتە سەر نیوەی موجەب لە تەوەرەی سینی.

ئەگەر خولانەوەكە بە ئاڕاستەی پێچەوانەی جولانەوەی میلی كاتژمێر ڕویدا ئەوا پێوانەی گۆشەكە **موجەب Positive** دەبێت. وپێوانەی گۆشەكە **سالب Negative** دەبێت ئەگەر خولانەوەكە بە ئاڕاستەی جولانەوەی میلی كاتژمێر بێت.

(پلە) دادەنرێت بەگرنگترین پێوانەی گۆشە و ئاماژەی بۆ دەكرێت بەهێمای(°). و لەبەر ئەوەی ئەو گۆشەیەی دەستمان دەكەوێت لە خولێكی تەواوی تیشكەكە دەكاتە$360^\circ$ ئەوا پلە پێناسە دەكرێت بەوەی پێوانەی گۆشەی پەیدابوو لە خولانەوەی تیشكەكە لە$\frac{1}{360}$ لە خولێكی تەواو.



## خاڵی چاودێری ✔

ئاڕاستەی خولانەوەیەك كە گۆشەكەی $90^o$- و $120^o$ چییە؟ ئەو بەشەی كە هەریەكە لەم دوو خولانەوەیە لە خولێكی تەواو پێكیدێنێت چەندە؟

## نموونە 1



**بەگەڕانەوە بۆ پرسیارەكەی سەرەتای وانەكە.**
**خاڵێك لەسەر پەروانەی ئەو فڕۆكەیە لە چركەیەكدا چەند پلە دەخولێتەوە.**

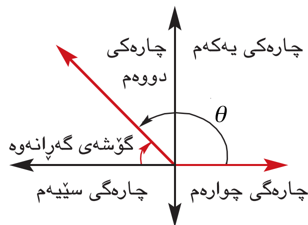
**شیكار**

پەروانەكە 1100 خول لە خولەكێكدا دەسوڕێتەوە، لەبەر ئەوە خاڵەكە لەسەر پەروانەی فڕۆكەكە $1100\times360^o = 397000^o$ دەخولێتەوە لە خولەكێكدا. و بەم شێوەیە خولانەوەی خاڵەكە لەسەر پەروانەی فڕۆكەكە لەیەك چركەدا $\frac{396000^\circ}{60} = 6600^\circ$

**هەوڵبدە** پەیكەكانی مۆسیقا 33.3 خول لە خولەكێكدا دەخولێنەوە. خاڵێك لەسەر پەیكەكە لە یەك چركەدا چەند پلە دەخولێتەوە؟

لەوانەی سێیەمدا فێردەبێت چۆن هەژمێری ڕێژە سێگۆشەییەكانی گۆشەیەك لەباری پێوانەیی بكەیت. كاتێك پێوانەكەی لە $90^\circ$ زیاتر دەبێت ( یان كەمتر دەبێت لە سفر ) بۆ ئەوەی بتوانیت ئەمە بكەیت لە مەودوا پێویستت بە دیاریكردنی پێوانەی گۆشەی گەڕانەوە دەبێت بۆ گۆشەكە لەباری پێوانەییدا.

ئەگەر $\theta$ گۆشەیەك بێت لە باری پێوانەییدا ئەوا (گۆشەی گەڕانەوەی) ئەو گۆشە تیژە موجەبەیە كە پێكدێت لە كۆتالا گۆشەكە و بەشێك لە تەوەرەی سینی ( موجەب یان سالب) كە نزیكترە لێیەوە. ئەگەر بزانی كە بەشی موجەب لە تەوەرەی سینی لە هەردوو چارێگی یەكەم و چوارەم دایە. و بەشی سالب لە دوو چارێگی دووەم و سێیەم دایە.




## نموونە 2

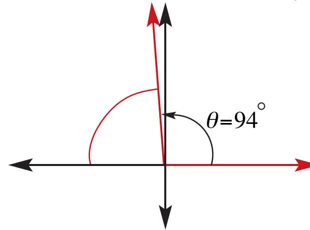
**گۆشەی گەڕانەوە بۆ هەریەك لەم گۆشانە چەندە!**

أ $\theta = 94^\circ$ ب $\theta = 245^\circ$

ج $\theta = 290^\circ$ د $\theta = -110^\circ$

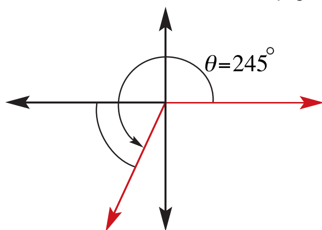
**شیكار**

أ كۆتالا گۆشەی $\theta = 94^\circ$ لە چارێگی دووەم دایە. بەشی سالیب لە تەوەرەی سینی بەكاربهێنە .



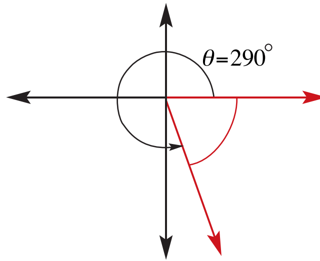

پێوانەی گۆشەی گەڕانەوە $=86^o$ $|180^o\text{-}94^o|$

ب كۆتالا گۆشەی $\theta = 245^\circ$ لە چارێگی دووەم دایە بەشی سالیب لە تەوەرەی سینی بەكاربهێنە.



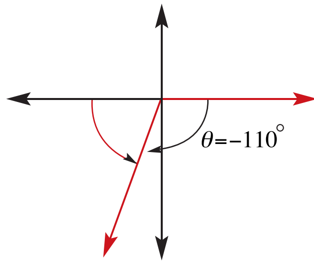

پێوانەی گۆشەی گەڕانەوە $=65^o$ $|180^o\text{-}245^o|$

ج كۆتالا گۆشەی $\theta=290^o$ دەكەوێتە چارێگی چوارەم. بەشی موجەب لە تەوەرەی سینی بەكاربهێنە .




پێوانەی گۆشەی گەڕانەوە $\left|360^\circ-290^\circ\right|=70^\circ$

د كۆتالا گۆشەی $\theta=-110^\circ$ دەكەوێتە چارێگی سێیەم بەشی سالیب لە تەوەرەی سینی بەكاربهێنە.




پێوانەی گۆشەی گەڕانەوە $\left|180^o\text{-}110^o\right|=70^o$

**هەوڵبدە** گۆشەی گەڕانەوە چەندە بۆ گۆشەی $\theta=315^\circ$، و گۆشەی $\theta=-235^\circ$ لەباری پێوانەییدا؟

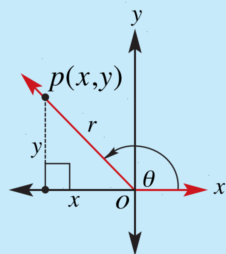
**بیركردنەوەی ڕەخنەگرانە** ژمارەی ئەو گۆشانەی دەكەونە نێوان $0^\circ$ و $360^\circ$ چەندە كە لە هەمان گۆشەیی گەڕانەوەدا بەشداری دەكەن.
ئەگەر واتدانا كە $x$ و $y$ پۆتانی خاڵێكن لەسەر كۆتالا گۆشەیەك لەباری پێوانەیی. ئەوا لە توانات دەبێت نیشانەی هەر ڕێژەیەكی سێگۆشەیی كە دەگەڕێتەوە بۆ گۆشەیەك دیاریبكەیت.

**ڕێژە سێگۆشەییەكانی گۆشە $\theta$**

ئەگەر $p(x, y)$ خاڵێك بێت لە سەر كۆتالا گۆشەی $\theta$ لە باری پێوانەییدا.
ئەوا دووری نێوان $P$ و خاڵی بنەڕەت لەڕووتەختی پۆتاندا دەكاتە:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r} \qquad \cos\theta=\frac{x}{r} \qquad \tan\theta=\frac{y}{x} \qquad x\neq 0$$




**نموونە** 3 خاڵی $P(-2, -3)$ دەكەوێتە سەر كۆتالا گۆشەی $\theta$ لەباری پێوانەیی. هەژمێری ڕێژە سێگۆشەییەكانی بكە

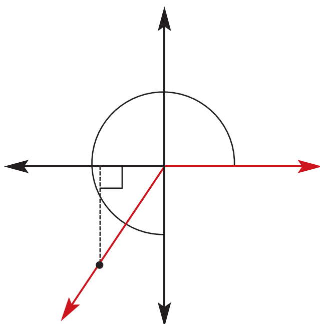
**شیكار**

وێنەیەكی بۆ بكێشە $x=-2 \quad y=-3$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-3}{\sqrt{13}} \qquad \cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-2}{\sqrt{13}}$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$$



**هەوڵبدە** خاڵی $P(3, -5)$ دەكەوێتە سەر كۆتالا گۆشەی $\theta$ لە باری پێوانییدا، هەژمێری ڕێژەی سێگۆشەییەكانی بكە.

## چالاکی

## دۆزینەوەی نیشانەکانی ڕێژە سێگۆشەییەکان لە چارێگەکانی ڕووتەختی پۆتاندا
## Exploring the Sign of Trigonometric Ratios

1. خشتەی بەرامبەر دروستبکە و تەواوی بکە و نیشانەی هەر ڕێژەیەکی سێگۆشەیی بۆ گۆشەی $\theta$ دیاریبکە لە باری پێوانەییدا. بەپێی ئەو چارێگەی کۆتالا دەکەوێتە ناویەوە.

| ڕێژە سێگۆشەیی | چارێکی | | | |
|---|---|---|---|---|
| | یەکەم | دووەم | سێیەم | چوارەم |
| $\sin\theta$ | + | | | |
| $\cos\theta$ | | | | |
| $\tan\theta$ | | | | |

2. کۆتالا گۆشەی $\theta$ دەکەوێتە کام چارێگەوە، ئەگەر $\sin\theta=-\frac{2}{7}$ ؛ $\cos\theta=-\frac{2}{7}$ ؛ $\tan\theta=-\frac{1}{5}$ هەموو وەڵامەکانی کە لە تواناداین باسبکە.

3. ئایا $r$ (ژێ)کاردەکاتە سەر نیشانەی هەریەك لەڕێژە سێگۆشەییەکان؟هۆی وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.

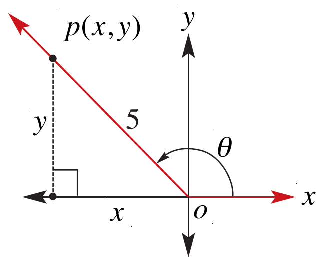
خاڵی چاودێری ✓

4. کام لە دوو گۆڕاوی $x$ یان $y$ نیشانەی $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ ، $\tan\theta$ دیاریدەکەن؟

ئەگەر زانیت کۆتالا گۆشەی $\theta$ لە باری پێوانەییدا دەکەوێتە کام چارێگەوە و بەهای ڕێژەیەك لە سێ ڕێژە سێگۆشەکانت زانی. دەتوانیت هەژمێرەی دوو ڕیژەکەی تر بکەیت.

## نموونە 4

**هەژماربکە ئەگەر بزانی گۆشەی$\theta$ لە باری پێوانەییدا $\sin\theta$ ، $\tan\theta$ و کۆتالاکەی دەکەوێتە چارەگی دووەم $\cos\theta=-\frac{3}{5}$ .**




**شیکار**

وێنەکە بکێشە و هەژمێری پۆتانی خاڵی $P$ بکە لەبەرئەوەی $\cos\theta=-\frac{3}{5}<0$ ئەوا $x$ سالبە کەواتە $x=-3$ وە $r=5$.

بۆ هەژمێرکردنی $y$ بیردۆزی فیثاگۆرس بەکاربهێنە.

$$5^2=(-3)^2+y^2$$
$$y^2=25-9=16$$
$$y=\pm\sqrt{16}=\pm4$$

$y=4$ $y>0$ $P(x,y)$ دەکەوێتە چارەگی دووەم

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{4}{5}$ $\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{4}{-3}=-\frac{4}{3}$

**هەوڵبدە** $\cos\theta$ و $\tan\theta$ هەژمێربکە ئەگەر بزانی گۆشەی$\theta$ لەباری پێوانەییدایە وکۆتالاکەی دەکەوێتە چارەگی سێیەم و $\sin\theta=-\frac{4}{5}$ .

ئەگەر کۆتالاکەی گۆشەی $\theta$ لەباری پێوانەییدا لەگەڵ تەوەری صادی $(x=0)$ جووت بێت ئەوا $\tan\theta$ پێناسە نەکراوە.

خاڵی چاودێری ✓ هەژمێرەی ڕێژە سێگۆشییەکانیٛ گۆشەی$\theta=90^\circ$ بکە.

## ڕاهێنـــــان

### بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1 جیاوازی چییە لەنێوان گۆشەکانی سێگۆشەی وەستاو و گۆشەکانی خولانەوە؟

## جێبەجێکردن

**2** ئەو جیاوازییانەی هەیە لە نێوان ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەیەك و ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی گەڕانەوەکەی چییە؟ هۆیەکانی ئەم جیاوازییانە چییە؟

**3** ئایا پێویستیت بە زانینی پێوانەی گۆشەیەك هەیە بۆ ئەوەی هەژمێری ڕێژە سێگۆشەییەکانی بکەیت؟ هۆی وەڵامەکەت ڕوونبکەوە.



## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

**4** **فڕۆکەوانی** پەروانە گەورەکەی فڕۆکەی هەلیکۆپتەرێك 430 خول لە خولێکدا دەخولێتەوە. خاڵێك لەسەر پەروانەی ئەو فڕۆکەیە لە چرکەیەکدا چەند پلە دەخولێتەوە.

**5** گۆشەی گەڕانەوە بۆ هەریەك لەم گۆشانە $93^{\circ}$ ، $280^{\circ}$ ، $-36^{\circ}$ دیاربکە.

**6** خاڵی $P(3, -2)$ دەکەوێتە سەر کۆتالای گۆشەی $\theta$ لەباری پێوانەییدا. هەژمێری ڕێژە سێگۆشەییەکانی ئەو گۆشەیە بکە.

**7** هەژمێری $\cos\theta$ و $\tan\theta$ بکە ئەگەر بزانی گۆشەی $\theta$ لەباری پێوانەییدا. و کۆتالاکەی دەکەوێتە چارێگی سێیەم و $\sin\theta = -\frac{12}{13}$

## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

**هەر گۆشەیەك لەباری پێوانەیی بکێشە.**

**8** $115^{\circ}$ **9** $280^{\circ}$ **10** $-300^{\circ}$ **11** $-130^{\circ}$

**گۆشەی گەڕانەوە بۆ هەریەك لەم گۆشانە دیاریبکە.**

**12** $35^{\circ}$ **13** $23^{\circ}$ **14** $112^{\circ}$ **15** $160^{\circ}$

**16** $612^{\circ}$ **17** $478^{\circ}$ **18** $-135^{\circ}$ **19** $-315^{\circ}$

**20** $90^{\circ}$ **21** $-180^{\circ}$ **22** $-450^{\circ}$ **23** $-485^{\circ}$

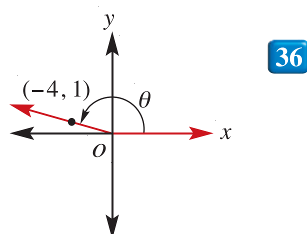
**24** $540^{\circ}$ **25** $270^{\circ}$ **26** $225^{\circ}$ **27** $195^{\circ}$

**28** $410^{\circ}$ **29** $560^{\circ}$ **30** $-120^{\circ}$ **31** $-280^{\circ}$

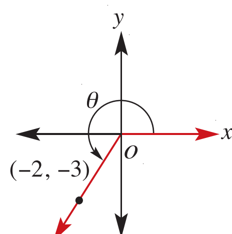
**32** $-175^{\circ}$ **33** $-295^{\circ}$ **34** $-395^{\circ}$ **35** $-540^{\circ}$

**هەژمێری ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی $\theta$ بکە.**

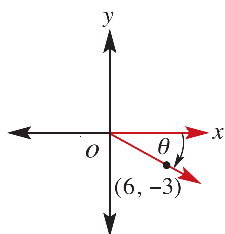
**36**




**37**




**38**




**ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی $\theta$ هەژمار بکە لە باری پێوانەییدا ئەگەر زانیت ئەم خاڵە دراوانە دەکەونە سەر کۆتالاکانی.**

**39** $(3, 4)$ **40** $(5, 2)$ **41** $(-4, 2)$ **42** $(-4, 6)$

**43** $(\sqrt{3}, -3)$ **44** $(2\sqrt{5}, -1)$ **45** $(-4, -3)$ **46** $(-1, -8)$

ئەگەر ڕێژەی سێگۆشەیی ئەو چارێگەی کۆتالاکەی گۆشەکە بزانیت لەباری پێوانەییدا ئەوا بەهای هەر ڕێژەیەکی سێگۆشەیی داواکراو هەژماربکە.

47 چارێگی یەکەم؛ $\cos\theta = 0.25$ ؛ $\tan\theta$

48 چارێگی سێیەم؛ $\cos\theta = -0.50$ ؛ $\tan\theta$

49 چارێگی چوارەم؛ $\tan\theta = -1$ ؛ $\sin\theta$

50 چارێگی یەکەم؛ $\tan\theta = 2$ ؛ $\sin\theta$

51 چارێگی سێیەم؛ $\sin\theta = -0.50$ ؛ $\cos\theta$

52 چارێگی دووەم؛ $\sin\theta = 0.40$ ؛ $\cos\theta$

ژمارەی خولە تەواوەکان یان ئەو بەشانەی کە گۆشەکە دەیاننوێنێت دیاریبکە.ئاراستەی خولانەوە دیاریبکە لەگەڵ میلی کاتژمێر یان بە پێچەوانەوە.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 53 | $45^\circ$ | 54 | $90^\circ$ | 55 | $-180^\circ$ | 56 | $-270$ |
| 57 | $450^\circ$ | 58 | $720^\circ$ | 59 | $-420^\circ$ | 60 | $-640$ |

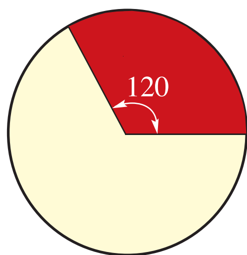
بەرەنگاری

61 هەژمێری $\cos\theta$ بکە ئەگەر بزانی $\sin\theta = 0.375$ $\tan\theta < 0$

62 هەژمێری $\tan\theta$ بکە ئەگەر بزانی $\cos\theta = 0.809$ $\sin\theta < 0$

بەستنەوە

63 **ئەگەر** ئەگەری ئەوەی ئازاد تیرەکەی بچەقێتە بەشە سورەکەوە چەندە؟




جێبەجێکردن

64 **ئەندازە** پەروانەی یەکێك لە فڕۆکەکان 900خول لە خولەکێکدا دەخولێتەوە. خاڵێك لەسەر ئەم پەروانەیە لە چرکەیەکدا چەند پلە دەخولێتەوە؟

65 **دەریاوانی** کاپتنەکانی پاپۆڕەکان و فڕۆکەکان یەکەیەکی درێژی بەکاردەهێنن کە پێی دەڵێن (میلی دەریایی) بۆ پێوانەی دوورییەکە. میلی دەریایی بەنزیکەیی یەکسانە بە درێژی کەوانەیەك لەسەر گۆی زەوی کە دیاریکرابێت بە چەقە گۆشەیەك کە پێوانەکەی یەك خولەك بێت( هەر60 خولەك یەکسانە بە یەك پلە) تیرەی زەوی لەهێڵی کەمەربەند 12756 km کم بەنزیکەیی.

أ چێوەی زەوی هەژمێربکە لە هێڵی کەمەربەند.

ب چەند خولەك یەکسانە بە چێوەی زەوی؟

ج چەند کیلۆمەتر یەکسانە بە میلی دەریایی؟

## ڕوانین بۆ دواوە

66 $x^2 - 8 = 188$ شیکاربکە.

67 چەند ڕێگا هەیە بۆ هەڵبژاردنی 4 کەس لە 10 کەس؟

## ڕوانین بۆ پێشەوە

ڕێژە سێگۆشەییەکانی گۆشەی $\theta$ لە باری پێوانەییدا هەژمار بکە. ئەگەر بزانی ئەم خاڵە دراوانە دەکەونە سەر لای کۆتایی گۆشەکە.

68 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

69 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

70 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

# وانەی 3

# پێوانەی بازنەیی Radian Measure



**ئامانجەکان**

- پێوانەی شەستی دەگۆڕێ بۆ پێوانەی بازنەیی و بە پێچەوانەشەوە
- درێژی کەوانەیەك لەسەر بازنە هەژماردەکات.

**بۆچی؟**

پێوانەی بازنەیی بەکاردێنێت بۆ باسکردنی رووداوە خولییەکان وەك شەپۆلەکانی بۆمەلەرزە و گۆڕانکارییەکانی کەش وەهوا وجولانەوەی بازنەیی تەنەکان وەك مانگە دەستکردەکان

**جێبەجێکردنەکان**

کەشناسی

**بازنەی یەکە**

ئەو مانگە دەستکردەی کە کەش وەهوا دەستنیشاندەکات لەبەرزی 750 35 کلم بەنزیکەیی لە گۆی زەوییە دەسوڕێتەوە. ئایا **خێرایی هێڵی Linear Speed** مانگەکە چەندە؟ ئەگەر هەر 24 کاتژمێر جارێك بەدەوری زەویدا بسوڕێتەوە **گۆشەخێراییەکەی** چەندە؟

لەپۆلەکانی پێشوودا فێربوویت کە گۆشەکان بە پلە بپێویت بەڵام لەم وانەیەدا پێوانەیەکی نوێ فێربوویت بۆ پێوانی گۆشە پێی دەوترێت **پێوانەی بازنەیی کە یەکەی پێوانەکەی بریتییە لە رادیان**. بەڵام سیستمی پێوانە بە پلە پێی دەوترێت **پێوانەی شەستی**.

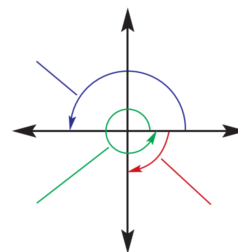
## چالاکی

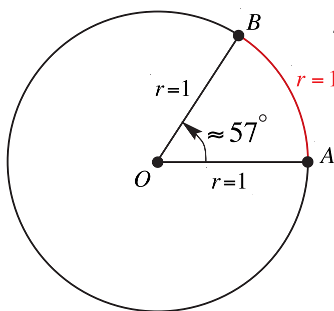
### دۆزینەوەی رێژەی بازنەیی Exploring Radian Ratio

پێویستیت بە شریتێکی سەنتیمەتری و چەند قووتوویەکی لوولەکی هەیە.

1. تیرەی بنکەی ژمارەیەك لەو قووتوانە کە پێوانەکانیان جیاوازە بپێوە و چێوەی هەر یەکێکیان بپێوە. ئەم ئەنجامانەی دەستتکەوتوە لە خشتەیەك دابنێ.
2. هەژمێری رێژەی چێوە بۆ تیرەی بنکەی هەر قووتویەك بکە و ئەوانە لە خشتەکەدا بنووسە.
3. بەهاکانی هەموو ئەو رێژانە نزیکدەبنەوە لە بەهایەك کە ژمارەیەکی بەناوبانگە و دەیزانین. ئەو ژمارەیە چییە؟

خاڵی چاودێری ✔






چێوەی بازنە $= 2\pi r$ ،لەبەر ئەوەی نێوەتیرەی بازنەی یەکە یەك یەکەیە ئەوا چێوەی بازنەکە $= 2\pi$.

ڕادیان( گۆشەی نیوەتیرەیی ) بەوە پێناسە دەکرێت کە پێوانەی چەقە گۆشەیەکە لە بازنەیەك نیوەتیرەکەی $r$ و کەوانەیەك درێژییەکەی $r$ دیاریدەکات ئەگەر بازنەی یەکەت بەکارهێنا. ئەوا گۆشەی نیوەتیرەیی پێوانەی چەقە گۆشەیەك لەبازنەیەکی یەکەییدا کەوانەیەك دیاریدەکات کە درێژیەکەی $1$ بێت.لەم پێناسەیەوە ئەوەمان دەستدەکەوێت کە پێوانەی بازنەیی بۆ گۆشەیەکی وەستاوە دەکاتە چارێکی چێوەی بازنەی یەکە. کەواتە $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ گۆشە نیوەتیرەییە، و پێوانەی گۆشەیەکی خول تەواو دەکاتە $2\pi$ گۆشە نیوەتیرەیی بەواتایەکی تر:

یەك گۆشەی نیوەتیرەی $\frac{1}{2\pi} \times 360^{\circ} \approx 57^{\circ}$

| گۆڕینی پێوانە گۆشەیەك | |
|---|---|
| لەپلەك بۆ گۆشەی نیوەتیرەیی | لە گۆشەی نیوەتیرەیی بۆ پلەك |
| لە $\frac{\pi}{180}$ ی بدە | لە $\frac{180}{\pi}$ ی بدە |

## نموونە 1

ئەمانە بگۆڕە لە پلەوە بۆ گۆشەی نیوەتیرەیی یان لە گۆشەی نیوەتیرەیی بۆ پلە.

أ $40^{\circ}$ ب $3\pi$ گۆشەی نیوەتیرەی

**شیکار**

أ $40^{\circ} \times \frac{\pi}{180^{\circ}} = \frac{2\pi}{9}$

ب $3\pi \times \frac{180^{\circ}}{\pi} = 540^{\circ}$

**هەوڵبدە** $-120^{\circ}$ بگۆڕە بۆ گۆشەی نیوەتیرەیی و $-\frac{2}{3}\pi$ بگۆڕە بۆ پلەك.

**خاڵی چاودێری** ✓ گۆشەیەك پێوانەکەی $1^{\circ}$ . پێوانەکەی بەگۆشەی نیوەتیرەی چەندە؟

## نموونە 2

هەژمێری ئەم ڕێژە سێگۆشاییانە بکە.

أ $\sin\frac{\pi}{3}$ ب $\cos\frac{3\pi}{4}$ ج $\tan\frac{4\pi}{3}$

**شیکار**

دەستبکە بە گۆڕین لە گۆشەی نیوەتیرەییەوە بۆ پلەك پاشان هەژماری ڕێژە سێگۆشییەکان بکە.

أ $\frac{\pi}{3} \times \frac{180^{\circ}}{\pi} = 60^{\circ}$

$\sin\frac{\pi}{3} = \sin 60^{\circ}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

ب $\frac{3\pi}{4} \times \frac{180^{\circ}}{\pi} = 135^{\circ}$

$\cos\frac{3\pi}{4} = \cos 135^{\circ}$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ج $\frac{4\pi}{3} \times \frac{180^{\circ}}{\pi} = 240^{\circ}$

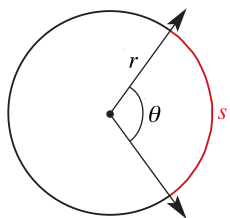
$\tan\frac{4\pi}{3} = \tan 240^{\circ}$

$= \sqrt{3}$

**هەوڵبدە** ئەمانە هەژمێربکە: $\tan\frac{5\pi}{4}$ ، $\cos\frac{2\pi}{3}$ ، $\sin\frac{3\pi}{2}$

**خاڵی چاودێری** ✓ گۆشە تایبەتییەکان ئەم گۆشانەن $0^{\circ}, 30^{\circ}, 45^{\circ}, 60^{\circ}, 90^{\circ}, 180^{\circ}, 270^{\circ}, 360^{\circ}$. بازنەیەکی یەکە بکێشە و گۆشە تایبەتییەکانی لەسەر بکێشە، پێوانەی هەریەکێکیان بنوسە بەگۆشەی نیوەتیرەیی.

## درێژی کەوانە Arc Length




شێوەی بەرامبەر بازنەیەك ڕووندەكاتەوە كە نیوەتیرەكەی $r$ و پێوانەی چەقە گۆشەكەی $\theta$ گۆشە نیوەتیرەییە. دەتوانیت هاوڕێژە بەكاربهێنیت بۆ دۆزینەوەی ڕێسایەك بۆ هەژمێاركردنی درێژی كەوانەكەی $s$. كە چەقە گۆشەكە دیاریدەكات:

پێوانەی $\theta$ بەگۆشەی نیوەتیرەی ← $s = r\theta$ → درێژی كەوانەكە

پێوانەی بازنەكە بەگۆشەی نیوەتیرەی $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{s}{2\pi r}$ چێوەی بازنە

**درێژی كەوانە Arc Length**

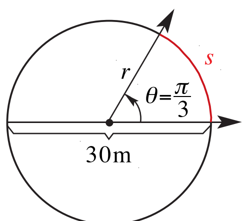
بۆ هەژمێركردنی درێژی كەوانەیەك $s$ كە چەقی گۆشەیەك دیاریكردووە پێوانەكەی $\theta$ گۆشەی نیوەتیرەیە لە بازنەیەك كە نیوەتیرەكەی $r$. ئەم ڕێسایە بەكاربهێنە. $s = r\theta$

**سەرەنجێكی ڕەخنەگرانە**

ئایا دەتوانیت ئەو پێناسەیەی بۆ گۆشەی نیوەتیرەیی (رادیان)ت كردوە لەوانەی یەكەم لێكبدیتەوە؟

**نموونە 3**

هەژمێری درێژی ئەو كەوانە بكە كە چەقە گۆشەیەك دیاریكردووە پێوانەكەی $\frac{\pi}{4}$ گۆشەی نیوەتیرەییە لە بازنەیەكدا كە تیرەكەی 30m بێت




**شیكار**

لەبەر ئەوەی تیرەی بازنەكە 30 m ئەوا.

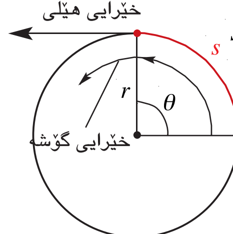
نیوەتیرەكەی یەكسانە بە 15 .

$s = r\theta = 15 \times \frac{\pi}{3} = 5\pi$

كەواتە درێژی كەوانەكە $5\pi$ m یان 15.7m بەنزیكیی.

**هەولبدە**

هەژماری درێژی ئەو كەوانەیە بكە كە ئەو چەقەگۆشەیە دیاریدەكات كە پێوانەكەی 0.6 گۆشەی نیوەتیرەییە لە بازنەیەك نیوە تیرەكەی 1.25m .




كاتێك تەنێك بە خێرایەكی نەگۆڕ لە ڕێڕەوێكی بازنەی كە نیوەتیرەكەی $r$ دەجولێت ئەوا خێرایی هێڵی **Linear Speed** بۆ ئەو تەنە دەكاتە ڕێژەی درێژی كەوانەیەك $s$ كە تەنەكە دەیبڕێت بۆ كات $t$ واتە $\frac{s}{t}$ یان $\frac{r\theta}{t}$ كاتێك $\theta$ گۆشەی خولانەوەی تەنەكە دەنوێنێت بە گۆشەی نیوەتیرەیی.

(گۆشە خێرایی) ( السرعه الزاویه) بۆ تەنێك بریتییە لە ڕێژەی پێوانە گۆشەی خولانەوەكەی $\theta$ بەگۆشەی نیوەتیرەیی بۆكات $t$ واتە $\frac{\theta}{t}$.

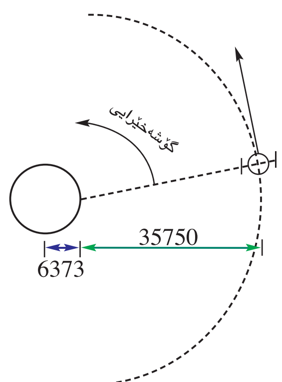


**نموونە** 4

بەگەڕانەوە بۆ پرسیاری باسکراو لە وانەی یەکەم. هەژمێری خێرایی هێڵی (السرعه الخطیه) وگۆشە خێرایی بۆ مانگێکی دەستکرد بکە ئەگەر بزانی نیوەتیرەکەی یەکسانە بە **6 373** کم بە نزیکەیی.

**شیکار**

دەستبکە بە دۆزینەوەی نیوەتیرەی مانگە دەستکردەکە.




نیوەتیرەی مانگی دەستکرد = نیوەتیرەی زەوی + بەرزی مانگەکە

= 6 373 + 35 750

= 42 123

خێرایی هێڵی بۆ مانگەکە کاتێك هەڵدەستێت بە خولێکی تەواو ($2\pi$ گۆشە نیوەتیرەیی) لە 24 کاتژمێر خێرایی هێڵی

$$\frac{r\theta}{t}=\frac{42123\times 2\pi}{24}\approx 11028$$

کەواتە خێرایی هێڵی مانگە دەستکردەکە هێڵیە 11 208km کم/کاتژمێر بەنزیکەیی.

ئێستا هەژماری گۆشەخێرایی بۆمانگە دەستکردە بکە بە بەکارهێنانی ڕێسای $\frac{\theta}{t}$ .

گۆشەخێرایی $\frac{\theta}{t}=\frac{2\pi}{24}=\frac{\pi}{12}$.

کەواتە گۆشەخێرایی مانگە دەستکردەکە $\frac{\pi}{12}$ گۆشەی نیوەتیرەییە لە کاتژمێرێکدا.

**کەش ناسی**

**هەوڵبدە** هەژمێری خێرایی هێڵی و گۆشە خێرایی بکە بۆ کەسێك لە سەر زەوی کە 6373 کلم دوورە لە چەقەکەوە.

# ڕاهێنـــــــــــــان

## بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1 پێوانەی بازنەیی بۆ گۆشە چییە؟ بەچی جیاوازە لە پێوانەی شەستیەکەی؟

2 چۆن گۆڕانکاری دەکەیت لە گۆشەی نیوەتیرەیی بۆ پلە و بە پێچەوانەشەوە؟

3 چۆن درێژی کەوانەیەك کە سنووردراوە بە چەقەگۆشە لە بازنەیەکدا دەگۆڕیت ئەگەر نیوەتیرەی بازنەکە چەندجارە بکرێت؟

4 خێرایی هێڵی و گۆشە خێرایی بۆ تەنێك کە لەسەر ڕێڕەوێکی بازنەیی بجولێت چییە؟ و جیاوازی چییە لەنێوانیاندا؟

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

ئەمانە بگۆڕە لە پلە بۆ گۆشەی نیوەتیرەیی یان بە پێچەوانەشەوە.

5 $120°$

6 $\frac{\pi}{4}$ گۆشەی نیوەتیرە

هەژمێری هەریەك لەم ڕێژە سێگۆشەییانە بکە.

7 $\sin\frac{2\pi}{3}$

8 $\cos\frac{5\pi}{4}$

9 $\tan\frac{5\pi}{3}$



**10** هەژمێری درێژی ئەو کەوانەیە بکە کە چەقە گۆشەیەك دیاریدەكات پێوانەکەی $\frac{4\pi}{3}$ لە بازنەیەکدا تیرەکەی 90cm بێت.

**11** **بۆخۆشی** تیرەی چێشتخانەیەکی خولاوە لە لوتکەی تاورێکدایە 60 مەترە و ئەم چێشتخانەیە سورێکی تەواو دەخولێنەوە بە 58 خولەك. خێرایی هێڵی و گۆشەخێرایی پیاوێك کە دانیشتووە لە نزیك پەنجەرەیەك لە پەنجەرەکانی چێشتخانەکە بدۆزەوە.

## ڕاهێنان و جێبەجێکردن

ئەمانە بگۆڕە لە پێوانەی شەستی بۆ پێوانەی بازنەیی.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **12** | $180^\circ$ | **13** | $90^\circ$ | **14** | $360^\circ$ | **15** | $270^\circ$ |
| **16** | $-30^\circ$ | **17** | $-120^\circ$ | **18** | $-240^\circ$ | **19** | $-240^\circ$ |
| **20** | $720^\circ$ | **21** | $930^\circ$ | **22** | $80^\circ$ | **23** | $160^\circ$ |

ئەمانە بگۆڕە لە گۆشەی نیوەتیرەیی بۆ پلە. وەڵامەکەت نزیکبکەوە بۆ نزیکترین بەش لە سەد لە پلە.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **24** | $2\pi$ | **25** | $\pi$ | **26** | $\frac{\pi}{2}$ | **27** | $\frac{\pi}{4}$ |
| **28** | $\frac{\pi}{3}$ | **29** | $\frac{\pi}{6}$ | **30** | $-\frac{\pi}{2}$ | **31** | $-\frac{\pi}{4}$ |
| **32** | $-3.91$ | **33** | $-9.799$ | **34** | $9.27$ | **35** | $4.96$ |

هەژماری هەریەك لەم ڕێژە سێگۆشەییانە بکە .

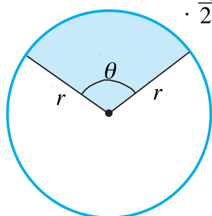
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **36** | $\sin\pi$ | **37** | $\cos\pi$ | **38** | $\cos\frac{\pi}{3}$ | **39** | $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ |
| **40** | $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ | **41** | $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$ | **42** | $\tan\pi$ | **43** | $\tan\frac{\pi}{4}$ |
| **44** | $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ | **45** | $\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$ | **46** | $\sin\left(\frac{11\pi}{2}\right)$ | **47** | $\cos 5\pi$ |

هەژمێری درێژی ئەو کەوانەیبکە کە هەریەك لەم چەقە گۆشانە لەبازنەیەکدان کە نیوەتیرەکەی 10 مەترە

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **48** | 3.8 گۆشەی نیوەتیرەیی | **49** | 2.4 گۆشەی نیوەتیرەیی | **50** | 45 گۆشەی نیوەتیرەیی |
| **51** | 72گۆشەی نیوەتیرەیی | **52** | 4.28 گۆشەی نیوەتیرەیی | **53** | 0.67 گۆشەی نیوەتیرەیی |
| **54** | $\frac{\pi}{3}$گۆشەی نیوەتیرەیی | **55** | $\frac{2\pi}{3}$ گۆشەی نیوەتیرەیی | **56** | $\frac{\pi}{4}$ گۆشەی نیوەتیرەیی |
| **57** | $\frac{\pi}{2}$گۆشەی نیوەتیرەیی | **58** | $\frac{7\pi}{4}$ گۆشەی نیوەتیرەیی | **59** | $\frac{7\pi}{6}$ گۆشەی نیوەتیرەیی |

**بەستنەوە**

**ئەندازە** ڕووبەری کەرتە بازنەیەی کە دیاریکراوە بە چەقە گۆشەیەك کە پێوانەکەی $\theta$ گۆشە نیوەتیرەییە بەشێکە لە بە هەی $\pi r^2$ لە ڕووبەری بازنەکە $\frac{\theta}{2\pi}$ .




$$A = \frac{\theta}{2\pi} \times \pi r^2 = \frac{\theta r^2}{2}$$

**60** هەژمێری ڕووبەری کەرتە بازنەیەك بکە کە دیاریکراوە بە چەقە گۆشەیەك پێوانەکەی $\frac{7\pi}{6}$ لە بازنەیەکدا نیوەتیرەکەی 20 m بێت.

**61** هەژمێری پێوانەی چەقە گۆشەیەك بکە لە بازنەیەکدا نیوەتیرەکەی 12 cm بێت ئەگەر بزانی ڕووبەری کەرتە بازنەییەکەی گۆشەکەی دیاریکردووە دەکاتە $55.5\ cm^2$ .

**جێبەجێکردن**

**ئەندازە** فلچەی شوشەی ئوتومبیلێك دەخولێتەوە بەگۆشەیەك پێوانەکەی $\frac{3\pi}{4}$ گۆشەی نیوەترەیی بێت لەهەر 0.9 لە چرکەدا.




**62** هەژمێری ئەو دوورییە بکە کە خاڵێك لەسەر کۆتایی بەرزییەکەی و خاڵێك لەسەر کۆتایی نزمییەکەی دەیبڕێت، کاتێك فلچەکە دەخولێتەوە بە $\frac{3\pi}{4}$ گۆشەی نیوەتیرەیی.

**63** خێرایی هێڵی بۆ هەریەکە لە دوو خاڵەکەی پێشوو بە سانتیمەتر لە چرکەیەکدا هەژمێربکە، هەژمێری ئەو دوو خێراییە بە کیلۆمەتر لە کاتژمێرێکدا بکە.



**تەکنەلۆجیا** خوێنەری پەپکە پەستێنراوەکان پەپکەکە دەسووڕێنێتەوە بە گۆشە خێراییەکی نەگۆڕ، بەڵام خێرایی هێڵی بۆ خاڵێك لەسەر پەپکەکە دەگۆڕێت بە پێی نیوەتیرەی ئەو بازنەیەی کە خاڵەکەی لەسەرە. وا دابنێ کە پێدراوەکان نوسراون لە سەر پەپکێك لە ناو بازنەیەك کەتیرەکەی 6 cm بێت.

**64** خێرایی هێڵی بۆ خاڵێك هەژمێربکە کە دەکەوێتە سەر لای ئەو بازنەی کە زانیارییەکەی تێدایە. ئەگەر بزانی کە پەپکەکە دەسوڕێتەوە لە کاتی خوێندنەوەی ئەو خاڵە بە 200 خول لە خولەکێکدا:

**65** خێرایی هێڵی بۆ خاڵێك هەژمێربکە کە دەکەوێتە دووری 2cm لەلای دەرەوەی بازنەیەك کە زانیارییەکەی تێدایە، ئەگەر بزانی پەپکەکە دەخولێتەوە لە کاتی خوێندنەوەی ئەو خاڵە بە 240 خول لەخولەکێکدا.

**پێشبرکێی** ئۆتۆمبیلەکان لە گۆڕەپانێکی بازنەیی پێشبرکێیەك دەکەن کە نیوەتیرەکەی 300m ە. یەکێك لە ئۆتۆمبیلەکان کەوانەیەکی بڕی کە پێوانەی چەقە گۆشەکەی $120°$ لە 17.5 چرکەدا.

**66** خێرایی هێڵی ئەو ئۆتۆمبیلە بە مەتر لە چرکەدا هەژمار بکە

**67** گۆشەخێرایی بۆ ئەو ئۆتۆمبیلە بە گۆشەی نیوەتیرەیی لە چرکەدا هەژمار بکە.

## ڕوانین بۆ دواوە

هەر لاسەنگەیەك شیکاربکە. کۆمەڵەی شیکارەکە لەسەر تەوەری ژمارەکان بنوێنە.

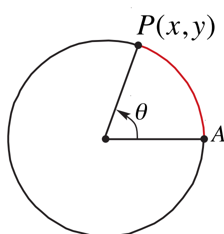
**68** $|x-4| \le -2$ **69** $|2-x| > 1$ **70** $|3x+5| < 4$

هەریەکە لەم هاوکێشە ڕێژەییانە شیکاربکە. و پاسادانی شیکارەکە بکە بەهەر ڕێگایەك بێت.

**71** $\frac{x-3}{x+5} = \frac{x}{2+1}$ **72** $\frac{y}{y-4} - \frac{y}{y+2} = \frac{5}{y^2-2y-8}$

## ڕوانین بۆ پێشەوە

**73** $\sin^2\theta + \cos^2\theta$ هەژمێربکە



# هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان
# Fundamental Trigonometric Identies

وانەی
4

### ئامانجەکان

- هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان دەسەلمێنێ.
- هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان بۆ کورتکردنەوەی برە سێگۆشەییەکان بەکاردێنێت.

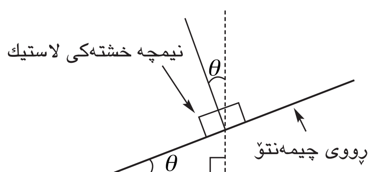
**بۆچی؟**

دەتوانیت هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان بەکاربهێنیت بۆ نوسینەوەی بڕێکی سێگۆشەیی بەپێی یەك لە ڕێژە سێگۆشەییەکان، کە ئەمە یارمەتیت دەدات بۆ شیکاری ژمارەیەکی زۆر لە پرسیارەکان لە ژیانی ڕۆژانەدا وەك دیاریکردنی گۆشەی خزان، کەوا لە نیمچە خشتەکێکی لاستیك دەکات کە دانراوە لەسەر ڕوویەکی چیمەنتۆ دەست بەخزاندن بکات.

**جێبەجێکردنەکان**

فیزیا

لاکێشە تەریبێکی لاستیك دانرا لەسەر ڕوویەکی چیمەنتۆیی. کە دەتوانرێ یەکێك لە لاکانی بە هێواشی بەرزکرێتەوە. گۆشەی چەمانەوە دەبێتە چەند کاتێك لاکێشە تەریبەکە دەستدەکات بە خزان؟ زاناکان ئەم گۆشەیان بەکارهێناوە بۆ دۆزینەوەی هاوکۆلکەی لێکخشاندن **$\mu_s$ Coefficient of Static Friction** کەنەگۆرە m لە نێوان لاستیك و چیمەنتۆیەکەدا .ئەو هاوکۆلکە دەکاتە 1.4 .



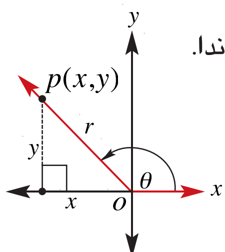

ئەوەی لە خزاندنی لاکێشە تەریبەکە ڕێگری دەکات هێزێکە بریتییە لە بڕی $\mu_s mg \cos\theta$ کە هێمای $m$ هاوکۆلکەی لێك خشاندنە، $g$ بارستایی نیمچە شەشپاڵووەکە و $\mu_s$ خێرایی ڕاکێشانە بەڵام ئەو هێزەی پاڵنەری خزاندنەکەیە بەبڕی $mg \sin\theta$ دەردەبڕی و کاتێك دوو هێزەکە یەکسان بن ئەوا.

ئەوا $1.4mg\cos\theta = mg\sin\theta$ ئەم هاوکێشەیە بۆ هەژماری گۆشە $\theta$ بەکاربهێنە کە پێی دەوترێت گۆشەی خزان.

هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان **Trigonometric Identities** ئەو هاوکێشانەن کە بەڕاستی دەمێنەیتەوە هەرچەندە گۆڕانکاری لە بەهاکانی گۆڕاوەکانیاندا بکرێت،لەبیرت بێت کە پۆتانی خاڵێك لەسەر کۆتالاکەی گۆشەی $\theta$ لەباری پێوانەییدا ڕێگا دەدات بە هەژمارکردنی ڕێژەی سێگۆشەیەکانی ئەو گۆشەیە وەك خوارەوە:

$\sin\theta = \frac{y}{r}$ ، $\cos\theta = \frac{x}{r}$ ، $\tan\theta = \frac{y}{x}$ ، $x \neq 0$

کاتێك $r$ دووری پۆتانی خاڵەکەیە لە خاڵی بنەڕەت بێت لە ڕووتەختی پۆتاندا.




نموونە 1 ئەم هاوئەنجامە بسەلمێنە **$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$**

شیکار

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{r} \div \frac{x}{r} = \frac{y}{x} = \tan\theta$$

دەتوانێت هاوئەنجامەکانی تر بەهەمان ڕێگا بسەلمێنی یان بە بەکارهێنانی سەلمێنراوی فیثاغۆرس

**Fundamental Trigonometric Identities** هاوئەنجامە سێگۆشەییە بنەڕەتییەکان

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \qquad \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

نموونە 2 ئەم هاوئەنجامە بسەلمێنە **$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$** .

شیکار

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{y^2+x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

هەوڵبدە ئەم هاوئەنجامە بسەلمێنە: $\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$

دەتوانیت هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان بۆ سادەکردنەوەی بڕە سێگۆشەییەکان بەکاربهێنی و بەپێی یەك ڕێژەی سێگۆشەیی بیانووسی.

نموونە 3 ئەم بڕە **$\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$** بەپێی یەك ڕێژەی سێگۆشەیی بنووسە .

شیکار

$$\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} = \frac{1-\cos^2\theta}{1-\cos\theta} = \frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{1-\cos\theta} = 1+\cos\theta$$

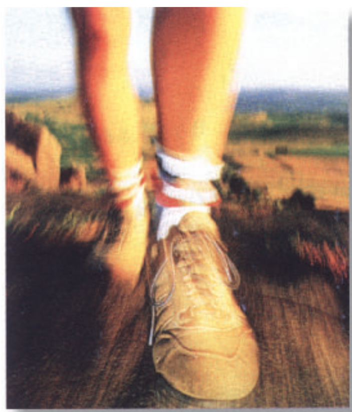
هەوڵبدە ئەم بڕە $\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta}$ بەپێی یەك لە ڕیژە سێگۆشەییەکان بنووسە .

## نموونە 4

بەگەڕانەوە بۆ پرسیارەکەی سەرەتای وانەکە، یەکسانبوونی **$mg \sin \theta = \mu_s mg \cos \theta$** بەکاربهێنەبۆ دیاریکردنی گۆشەی خزاندن لە هەر بارێکدا.

أ خزانی لاستیك لەسەر چیمەنتۆ، $\mu_s = 1.4$

ب خزانی شووشە لەسەر کانزایەکی چەورکراو $\mu_s = 0.25$ .



**شیکار**

أ

$$mg \sin \theta = \mu_s mg \cos \theta$$
$$mg \sin \theta = 1.4 mg \cos \theta$$
$$\sin \theta = 1.4 \cos \theta$$
$$\tan \theta = 1.4$$
$$\theta \approx 54.5^{\circ}$$

ب

$$mg \sin \theta = \mu_s mg \cos \theta$$
$$mg \sin \theta = 0.25 mg \cos \theta$$
$$\sin \theta = 0.25 \cos \theta$$
$$\tan \theta = 0.25$$
$$\theta \approx 14.0^{\circ}$$

# ڕاهێنان

## بەردەوامبوون لە بیر کاریدا

1 ئەو پەیوەندییە چییە کە sin و cos و tan بەیەکەوە دەبەستێت؟

2 ئەو پەیوەندییە چییە لە نێوان هاوئەنجامی $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ و سەلمێنراوی فیثاگۆرس هەیە؟

## ڕاهێنانی ئاڕاستەکراو

3 ئەم هاوئەنجامە بسەلمێنە $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$.

4 ئەم برە $\frac{\cos^2 \theta}{1+\sin \theta}$ بەپێی یەك ڕێژەی سێگۆشەیی بنووسە .

5 $\frac{1}{\tan^2 \theta}$ بەپێی $\sin \theta$ بنووسە.

جێبەجێکردن

6 **فیزیا** گۆشەی خزان بۆ جۆرێك لاستیك لەسەر چیمەنتۆ دیاریبکە کاتێك $\mu_s = 1.2$ .

## راهێنان و جێبەجێکردن

بەبەکارهێنانی پێناسەی ڕێژە سێگۆشەییەکان ئەو هاوئەنجامانە بسەلمێنە.

**7** $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

**8** $\frac{1}{\sin^2\theta} = 1 + \frac{1}{\tan^2\theta}$

ئەم برە سێگۆشەییانە بە پێی یەك ڕێژە سێگۆشەیی بنووسە.

**9** $\frac{\sin\theta}{\tan\theta}$

**10** $\tan\theta\cos\theta$

**11** $\frac{\tan\theta}{\sin\theta}$

**12** $\frac{\tan\theta}{\cos\theta}$

ئەم برە سێگۆشەییانە بە پێی $\cos\theta$ بنووسە.

**13** $2\sin^2\theta - 1$

**14** $\left(1+\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\left(1-\sin^2\theta\right)$

**15** $\left(1+\frac{1}{\tan^2\theta}\right)\left(1-\frac{1}{\tan^2\theta}\right)$

**16** $\frac{\tan\theta}{\sin\theta}$

ئەم برە سێگۆشەییانە بە پێی $\sin\theta$ بنووسە.

**17** $\frac{\cos\theta}{\tan\theta}$

**18** $\frac{1}{\tan^2\theta}$

**19** $\cos^2\theta\tan^2\theta + \frac{1}{\sin\theta}$

**20** $\tan^2\theta\sin^2\theta$

هاوئەنجامە سێگۆشەییەکان بەکاربهێنە بۆ سەلماندنی ڕاستی هەریەك لەمانە.

**21** $\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta - 1} = -\frac{1}{\cos}$

**22** $\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta - 1} = -\frac{1}{\sin\theta}$

**بەستنەوە**

**23** هەریەك لە $\tan\theta$ و $\sin\theta$ بەپێی $\cos\theta$ بنووسە

**جێبەجێکردن**



**فیزیا** بەگەڕانەوە بۆ پرسیارەکە لێك خشاندنی سەرەتای وانەکە هاوکێشەی $mg\sin\theta = \mu_s mg\cos\theta$ بۆ دیاریکردنی گۆشەی خزان بۆ هەر تەنێك بەکاربهێنە.

**24** تەختەی مۆمکراو لەسەر بەفر $\mu_s = 0.14$

**25** تەختە لەسەر تەختە: $\mu_s = 0.4$

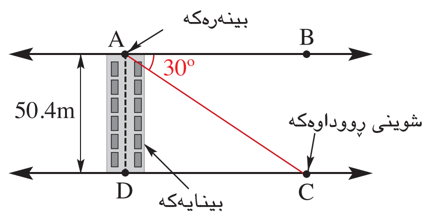
**26** تەختە لەسەر قرمید: $\mu_s = 0.6$

**27** ئاوریشم لەسەر ئاوریشم: $\mu_s = 0.25$

##  ڕوانین بۆ دواوە

**28** هێڵکاری ڕونکردنەوەیی نەخشەی $y=2(x-3)^2+5$ بکێشە. پۆتانی سەربڕگە هاوتاکە کامەیە؟

**29** لە هێڵکاری بەرامبەردا گۆشەی $\widehat{BAC}$ نزمەگۆشەیە. خاڵی $A$ چاوی کەسێکە لەسەر بینایەک وەستاوە دەڕوانێتە ڕووداوێکی هاتوچۆ لە خاڵی $C$ دا، شوێنی ڕوداوەکە چەند لە خاڵی $D$ بنکەی بیناکەوە دوورە؟ وەڵامەکەت بۆ نزیکترین بەشی سەدی لەمەتر نزیکبکەوە.




##  ڕوانین بۆ پێشەوە

**30** لە جیاتی $\sin\theta$ نەزانراوی $x$ لە هاوکێشەی $\sin^2\theta+2\sin\theta-3=0$ دا دابنێ.ئەو هاوکێشە دووجایەی دەستدەکەوێت شیکاربکە. پاشان بەهای گۆشەی $\theta$ بدۆزەرەوە کە پاسادانی هاوکێشە سێگۆشەییەکە دەکات.

# چەرخی شاری یاری

لە گرنگترین یارییە خۆشەکانی شاری یاری سواربوونی چەرخە گەورەکەیەتی کە لەوێوە لە بەرزی جیاجیا سەیری دیمەنی شار دەکەیت بە خولانەوەی چەرخەکە ئەو بەرزییە دەگۆڕێت. ئەو کەسەی یەکەم جار نموونەیەکی لەم چەرخە دروستکرد پیاوێکی ئەمریکی بوو بەناوی جۆرج فێریس ئەوەش بەبۆنەی پێشانگایەکی نێودەوڵەتی بوو لە شاری شیکاغۆی ئەمریکا لە ساڵی 1893 زاینیدا تیرەی چەرخێك. لە یەکێك لە شارەکانی یاریدا 40 مەترە و تەوەرەکەی لەبەرزی 21 مەتر دایە ئەم چەرخە 40 کورسی تایبەتی هەڵگرتووە کە هەریەکیان 6 کەس دەگرن چەرخەکە خولێکی تەواو لە 440 چرکەدا تەواودەکات.





## چالاکی 1

نموونەیەك بۆ چەرخێکی شاری یاری لە ڕووتەختی پۆتاندا دروستبکە کە تەوەرەی چەرخەکە لە خاڵی بنەڕەتدا بێت. خشتەیەك بۆ بەهاکانی دووری خاڵێك لە لێواری چەرخەکە لە تەوەری سینەکان پێکبهێنە، بۆ هەر سوڕانەوەیەکی چەرخەکە، بەبەکارهێنانی گۆشەکانی سوڕانەوە $0°$ ، $90°$ ، $180°$، $270°$، ... $810°$ لە ڕووتەختی پۆوتاندا، هەرجوتێکی ڕێکخراو کە پێکهاتووە لە گۆشەی سوڕانەوە و بەرزییەکەی بنوێنە، کە گۆشەکانی تەوەری سینەکان بگریتەوە خاڵەکان بگەیەنە بۆ کێشانی وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی گونجاو.

## چالاکی 2

خشتەیەك دروستبکە بۆ بەهاکانی بەرزی سورابویەك ( وای دابنێ لەسەر لێواری دانیشتووە) لە ڕووی زەوییەوە بە گۆڕانی گۆشەی سوڕانەوە. گۆشە سوڕانەوەی چالاکی 1 بەکاربهێنە لە ڕووتەختی پۆتانەکەدا، هەر جووتێکی ڕێکخراو لە گۆشەی سوڕانەوەی بەرزی سواربووەکە لە ڕووتەختی پۆتانەکەدا پێکهاتووە بنوێنە کە گۆشەکانی تەوەری سینیەکان بگرنەوە. خاڵەکان بگەیەنە بۆ کێشانی وێنەیەکی ڕوونکردنەوەیی گونجاو.

## چالاکی 3

1 خشتەکەی چالاکی 2 بەکاربهێنە کەچەرخەکە خولێك تەواو دەکات لە 440 چرکەدا، بۆ گۆڕینی یەکەکانی تەوەری سینەکان لە پلەکەوە بۆ کات بەچرکە. لە ڕووتەختی پۆتانەکەدا هەر جووتێکی ڕێکخراوەکە لەکات بە چرکە لەڕووتەختی پۆتانەکەدا هەر جووتێکی ڕێکخراوکە لەکات بە چرکە و بەرزیەکەی پێك هاتووە بنوێنە کە گۆشەکان تەوەرەی سینیەکان بگرنەوە. خاڵەکان بگەیەنە بۆ کێشانی وێنەیەکی ڕوونکردنەوەی گونجاو.

2 خێرایی هێڵی سواربووەکە بە کیلۆمەتر لە کاتژمێرێکدا هەژماربکە.

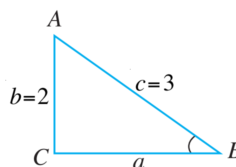


8

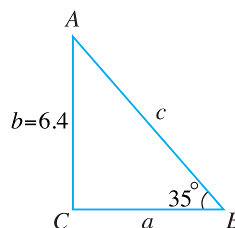
# پێداچوونەوەی بەش

هەریەك لەم سێگۆشە وەستاوانە شیکاربکە

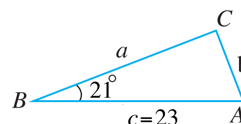
**1**



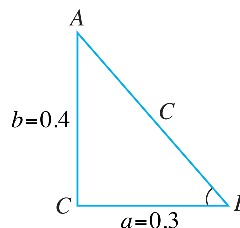

**2**




**3**




**4**




گۆشە گەڕانەوەی هەریەکە لەم گۆشانە دیاریبکە

**5** $270^\circ$ **6** $150^\circ$ **7** $-135^\circ$

**8** $-225^\circ$ **9** $380^\circ$ **10** $440^\circ$

**11** $1028^\circ$ **12** $973^\circ$ **13** $-515^\circ$

ئەم ڕێژە سێگۆشەییانە هەژماربکە.

**14** $\cos 135^\circ$ **15** $\sin 315^\circ$

**16** $\tan 225^\circ$ **17** $\cos 0^\circ$

**18** $\sin (-270^\circ)$ **19** $\cos (-180^\circ)$

**20** $\tan (-90^\circ)$ **21** $\cos 675^\circ$

**22** $\sin 600^\circ$ **23** $\tan 765^\circ$

خاڵی $P$ دەکەوێتە سەر بازنەیەك چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە و نیوەتیرەکەی $r$ و کۆتالاکەی گۆشەی $\theta$ بێت لە باری پێوانەییدایە خاڵی $p$ دیاربکە.

**24** $\theta = 60$ ؛ $r = 1$

**25** $\theta = -30$ ؛ $r = 2$

**26** $\theta = 240$ ؛ $r = 5$

**27** $\theta = -240$ ؛ $r = 3$

لە پلە بۆ ڕادیان یان لە ڕادیان بۆ پلە ئەمانەی خوارەوە بگۆڕە وەڵامەکان بۆ نزیکترین دە لە پلە نزیکبکەوە.

**28** $78^\circ$

**29** $334.61^\circ$

**30** $-230^\circ$

**31** $\frac{\pi}{7}$ ڕادیان

**32** $-\frac{15\pi}{16}$ ڕادیان

**33** 8.87 ڕادیان

**34** هەژمێری درێژی ئەو کەوانەیەی سنووردراوە بە چەقەگۆشەیەك پێوانەکەی $30^\circ$ یە لە بازنەیەکدابکە، کە نیوەتیرەکەی 4.5 مەترە.

هەر بڕێکی سێگۆشەیی لەمانەی خوارەوەدا بەپێی یەکەی ڕێژەی سێگۆشەیی بنووسە.

**35** $\cos^2\theta \tan^2\theta$ **36** $\tan^2\theta \quad \frac{1}{\cos^2\theta}$

**37** $\frac{\cos^2\theta}{\tan^2\theta+1}$ **38** $\frac{\tan^2\theta}{\cos^2\theta-1}$

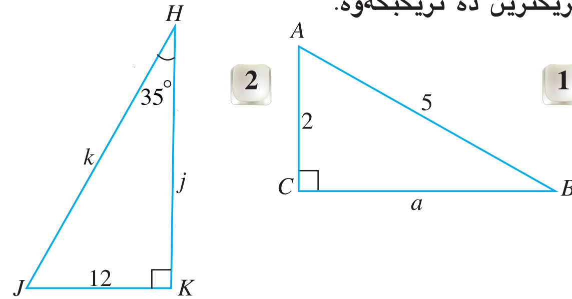



# تاقیکردنەوەی بەش

هەر یەك لەم سێگۆشانە شیکاربکە. باپێوانەی گۆشەکان نزیککراوەبن بۆ نزیکترین پلەو و پێوانەی لاکان بۆ نزیکترین دە نزیکبکەوە.

1

2




3 ژینۆ هەشت لایەکی ڕێکی دروستکرد ئەویش بە بڕینی سێگۆشەی لایەکسان لە هەر چوار لوتکەی چوارگۆشەکەوە کە درێژی لایەکی 10 بێت درێژی لایەکی هەشت لایەکە چەندە؟

10cm

بۆ هەریەك لەم گۆشانە ئەگەر هەبوو گۆشە گەراوەکانیان دیاریبکە

4 $137^\circ$    5 $515^\circ$    6 $38^\circ$    7 $1\,729^\circ$

هەژماری ئەو ڕێژە سێگۆشەییە داواکراوە بۆ گۆشەی $\theta$ بکە بەزانینی ئەو چارێکەی کۆتالا گۆشەکەی تێکەوتووە لە باری پێوانەییدا و زانینی بەهای ڕێژە سێگۆشەییە پێدراوەکان.

8 چارێکی چوارەم $\cos\theta = \frac{5}{13}$ ؛ $\sin\theta =$ ______

9 چارێکی دووەم $\tan\theta = -\frac{1}{2}$ ؛ $\sin\theta =$ ______

هەریەك لەم ڕێژەی سێگۆشەییانە هەژماربکە. با وەڵامەکەت بە تەواوەتی بێ.

10 $\sin 330^\circ$    11 $\cos(-150^\circ)$    12 $\sin 720^\circ$

13 $\tan(-765)$    14 $\cos 300^\circ$    15 $\tan 270^\circ$

پۆتانی خاڵی یەکتربڕینی بازنەیەك هەژماربکە. چەقەکەی خاڵی بنەڕەتە و نیوەتیرەکەی $r$ لەگەڵ کۆتالا گۆشەی $\theta$ لە باری پێوانەییدا. با وەڵامەکان بەتەواوی بن.

16 $r = 5$ ؛ $\theta = 30^\circ$

17 $r = 12$ ؛ $\theta = 225^\circ$

18 $r = 4$ ؛ $\theta = -150^\circ$

19 $r = 8$ ؛ $\theta = 300^\circ$

20 **چیا** لێژی چیایەك دەکاتە $\frac{7}{12}$ واتە تا لە چیاکە 7 مەتر بەرزبینەوە دووری بەرامبەرەکە 12 مەتری ئاسۆیی دەبێت بەرزە گۆشەی چیاکە چەندە؟

لە پلە بۆ ڕادیان بگۆڕە، و بە پێچەوانە، با وەڵامەکان بە تەواوی بن

21 $315^\circ$    22 $-150^\circ$    23 $495^\circ$

24 $\frac{\pi}{12}$    25 $\frac{5\pi}{4}$    26 $-\frac{5\pi}{3}$

27 **پیشەسازی** تیرەی پانکەیەك 12cmە، بە خێرایی $33\frac{1}{3}$ لە چرکەیەکدا دەخولێتەوە خێرایی هێڵی خاڵێك چەندە کە 4cm لە تەوەری پانکەکەوە دوورە.

هەموو بەها گونجاوەکان بۆ گۆشەی $\theta$ هەژمار بکە ئەگەر بزانیت $0 < \theta < 360^\circ$

28 $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$    29 $\cos\theta = \frac{1}{2}$

30 $\tan\theta = 1$    31 $\tan\theta = \sqrt{3}$

هەریەك لەم بڕانە بەپێی یەك ڕێژە سێگۆشەیی بنووسە.

32 $\frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\tan\theta} \times \cos\theta$

33 $\frac{1}{\cos^2\theta} - \tan^2\theta - \sin^2\theta$

34 $\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$

پۆتانی هەریەك لەو خاڵانە هەژمێربکە بەسورانەوە بەدەوری خاڵی بنەڕەت و بە گۆشە پێدراوەکان.

35 $30^\circ$؛ $(5.8)$    36 $-60^\circ$ ؛ $(-2.6)$

37 درێژی میلی چرکەژمێرێك 3cm . ئەو دوورییە چەندە کە سەرەکەی لە 5 چرکەدا دەیبڕێت.

8

# تاقیکردنەوەی کەڵەکەبوو

1 بواری نەخشەی $f(x)=\frac{2x-3}{x+1}$ پێکهاتووە لەگشت ژمارەی ڕاستییەکان جگە لە.

أ $1$  ب $-1$  ج $-\frac{3}{2}$  د $\frac{3}{2}$

2 کام لە زۆرڕادەکانی خوارەوە یەکسانە بە زۆر ڕادەداری.

$$\left(2x^3-x^4\right)+\left(3x^2-5\right)-\left(x^2-x^4+1\right)$$

أ $-2x^4+2x^3+3x^2-6$

ب $2x^3+2x^2$

ج $2x^3+2x^2-4$

د $2x^3+2x^2+4$

3 پۆی سینی سەری برگە هاوتای $f(x)=2x^2-4x+1$ کامەیە؟

أ $-1$  ب $1$  ج $2$  د $-\frac{1}{2}$

4 کام لەم ژمارانە ناکرێت بە شێوەی ڕێژەی دوو ژمارەی تەواو بنووسرێت.

أ خۆبەش  ب تەواو

ج ڕێژەیی  د ناڕێژەیی

5 شیکاری $|2x+5|=11$ دەکاتە.

أ $-3;\ 3$  ب $-8;\ 8$

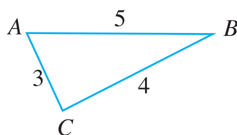
ج $-8;\ 3$  د $-3;\ 8$

6 دوو گۆڕاوی $x$ و $y$ پەیوەستن بەیەکتریەوە بە گۆڕانێکی ڕاستەوانە. نەگۆڕی گۆڕانەکە لەم پەیوەندییەدا کامەیە ئەگەر بزانیت $y=8$ کاتێك $x=4$

أ $\frac{1}{2}$  ب $2$  ج $32$  د $-2$

7 بەهای بڕی $3\left(\sqrt{45}\right)^2$ چەندە؟

ئەم سێگۆشەیە بەکاربهێنە بۆ هەژماری ڕێژەی سێگۆشەییەکانی.




8 $\sin A$

9 $\cos A$

10 $\tan B$

11 $\sin B$

12 یاسا «دەستوور» بەکاربهێنە بۆ شیکاری هاوکێشە دووجای $5x^2+x-2=0$ .

13 ئەم لاسەنگە ڕێژەییە $\frac{6}{x-2}>\frac{5}{x-3}$ شیکاربکە.

14 بە شێوەی گشتی هاوکێشەی ئەو ڕاستەهێڵە بدۆزەرەوە کە بە خاڵی $(-3, 4)$ دا دەڕوات و لەسەر ڕاستەهێڵی $y=3x-5$ ئەستوونە.

15 بڕی $\frac{6x^2}{3x+12}\div\frac{x}{x+4}$ سادەبکە.

16 بواری نەخشەی $f(x)=\sqrt{2-3x}$ دیارییبکە؟

17 بڕی $3y(5x+2)-4(5x+2)$ شیتەڵ بکە.

18 بەهای $\sin\frac{\pi}{2}$ چەندە؟

19 گۆشەی گەڕانەوەی سەر بەگۆشەیەك پێوانەکەی $640^\circ$ بێت چەندە ؟

20 **ئەگەر** بەچەند ڕێگا دەتوانیت سەرۆك و جێگری سەرۆك هەڵبژێریت لە دەستەیەك کە پێکهاتووە لە 15 ئەندام

21 دوا ژمارە لە شێوازی 50، 46، 24 ، ... کامەیە ؟

22 $\frac{3\pi}{5}$ لە ڕادیان بگۆڕە بۆ پلە.

23 ئەو گۆشەیە کامەیە کە بە $\cos 0=\sin 30^\circ$

24 **ئەگەر** بڕوا بەردەزارێکی هەڵدا. ئەگەری دەستکەوتنی ژمارەی جووت یان ژمارە 1 چەندە؟